JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un problème de mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 69-72.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__69_0>

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

[Extrait des *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1860.]

Considérons trois points matériels m, m', m'' entre lesquels s'exercent des attractions réciproques exprimées par des fonctions quelconques des distances; et admettons, de plus, que les deux points m' et m'' soient assujettis à rester à des distances constantes du point m. Le mouvement des deux points m' et m'' autour du point m présentera une certaine ressemblance avec celui du Soleil et de la Lune autour de la Terre, et quoiqu'en entrant dans le détail on s'aperçoive bien vite que l'analogie dont nous parlons est moindre qu'on ne l'aurait cru d'abord, il y a peut être quelque intérêt à faire voir que quand le mouvement des trois points m, m', m'' s'effectue dans un plan, les équations différentielles qui le déterminent s'intègrent par de simples quadratures.

Soit O le centre de gravité du système des trois masses m, m', m''. Menons par ce centre, que nous pouvons ici regarder comme immobile, deux axes rectangulaires fixes Ox, Oy, dont le plan soit celui où nos trois points se meuvent; désignons par a et a' les distances constantes mm', mm'', et par α, α' les angles que ces droites font avec l'axe des x. Si les coordonnées du point m sont représentées par x, y, celles des points m' et m'' seront respectivement

$$x + a\cos\alpha, \quad y + a\sin\alpha,$$

et

$$x + a'\cos\alpha', \quad y + a'\sin\alpha'.$$

L'origine étant au centre de gravité, on aura donc

$$(m + m' + m'')\,x + m'a\cos\alpha + m''a'\cos\alpha' = 0,$$
$$(m + m' + m'')\,y + m'a\sin\alpha + m''a'\sin\alpha' = 0.$$

On tire de là les coordonnées x, y du point m sous la forme

$$x = A\cos\alpha + A'\cos\alpha',$$
$$y = A\sin\alpha + A'\sin\alpha',$$

A et A′ étant des constantes, savoir :

$$A = -\frac{m'a}{m+m'+m''}, \quad A' = -\frac{m''a'}{m+m'+m''}.$$

Par suite, les coordonnées du point m' seront :

$$x' = (A+a)\cos\alpha + A'\cos\alpha',$$
$$y' = (A+a)\sin\alpha + A'\sin\alpha',$$

et celles du point m'' seront de même :

$$x'' = A\cos\alpha + (A'+a')\cos\alpha',$$
$$y'' = A\sin\alpha + (A'+a')\sin\alpha'.$$

Cela étant, la force vive

$$m\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2+dy'^2}{dt^2} + m''\frac{dx''^2+dy''^2}{dt^2}$$

s'exprimera par

$$E\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2F\cos(\alpha'-\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\alpha'}{dt} + G\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2,$$

E, F, G étant des constantes dont voici les valeurs :

$$E = (m+m'')A^2 + m'(A+a)^2,$$
$$G = (m+m')A'^2 + m''(A'+a')^2,$$

et

$$F = mAA' + m'A'(A+a) + m''A(A'+a').$$

En posant

$$\alpha' = \alpha + \beta,$$

on changera cette expression de la force vive en une autre

$$(E + 2F\cos\beta + G)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2(F\cos\beta + G)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + G\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2,$$

dans laquelle les coefficients ne contiennent plus qu'une seule variable β. Or c'est aussi de cette seule variable que dépend la fonction des forces. En effet, les distances a, a' étant constantes, on n'a point à s'occuper des actions mutuelles de m et m' et de m et m'', qui se font équilibre. Les seules forces dont on ait à tenir compte proviennent des attractions réciproques de m et m''. La fonction des forces ne dépend donc que de la distance $m'm''$, laquelle étant égale à

$$\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\beta},$$

ne dépend elle-même que de la variable β.

Actuellement remarquons, d'une manière générale, que, quand dans une question de Mécanique il arrive ainsi qu'il n'entre explicitement qu'une seule variable β dans les coefficients de l'expression de la force vive et dans la fonction des forces, celles des équations différentielles, formées d'après la méthode de Lagrange, où la dérivée de la fonction des forces est prise par rapport aux variables autres que β, s'intègrent d'elles-mêmes, en sorte qu'en les joignant à l'intégrale des forces vives, on peut exprimer la différentielle $d\alpha$, etc., de chaque variable et celle dt du temps par des expressions de la forme $f(\beta)\,d\beta$, après quoi l'intégration s'achève par les quadratures.

Dans le problème actuel, en désignant par $\varphi(\beta)$ la fonction des forces et par h une constante arbitraire, l'intégrale des forces vives est

$$\begin{aligned}(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\cos\beta + \mathrm{G})\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2(\mathrm{F}\cos\beta + \mathrm{G})\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \mathrm{G}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \\ = 2[\varphi(\beta) + h].\end{aligned}$$

Les principes de la *Mécanique analytique* fournissent d'ailleurs deux équations différentielles, dont je transcris la première seulement :

$$\frac{d}{dt}\left[(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\cos\beta + \mathrm{G})\frac{d\alpha}{dt} + (\mathrm{F}\cos\beta + \mathrm{G})\frac{d\beta}{dt}\right] = 0.$$

Je n'ajoute pas la seconde, où entrerait la dérivée $\varphi'(\beta)$ de la fonction des forces; elle nous est inutile, car celle des forces vives la remplace.

L'équation différentielle que je viens d'écrire s'intègre d'elle-même et donne

$$(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\cos\beta + \mathrm{G})\frac{d\alpha}{dt} + (\mathrm{F}\cos\beta + \mathrm{G})\frac{d\beta}{dt} = k,$$

k étant une constante arbitraire.

De cette intégrale et de celle des forces vives, on tirera, en résolvant une équation du second degré, les valeurs de

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}$$

en fonction de β. Soit donc

$$\frac{d\beta}{dt} = \psi(\beta),$$

il s'ensuivra que

$$t = \int \frac{d\beta}{\psi(\beta)};$$

ayant ensuite

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varpi(\beta),$$

on en conclura

$$d\alpha = \frac{\varpi(\beta)}{\psi(\beta)} d\beta,$$

et, partant,

$$\alpha = \int \frac{\varpi(\beta)}{\psi(\beta)} d\beta;$$

ainsi la question est ramenée aux quadratures, comme nous l'avions dit.

On arriverait au même résultat en se servant de l'équation aux différences partielles, que Jacobi a substituée aux équations de Lagrange. Une solution complète de cette équation fournit toutes les intégrales. Or, quand il n'entre qu'une seule variable β dans la fonction des forces et dans les coefficients de l'expression de la force vive, il n'entre aussi que cette variable β dans les coefficients de l'équation de Jacobi, de sorte qu'on en a facilement une solution complète en égalant à des constantes arbitraires les dérivées autres que $\frac{d\Theta}{d\beta}$ de la fonction Θ qu'elle contient, et en prenant pour $\frac{d\Theta}{d\beta}$ la valeur fonction de β que l'équation fournit ensuite naturellement. Après quoi tout s'achève par une quadrature.

J'ai cru devoir faire ces remarques générales; mais il faut ajouter que le problème particulier dont nous venons de nous occuper n'exige en lui-même aucun artifice. Il nous aurait suffi de joindre à l'intégrale des forces vives l'intégrale que fournit le principe des aires. Cette intégrale revient à celle que nous avons conclue de la méthode de Lagrange, et par conséquent, on en aurait déduit, sans aucun secours étranger, la solution de notre problème.