JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAINVIN

Sur un certain système d'équations linéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 41-46.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__41_0>

SUR UN CERTAIN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES;

Par M. PAINVIN,

Docteur ès Sciences.

Le système d'équations que je considère est le suivant :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} h_1 \;\;= r, \\ h_2 \;\;= (r-1)h_1 - \mu a, \\ h_3 \;\;= (r-2)h_2 - 2(\mu-1)ah_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{i+1} = (r-i)h_i - i(\mu - i + 1)ah_{i-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{\mu+1} = (r-\mu)h_\mu - \mu.1.ah_{\mu-1}; \end{array}\right.$$

r étant une inconnue, a une constante quelconque, et μ un nombre entier. Ce système s'est présenté à M. Liouville dans des recherches importantes sur l'intégration des équations différentielles (*Journal de Mathématiques*, 1re série, tome V) ; M. Liouville en a déduit un théorème d'algèbre que je me propose d'établir dans cette Note, en ne m'appuyant que sur les propriétés les plus élémentaires des déterminants.

Soit le déterminant

$$D_{\mu+1} = \left|\begin{array}{ccccccccc} a_1 & m_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & a_2 & m_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & a_3 & m_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & a_4 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{\mu-2} & m_{\mu-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n_{\mu-2} & a_{\mu-1} & m_{\mu+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n_{\mu-1} & a_\mu & m_\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n^\mu & a_{\mu+1} \end{array}\right|$$

Si l'on désigne par D_i le déterminant qui, commençant à l'élément a_1, se continue jusqu'à l'élément a_i inclusivement, la loi de formation des déterminants conduit immédiatement aux relations :

$$(2)\quad \begin{cases} D_{\mu+1} = a_{\mu+1} D_\mu - m_\mu n_\mu D_{\mu-1}, \\ D_\mu = a_\mu D_{\mu-1} - m_{\mu-1} n_{\mu-1} D_{\mu-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_{i+1} = a_{i+1} D_i - m_i n_i D_{i-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_3 = a_3 D_2 - m_2 n_2 D_1, \\ D_2 = a_2 D_1 - m_1 n_1, \\ D_1 = a_1. \end{cases}$$

Si maintenant on pose

$$(3)\quad \begin{cases} a = \alpha(\alpha - 1), \\ a_k = r - k + 1, \\ m_k = k\alpha, \\ n_k = (\mu - k + 1)(\alpha - 1), \end{cases}$$

les équations (2) coïncideront avec les équations (1); d'où l'on conclut

$$(4)\qquad h_i = D_i.$$

Le problème que j'ai en vue consiste à déterminer les racines de l'équation

$$h_{\mu+1} = D_{\mu+1} = 0,$$

obtenue par l'élimination successive des quantités $h_1, h_2, \dots, h_\mu$, ou, en d'autres termes, les valeurs de r qui annulent le déterminant

$$(\mathrm{I})\quad \begin{vmatrix} r & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu(\alpha-1) & r-1 & 2\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mu-1)(\alpha-1) & r-2 & 3\alpha & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mu-2)(\alpha-1) & r-3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r-\mu+3 & (\mu-2)\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3(\alpha-1) & r-\mu+2 & (\mu-1)\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2(\alpha-1) & r-\mu+1 & \mu\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha-1 & r-\mu \end{vmatrix}$$

Or, si l'on ajoute toutes les lignes horizontales à la première, on obtient une ligne dont tous les termes sont égaux à $r + \mu(\alpha - 1)$; par suite, le déterminant (I) s'annule pour $r = \mu(1 - \alpha)$.

Divisons, maintenant, tous les termes de la première ligne par $r + \mu(\alpha - 1)$, puis retranchons la deuxième colonne, à gauche, de la première; la troisième de la deuxième, etc.; la dernière de l'avant-dernière; le déterminant (I) se réduira à la forme suivante:

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
-r+\mu(\alpha-1)+1 & r-2\alpha-1 & 2\alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
-(\mu-1)(\alpha-1) & -r+(\mu-1)(\alpha-1)+2 & r-3\alpha-2 & 3\alpha & \ldots & 0 & 0 \\
0 & -(\mu-2)(\alpha-1) & -r+(\mu-2)(\alpha-1) & r-4\alpha-3 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(\mu-3)(\alpha-1) & -r+(\mu-3)(\alpha-1)+4 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(\mu-4)(\alpha-1) & \ldots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (\mu-2)\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r-(\mu-1)\alpha-\mu+2 & (\mu-1)\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -r+2(\alpha-1)+\mu-1 & r-\mu\alpha-\mu+1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -(\alpha-1) & -r+(\alpha-1)+\mu
\end{array}\right|$$

Ajoutons alors à la première ligne toutes les lignes horizontales inférieures; à la deuxième, toutes les lignes horizontales inférieures, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière ligne; changeons ensuite le signe de tous les termes du déterminant ainsi formé, et posons

$$r - \alpha = r_1,$$

on obtient le déterminant

$$(\mathrm{II})\quad \left|\begin{array}{ccccccccc}
r_1 & \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(\mu-1)(\alpha-1) & r_1-1 & 2\alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (\mu-2)(\alpha-1) & r_1-2 & 3\alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (\mu-3)(\alpha-1) & r_1-3 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r_1-\mu+4 & (\mu-3)\alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3(\alpha-1) & r_1-\mu+3 & (\mu-2)\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2(\alpha-1) & r_1-\mu+2 & (\mu-1)\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & (\alpha-1) & r_1-\mu+1
\end{array}\right|$$

On voit que ce déterminant ne diffère du déterminant (I) que par le changement de r en r_1 et de μ en $(\mu-1)$; donc ce dernier déterminant s'annulera pour

$$r_1 = (\mu-1)(1-\alpha);$$

et, par suite, le déterminant (I) s'annulera pour

$$r = \alpha + (\mu-1)(1-\alpha).$$

Si maintenant on fait subir au déterminant (II) les mêmes transformations que celles qu'on a fait subir au déterminant (I), et qu'on pose

$$r_2 = r_1 - \alpha,$$

on obtiendra nécessairement un troisième déterminant qui ne différera du déterminant (II) que par le changement de r_1 en r_2 et de $(\mu-1)$ en $(\mu-2)$; donc ce troisième déterminant s'annulera pour

$$r_2 = (\mu-2)(1-\alpha),$$

et, par suite, le déterminant (I) s'annulera pour

$$r = 2\alpha + (\mu-2)(1-\alpha).$$

Après la $(\mu-2)^{ième}$ transformation, on arrivera au déterminant

$$(\mu-1) \qquad \begin{vmatrix} r_{\mu-2} & \alpha & 0 \\ 2(\alpha-1) & r_{\mu-2}-1 & 2\alpha \\ 0 & (\alpha-1) & r_{\mu-2}-2 \end{vmatrix}$$

qui s'annule pour

$$r_{\mu-2} = 2(1-\alpha);$$

d'où

$$r = (\mu-2)\alpha + 2(1-\alpha).$$

Le déterminant $(\mu-1)$, soumis au même calcul que le précédent, conduira au déterminant

$$(\mu) \qquad \begin{vmatrix} r_{\mu-1} & \alpha \\ (\alpha-1) & r_{\mu-1}-1 \end{vmatrix}$$

qui s'annule pour

$$r_{\mu-1} = (1 - \alpha);$$

d'où

$$r = (\mu - 1)\,\alpha + (1 - \alpha).$$

Enfin le déterminant (μ) donnera successivement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (\alpha - 1) & r_{\mu-1} - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha - r_{\mu-1} & r_{\mu-1} - 1 \end{vmatrix} = r_{\mu-1} - \alpha;$$

par suite,

$$r_{\mu-1} = \alpha;$$

d'où

$$r = \mu\alpha.$$

On voit donc que les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant (I) sont

$$\mu\alpha;\ (\mu-1)\alpha + (1-\alpha);\ (\mu-2)\alpha + 2(1-\alpha);\ldots;\ (\mu-i)\alpha + i(1-\alpha),\ldots,$$
$$\alpha + (\mu-1)(1-\alpha);\ \mu(1-\alpha);$$

ou bien, en posant $\delta = 1 - 2\alpha$,

$$\mu\alpha,\ \mu\alpha + \delta,\ \mu\alpha + 2\delta,\ldots,\ \mu\alpha + i\delta,\ldots,\ \mu\alpha + (\mu - 1)\,\delta,\ \mu\alpha + \mu\delta;$$

ces racines forment une progression arithmétique dont le premier terme est $\mu\alpha$, et la raison $\delta = 1 - 2\alpha$.

Ainsi, lorsque des quantités $h_1, h_2, \ldots, h_\mu, h_{\mu+1}$ sont définies par des équations telles que les équations (1), la quantité $h_{\mu+1}$ ou le déterminant (I) a pour expression

$$(r - \mu\alpha)(r - \mu\alpha - \delta)\ldots(r - \mu\alpha - i\delta)\ldots[r - \mu\alpha - (\mu - 1)\delta](r - \mu\alpha - \mu\delta),$$

la constante α étant donnée par l'équation du second degré

$$\alpha(\alpha - 1) = a.$$

Il est facile de voir que l'on obtient toujours les mêmes racines pour l'équation

$$h_{\mu+1} = 0,$$

quelle que soit la valeur qu'on adopte pour α; je supposerai donc

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4a};$$

d'où

$$\delta = -\sqrt{1 + 4a}.$$

Si l'on fait

$$a = -\frac{1}{4},$$

d'où il résulte

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha - 1 = -\frac{1}{2}, \quad \delta = 0,$$

on est conduit à l'identité remarquable

$$\begin{vmatrix}
r & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\mu}{2} & r-1 & \frac{2}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\mu-1}{2} & r-2 & \frac{3}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{\mu-2}{2} & r-3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r-\mu+2 & \frac{\mu-1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{2}{2} & r-\mu+1 & \frac{\mu}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & r-\mu
\end{vmatrix} = \left(r - \frac{\mu}{2}\right)^{\mu+1}$$