JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 305-328.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__305_0>

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE.

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.

(Suite).

CHAPITRE IV.

De la cubature des surfaces imaginaires et des périodes des intégrales doubles.

38. *Cubature de la conjuguée dont les ordonnées z sont seules imaginaires.* — Les axes étant supposés rectangulaires, l'élément du volume droit compris entre le plan des xy et la surface que l'on veut cuber est

$$z dx\, dy$$

ou

$$F(x, y)\, dx.dy,$$

si l'équation de la surface a donné

$$z = F(x, y).$$

Ce volume droit indéfini est représenté par l'intégrale

$$\int dy \int F(x, y)\, dx;$$

pour le limiter, on se donne habituellement la trace horizontale, fermée, du cylindre qui doit en former le contour. Si cette trace est représentée par une équation $f(x, y) = 0$ qui donne

$$x = \varphi(y) \pm \sqrt{\psi(y)},$$

le volume considéré est représenté par

$$(1) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)-\sqrt{\psi(y)}}^{\varphi(y)+\sqrt{\psi(y)}} \mathrm{F}(x, y)\, dx,$$

y_0 et y_1 étant les ordonnées maxima et minima de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Si la trace horizontale du cylindre est sinueuse et que son équation fournisse plus de deux valeurs de x en y, le volume s'exprime par plusieurs intégrales doubles dont les limites, fonctions de y, sont les différentes valeurs de x prises deux à deux en ordre convenable, et les limites par rapport à y, les ordonnées maxima et minima des différentes branches de la courbe sinueuse.

Le cas qui se présente le plus fréquemment est celui où le cylindre, qui comprend le volume à cuber, projette sur le plan horizontal le contour apparent de la surface. Si ce contour est limité dans les deux sens des x et des y, on calcule, comme il vient d'être dit, le volume droit compris entre la surface entière et le plan horizontal.

Si le contour est illimité, par exemple, dans le sens des x positifs et limité dans le sens des x négatifs, on peut le terminer, dans le sens des x positifs par une parallèle $x = x_1$ à l'axe des y; alors $x = \chi(y)$ étant la valeur de x tirée de l'équation du contour apparent, le volume est représenté par

$$(2) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\chi(y)}^{x_1} \mathrm{F}(x, y)\, dx,$$

y_0 et y_1 étant les ordonnées limites de la base du cylindre sur la droite $x = x_1$, ou par plusieurs intégrales de même forme avec d'autres de la forme (1) si la base du cylindre comprend plusieurs branches du contour apparent, et que ce contour présente des points maxima et minima par rapport à y.

Si le contour apparent est illimité dans les deux sens des x positifs et négatifs, on le termine par des parallèles à l'axe des y, $x = x_0$ et $x = x_1$ qui rencontrent le contour apparent et forment avec lui un espace clos sur le plan des xy; alors outre des intégrales de la forme (1) ou (2), l'expression du volume en comprend d'une troisième forme

$$(3) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y)\,dx.$$

Si la surface n'a pas de contour apparent sur le plan horizontal, en ce sens que ses points projetés parallèlement à l'axe des z recouvrent tout le plan des xy, on peut former sur ce plan un contour rectangulaire au moyen de deux parallèles à l'axe des y, $x = x_0$, $x = x_1$, et de deux parallèles à l'axe des x, $y = y_0$, $y = y_1$, et le volume s'exprime par une intégrale de la forme (3).

Cela posé, la conjuguée à abscisses et ordonnées réelles se cubera exactement comme la surface réelle, car dx et dy étant réels et $\mathrm{F}(x, y)$ seul imaginaire, la partie réelle de l'intégrale

$$\int dy \int \mathrm{F}(x, y)\,dx$$

représentera le volume terminé à la surface diamétrale, correspondante aux cordes parallèles à l'axe des z, de la partie considérée, et la partie imaginaire le volume compris entre la surface diamétrale et la conjuguée.

Si l'on prenait dans le plan horizontal un contour fermé quelconque, partie placé au-dessous de la surface réelle, partie au-dessous de la surface imaginaire, l'intégrale, abstraction faite du signe $\sqrt{-1}$ qu'on remplacerait par 1, représenterait la somme des volumes cylindriques terminés à la surface réelle et à la surface imaginaire.

On peut trouver dans cette remarque le moyen de simplifier quelquefois le procédé de calcul habituellement employé pour cuber la surface réelle. En effet, une intégrale de la forme

$$(3) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y)\,dx$$

est généralement plus aisée à obtenir que celles des deux autres formes, parce que les limites x_0 et x_1 y sont constantes au lieu d'être des fonctions de y; cette intégrale donne un volume à base rectangulaire et non pas terminé au contour apparent de la surface, ce qui est habituellement ce dont on a besoin.

Mais si ce contour rectangulaire dépasse le contour apparent de la surface réelle, l'intégrale représentera sous forme réelle le volume cylindrique compris entre la surface réelle et le plan horizontal, volume qui aura pour base tout ou portion du contour apparent, plus le volume de la surface diamétrale compris dans l'intérieur d'un cylindre limité au contour apparent de la surface réelle et au contour rectangulaire, et sous forme imaginaire, le volume compris dans ce même cylindre entre la surface diamétrale et la surface imaginaire.

Or, si la surface diamétrale est précisément le plan des xy, son volume sera nul, et l'intégrale ne se composera plus que de deux parties, l'une réelle qui sera ce que l'on cherchait, et l'autre imaginaire qui se séparera aisément.

Si la surface diamétrale était quelconque, il faudrait la cuber à part, et cela ramènerait en général la difficulté qu'on voulait éviter; cependant, quand il s'agira de trouver le volume compris entre les deux nappes de la surface réelle, que sépare le plan diamétral qu'elle a en commun avec sa conjuguée, ce volume devant s'obtenir par une soustraction, où le volume de la surface diamétrale disparaîtrait comme partie commune, rien ne s'opposera plus à la réussite de l'artifice que nous signalons.

Pour calculer le volume compris entre le plan des xy et une conjuguée quelconque, on pourrait rendre d'abord ses abscisses et ses ordonnées réelles, en changeant la direction de l'axe des z; mais nous allons voir qu'il est représenté par la même intégrale double qui donne le volume de la surface réelle, à la différence près toutefois d'une intégrale simple qui formera une partie complémentaire analogue à celle qu'introduit la recherche de l'aire d'une conjuguée quelconque d'une courbe plane.

39. *Cubature d'une quelconque des conjuguées dont les ordonnées z et x seules sont imaginaires.* — Les ordonnées z et x de la conjuguée considérée étant seules imaginaires, pour rendre réelles ses abscisses, il suffira d'incliner convenablement l'axe des z dans le plan des zx; en d'autres termes, les cordes réelles de la conjuguée seront parallèles au plan des zx.

Cela posé, la question peut, sans inconvénient, être réduite à déterminer le volume compris entre la conjuguée considérée, un cylindre parallèle à ses cordes réelles et le plan des xy : si l'on voulait ensuite donner aux génératrices du cylindre une autre direction, sans changer la courbe suivant laquelle il devrait couper la conjuguée, la correction à faire se réduirait à l'introduction d'une intégrale simple qui exprimât la différence des volumes des deux cylindres.

La question ainsi posée n'exige aucune invention nouvelle; chaque plan parallèle aux xz donne dans le cylindre considéré une section trapézoïdale dont l'aire, les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, est exprimée (n° **22**) par

$$\frac{z_0^2 - z_1^2}{2C} + \int_{x_0 z_0}^{x_1 z_1} F(x, y)\, dx,$$

$[x_0\, z_0]$, $[x_1, z_1]$ étant les deux points où le plan parallèle aux xz, dont il s'agit, coupe l'intersection de la conjuguée et du cylindre, et l'intégrale étant prise comme si y était constant.

Le volume compris dans le cylindre entre deux plans parallèles aux xz, infiniment voisins, est donc

$$dy \left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2C} + \int_{x_0 z_0}^{x_1 z_1} F(x, y)\, dx\right),$$

et le volume cherché, si $y = y_0$ et $y = y_1$ sont les deux plans limites qui comprennent le cylindre, est représenté par

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2C} + \int_{x_0 z_0}^{x_1 z_1} F(x, y)\, dx\right),$$

expression qui ne diffère que par une intégrale simple de la formule du volume indéfini de la surface réelle.

Dans cette expression, la partie réelle représente le volume compris dans le cylindre considéré entre le plan des xy et le diamètre qui partage en parties égales les cordes réelles de la conjuguée, et la partie imaginaire, le volume compris dans le même cylindre entre la conjuguée et son diamètre.

Si le cylindre est circonscrit à la surface réelle, l'intégrale simple

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2C}\right)$$

représente le volume compris entre ce cylindre et un autre qui, coupant la surface réelle suivant la même courbe, aurait ses génératrices parallèles aux z; en supprimant donc cette intégrale simple, l'intégrale double qui reste

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0 z_0}^{x_1 z_1} \mathrm{F}(x, y)\, dx$$

représente le volume de la conjuguée compris dans un cylindre parallèle aux z.

40. *Cubature d'une conjuguée quelconque.* — C et C′ étant les deux caractéristiques de la conjuguée considérée, c'est-à-dire les rapports des parties imaginaires des coordonnées x et z, y et z d'un quelconque de ses points, ses cordes réelles seront parallèles à la droite

$$x = Cz,$$
$$y = C'z:$$

pour trouver l'expression du volume compris entre une portion de cette surface, un cylindre parallèle à ses cordes réelles et le plan des xy, nous raisonnerons comme en géométrie plane.

S'il s'agissait de la surface réelle, et que la rapportant successivement aux axes primitifs (x, y, z) et à de nouveaux axes (x, y, z') dont le dernier fût parallèle à la droite anciennement représentée par les équations $x = Cz$, $y = C'z$, on formât les deux intégrales

$$\int dy \int z dx \quad \text{et} \quad \sin(\mathrm{Y}, \mathrm{Z'X}) \int dy' \left(\sin \mathrm{Z'X} \int z'\, dx'\right)$$

en prenant pour limites les coordonnées, dans l'ancien et le nouveau système, des points d'une même courbe tracée sur la surface : ces deux intégrales différeraient entre elles de l'intégrale simple qui exprimerait la différence des volumes des deux cylindres parallèles l'un aux z, l'autre aux z', terminés d'une part à la courbe choisie et de l'autre au plan des xy.

Cette intégrale simple, en désignant par u une ordonnée perpendiculaire à la fois aux z et aux z', est

$$\frac{\sin ZZ'}{2}\int z.z'.du$$

qu'on peut exprimer en fonction de z, x et y de la manière suivante: D'abord $z' = \frac{z}{\cos ZZ'}$, ce qui réduit l'intégrale considérée à

$$\frac{\operatorname{tang} ZZ'}{2}\int z^2\, du;$$

en outre les plans parallèles aux z' et aux z, puisque les z' sont parallèles à la droite

$$x = Cz,$$
$$y = C'z,$$

ont pour équation générale

$$Cy - C'x = k,$$

la distance u d'un point x, y, z à l'un de ces plans est donc

$$\frac{Cy - C'x - k}{\sqrt{C^2 + C'^2}},$$

par conséquent

$$du = \frac{Cdy - C'dx}{\sqrt{C^2 + C'^2}};$$

d'un autre côté

$$\cos ZZ' = \frac{1}{\sqrt{C^2 + C'^2 + 1}},$$

et par suite

$$\operatorname{tang} ZZ' = \sqrt{C^2 + C'^2}.$$

La substitution donne pour la partie complémentaire cherchée

$$\frac{1}{2}\int z^2(C\,dy - C'\,dx),$$

expression dans laquelle x, y, z sont les coordonnées des points de la courbe qui limite la portion de volume qu'on voulait calculer, de sorte que dx et dy peuvent y être exprimés en fonction de z et de dz au moyen de l'équation de la surface et de la condition qu'on y a adjointe pour définir la courbe en question.

En résumé donc, s'il s'agissait de la surface réelle, on aurait identiquement

$$\sin(Y, Z'X)\sin(Z'X)\int dy'\int z'\,dx' = \int dy\int z\,dx - \frac{1}{2}\int z^2(C\,dy - C'\,dx),$$

xyz, $x'\,y'\,z'$ désignant dans les deux intégrales doubles les coordonnées anciennes et nouvelles des points correspondants de la surface, tandis que dans l'intégrale simple x, y, z seraient les coordonnées des points de la courbe tracée sur la surface pour limiter la portion à laquelle correspondraient les deux volumes considérés.

Or cette identité, absolue de sa nature, convient aussi bien à des valeurs imaginaires des coordonnées qu'à des valeurs réelles; si donc,

$$z = F(x, y)$$

étant toujours l'équation de la surface réelle,

$$x - Cz = f(y - C'z)$$

est l'équation du cylindre réel qui doit, dans la conjuguée dont les caractéristiques sont C et C′, intercepter le volume considéré, et que les équations

$$z = F(x, y) \quad \text{et} \quad x - Cz = f(y - C'z)$$

donnent

$$x = \varphi(y) \pm \psi(y),$$

le volume cherché, représenté par l'intégrale

$$\sin(Y, Z'X)\sin Z'X\int dy'\int z'\,dx'$$

où les limites, qu'il est inutile d'indiquer, auraient été prises convenablement, sera aussi représenté par

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)-\psi(y)}^{\varphi(y)+\psi(y)} \mathrm{F}(x, y)\, dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} \{\mathrm{F}[\varphi(y)\pm\psi(y), y]\}^2 [\mathrm{C} - \mathrm{C}'\varphi'(y) \mp \mathrm{C}'\psi'(y)]\, dy,$$

dans laquelle les constantes y_0 et y_1 seraient les ordonnées maxima et minima de la courbe qui limite sur la conjuguée la portion de la surface à laquelle correspond le volume cherché.

41. *Des integrales doubles prises entre des limites imaginaires.* — La définition d'une intégrale double $\int\int z\,dx\,dy$, lorsque les variables dont elle dépend doivent passer par des valeurs imaginaires, est sujette à des difficultés sur lesquelles nous devons insister avant de passer outre.

Il est évident d'abord qu'une des sommes représentées dans la formule

$$\int\int z.dx.dy$$

ne se sépare des autres qu'autant qu'on fournit deux relations entre les parties réelles et imaginaires de x, y et z, qui, jointes aux deux équations dans lesquelles se décompose celle qui donne z implicitement, réduisent à deux le nombre des variables indépendantes.

Mais ces deux relations étant données, pour concevoir nettement l'intégrale double, il faudrait la transformer de manière à pouvoir y séparer les deux intégrations.

Or une pareille transformation exigerait habituellement un changement de variables indépendantes.

En effet, à un même couple de valeurs attribuées aux parties réelle et imaginaire soit de y, soit de x, il ne correspondra en général qu'un nombre limité de systèmes de valeurs soit de x et de z, soit de y et de z, puisque sur les six variables on en aura choisi deux et qu'il restera aux quatre autres à satisfaire à quatre conditions.

Pour pouvoir séparer les deux intégrations, il faudrait en général substituer des variables réelles aux variables imaginaires considérées.

On pourrait prendre pour variables indépendantes les parties α et β qui composent x, et l'on effectuerait la transformation au moyen de la formule connue

$$\int\int z dx\, dy = \int\int z_1\, d\alpha\, d\beta \frac{1}{\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}},$$

z_1 désignant l'expression de z en fonction de α et de β et $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}$ les dérivées partielles de α et de β par rapport à x et à y.

Mais une pareille transformation habituellement altérerait trop profondément la forme analytique de la fonction placée sous le signe $\int$ pour laisser aucun moyen d'en étudier l'intégrale.

La valeur d'une intégrale double, comme celle d'une intégrale simple, dépend avant tout, la fonction sous le signe $\int$ restant la même, des limites entre lesquelles l'intégration doit être faite. Ces limites restant fixes, la suite des valeurs intermédiaires, qu'on doit faire prendre aux variables, peut se déformer d'une infinité de manières sans que la valeur de l'intégrale change, et cette valeur, lorsqu'elle doit changer, conserve encore intacte sa partie principale, elle ne s'augmente que de constantes ou d'intégrales simples.

Nous bornerons donc d'abord nos recherches à déterminer pour chaque système de limites la valeur de l'intégrale double la plus facile à rencontrer et à définir.

Les limites seront fournies par deux courbes réelles ou imaginaires composées de points pris sur la surface $F(x, y, z) = 0$ ou sur ses conjuguées, de sorte que la discussion portera sur les différentes hypothèses qu'on peut faire relativement à ces courbes.

42. *Du cas où y ne reçoit que des valeurs réelles.* — Lorsque les deux courbes, qui forment les limites de l'intégrale, ont les ordonnées de tous leurs points réelles, on peut éviter de faire passer y par des valeurs imaginaires; alors l'intégrale double reçoit immédiatement la forme

$$\int dy \int z dx.$$

Mais les limites de chaque intégration étant fixées, si l'on n'indiquait de quelle manière pour chaque valeur de y, x variera entre ses limites $\varphi(y)$ et $\psi(y)$, l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx$$

resterait en général complétement indéterminée. En effet, pour chaque valeur de y, $y = k$,

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

pourrait avoir une infinité de valeurs qui seraient une quantité fixe augmentée de multiples entiers de quantités représentant les aires des anneaux fermés de la courbe

$$f(x, k, z) = 0,$$

ou les aires imaginaires des conjuguées fermées de cette courbe; en sorte que si la nature de la question ne spécifiait rien sur le nombre de chacune des périodes qu'il faudrait comprendre dans la valeur de l'intégrale

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

pour chaque valeur de y, l'élément

$$dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

renfermant une partie dans laquelle un coefficient, entier à la vérité, serait quelconque, comme cette partie serait toujours infiniment petite, l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx$$

pourrait recevoir une infinité de valeurs continues entre elles : tandis que si, au contraire, la marche des valeurs de x est fixée d'une manière générale, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de y, alors les valeurs de l'intégrale

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

ne se formeront plus indépendamment les unes des autres, et l'intégrale double sera complétement définie.

Pour fixer la marche des valeurs de x entre ses limites correspondantes à chaque valeur de y, on pourra définir d'une manière générale la courbe réelle ou imaginaire que, dans chaque plan parallèle au plan des xz, et distant de ce plan de la quantité y, le point $[xz]$ devra décrire entre les limites $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, pour engendrer l'aire

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx.$$

Soit toujours $y = k$ une des valeurs de y, le plan $y = k$ coupera la surface réelle et celles de ses conjuguées dont les ordonnées y sont réelles, suivant une courbe réelle et ses conjuguées imaginaires.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ sont constamment réels, quel que soit k, on pourra ne donner à x que des valeurs réelles, et l'intégrale

$$\int_{\varphi(k)}^{\psi(k)} z dx$$

représentera la somme des aires des sections faites dans la surface réelle et dans sa conjuguee à abscisses et ordonnées réelles, comprises entre ces deux courbes, l'axe des x et les deux parallèles à l'axe des z,

$$x = \varphi(k), \quad x = \psi(k).$$

Mais cette intégrale aura d'ailleurs autant de valeurs qu'il y aura de chemins continus sur ces deux courbes, des divers points qui peuvent répondre à la limite inférieure $x_0 = \varphi(k)$, aux points qui peuvent répondre à la limite supérieure $x_1 = \psi(k)$.

Si x peut aller de $x_0 = \varphi(k)$ à $x_1 = \psi(k)$ en dépassant ces limites dans un sens ou dans l'autre de toutes les manières possibles, pourvu que, partant de $x_0 = \varphi(k)$, il arrive par des valeurs réelles à $x_1 = \psi(k)$, l'intégrale devra être complétée par l'addition de multiples entiers des aires des anneaux fermés de la section réelle ou de la section imaginaire à abscisses réelles.

L'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx$$

représentera donc la somme des volumes compris entre la surface réelle et sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, le plan des xy, les deux plans $y = y_0$, $y = y_1$ et les deux cylindres $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$.

Et si dans chaque plan $y = k$, le point $[xz]$ a décrit des anneaux fermés homologues et un même nombre de fois dans chaque plan, l'intégrale comprendra en outre des multiples des volumes engendrés par les différents anneaux fermés lorsqu'ils se déplacent parallèlement au plan des xz entre les plans $y = y_0$, $y = y_1$.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ étant toujours supposés réels, quel que soit k, on veut néanmoins faire passer x par des valeurs imaginaires, on pourra interrompre à un instant quelconque le chemin du point $[xz]$, sur l'arc de la courbe réelle, par un tour fait sur une de ses conjuguées fermées, de façon à continuer ensuite l'arc réel, ou si cet arc réel se compose de deux branches distinctes et séparées, passer de l'une à l'autre en suivant l'une quelconque des conjuguées, au lieu de prendre, comme précédemment, la conjuguée à abscisses réelles.

L'intégrale aura, dans tous les cas, exactement les mêmes valeurs, car les aires imaginaires des conjuguées fermées contenues dans un même plan seront égales, et par conséquent engendreront les mêmes volumes.

Enfin, on pourra passer dans le plan de chaque section, du point $x_0 = \varphi(k)$ au point $x_1 = \psi(k)$, par une succession de valeurs imaginaires de x réglée par une loi entièrement arbitraire, par une relation choisie à volonté entre les parties réelles et imaginaires de x et de z, cette relation n'étant assujettie qu'à la condition d'être satisfaite par

$$x_0 = \varphi(k), \quad z_0 = \mathrm{F}(x_0, k)$$

et par

$$x_1 = \psi(k), \quad z_1 = \mathrm{F}(x_1, k),$$

quel que soit k.

Alors l'intégrale

$$\int_{\varphi(k)}^{\psi(k)} z dx$$

représentera l'aire de la section faite dans la surface réelle et sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, par exemple, plus des multiples déterminés des aires des différents anneaux fermés de la section réelle ou de l'une de ses conjuguées imaginaires. Le chiffre de chacun de ces multiples se déterminera, comme on l'a vu dans la théorie des intégrales simples, par le nombre de tours que fera sur l'anneau réel le point de contact de cet anneau avec la conjuguée sur laquelle se trouvera à chaque instant le point $[xz]$, ou par le nombre de contacts du chemin qu'aura décrit ce point $[xz]$ avec les branches réelles qui touchent chaque anneau fermé de l'une des conjuguées imaginaires.

Il pourrait se faire que k variant, le nombre de ces tours ou contacts ne dût pas rester le même dans les plans de toutes les sections, on devrait alors déterminer les valeurs de k entre lesquelles ces nombres resteraient constants; l'intégrale se composerait de multiples différents des volumes engendrés par les anneaux fermés dans les intervalles des plans correspondants aux valeurs principales de k.

Le nombre de tours que fait sur l'anneau réel le point où il touche la conjuguée à laquelle appartient le point $[xz]$, est égal au nombre de fois que le coefficient caractéristique de ce point $[xz]$ revient à sa valeur initiale, l'angle dont il est la tangente ayant passé par toutes les valeurs possibles dans un intervalle de 360 degrés.

Quant aux contacts du chemin imaginaire, parcouru par le point $[xz]$, avec la section réelle dans chaque plan, comme ils se déterminent, ainsi qu'on l'a vu dans la théorie des intégrales simples, par les rencontres de cette courbe réelle avec une autre courbe réelle dont l'équation résulte de la condition qui règle la succession des valeurs de x : il est évident que les valeurs de k, pour lesquelles cette seconde courbe serait tangente à la section réelle, seront celles à partir desquelles le nombre des contacts du chemin imaginaire pourra changer.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ n'étaient pas constamment réels, les limites de l'intégrale

$$\int_{x_0,\, z_0}^{x_1,\, z_1} zdx$$

seraient prises, en général, sur deux conjuguées différentes de la section réelle contenue dans le plan $y = k$, et cette intégrale, à la différence près de la quantité $\frac{z_0^2}{2\,C_0} - \frac{z_1^2}{2\,C_1}$, représenterait la somme des aires des deux conjuguées passant par les limites, et de la courbe réelle terminée aux points où elle toucherait ces deux conjuguées; l'intégrale double, à la différence près de la quantité

$$\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} dy\left(\frac{z^2}{C}\right)_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)},$$

représenterait donc le volume compris entre le plan des xy, la surface formée par les sections parallèles au plan des xz soit de la surface réelle, soit de ses conjuguées à ordonnées réelles qui passeraient par tous les points $y = k$, $x = \varphi(k)$ ou $\psi(k)$, $z = F(x, y)$, et un conoïde ayant pour génératrices les parallèles menées de ces divers points aux cordes réelles des conjuguées qui y passeraient.

45. *Du cas où les parties imaginaires de x et de y restent dans un rapport constant.* — Lorsque les deux courbes, qui forment les limites de l'intégrale double, sont sur une même conjuguée, ou sur des con-

juguées différentes, mais dont les caractéristiques soient proportionnelles, ou, enfin, quand ces deux courbes se composent de points pris sur les conjuguées dont les deux caractéristiques sont comme des nombres donnés, on peut éviter de faire sortir le point $[xyz]$ de ces conjuguées.

Ce cas peut se ramener au précédent par une transformation de coordonnées.

En faisant tourner le plan des xz d'un angle convenable, autour de l'axe des z, on substituera à la suite des valeurs que devaient prendre x, y et z, une autre suite de valeurs d'autres variables x', y', z', desquelles y' restera constamment réelle, et les valeurs de la nouvelle intégrale double

$$\sin \mathrm{YX}' \int dy' \int z' dx',$$

fourniront celles de la proposée. Or le paragraphe précédent les définit complétement.

44. *Du cas où chacune des limites est tout entière sur une même conjuguée, les deux conjuguées qui les contiennent étant d'ailleurs quelconques.* — On peut supposer, dans ce cas, que le point $[xyz]$ trace des courbes définies sur les conjuguées comprises dans une même suite dont fassent partie celles sur lesquelles se trouvent les limites : on ne pourra plus alors rendre en même temps réelles toutes les valeurs de y, par une même transformation de coordonnées; mais cependant on arrivera encore aisément à déterminer l'un des volumes que peut représenter, dans ce cas, l'intégrale double.

En effet, il résulte de ce qui précède, que l'une des valeurs de l'intégrale, prise entre des limites déterminées par une courbe A, tracée sur la surface réelle, et une courbe B, tracée sur l'une de ses conjuguées, représente, à la différence près d'une intégrale simple qui s'introduit par le changement de direction de l'axe des z, le volume de la surface réelle limitée à la courbe A et à la courbe C, suivant laquelle elle touche la conjuguée à laquelle appartient la courbe B, plus le volume de cette conjuguée limitée aux courbes C et B.

L'intégrale double, lorsque la courbe B passe d'une conjuguée à une autre, peut donc être considérée comme s'augmentant du volume correspondant à la portion de la surface réelle comprise entre les deux courbes suivant lesquelles elle touche les deux conjuguées consécutives, de la différence des volumes des deux conjuguées limitées respectivement aux courbes suivant lesquelles elles touchent la surface réelle, et à la courbe mobile B, et enfin de la quantité dont varie l'intégrale simple complémentaire.

Cela revient à dire que l'intégrale double définie par ses limites correspondantes à deux courbes B et B', tracées sur deux conjuguées différentes et quelconques d'ailleurs, comprend parmi ses valeurs le volume de la conjuguée à laquelle appartient la courbe B, limitée à cette courbe et à la courbe C, suivant laquelle elle touche la surface réelle, plus le volume correspondant à la portion de la surface réelle comprise entre la courbe C et la courbe C', suivant laquelle elle touche la conjuguée à laquelle appartient la courbe B', plus le volume de cette dernière conjuguée limitée aux courbes C' et B', ces trois volumes étant compris dans trois cylindres parallèles à trois axes de z différents, mais dont les directions sont connues, plus enfin les parties complémentaires qui s'introduisent à chaque changement de direction de l'axe des z, parties que nous avons déjà plusieurs fois évaluées.

45. *Du cas où, en tous les points d'une même limite, les deux caractéristiques conservent entre elles un rapport constant; ce rapport n'étant pas toutefois le même aux deux limites.* — A et B étant les deux courbes limites, nous supposerons d'abord l'une d'elles A tracée sur la surface réelle.

Si nous commençons par faire tourner les axes des x et des y d'un angle tel, que les ordonnées de tous les points de la courbe B deviennent réelles, et que nous concevions ensuite dans chaque plan parallèle au nouveau plan des xz, et passant par un point de la courbe B, les sections faites dans la surface réelle et dans la conjuguée imaginaire à laquelle ce point appartient, ces deux sections tangentes entre elles se faisant suite l'une à l'autre, couperont aux points $x' = a$, $x' = b$, les courbes A et B,

$$dy' \int_a^b z'\,dx'$$

représentera la somme de leurs aires, à la différence près de la quantité algébrique

$$\left[\frac{(z')^2}{2C'}\right]_{x'=a}^{x'=b};$$

l'intégrale

$$\int dy' \int_{\varphi(y')}^{\psi(y')} z'\,dx',$$

dans laquelle $\varphi(y')$ et $\psi(y')$ seraient les valeurs générales de x' en y' pour tous les points de la courbe A et de la courbe B, représentera donc le volume de la surface réelle limitée à la courbe A et à la courbe D, suivant laquelle elle touche toutes les sections faites dans les conjuguées auxquelles appartiennent les points de la courbe B, plus le volume d'une surface imaginaire engendrée par ces sections, limitées à la surface réelle et à la courbe B, plus l'intégrale simple

$$\int dy' \left[\frac{(z')^2}{2C'}\right]_{x'=\varphi(y')}^{x'=\psi(y')}.$$

Si les deux limites A et B étaient imaginaires, on évaluerait séparément l'intégrale entre les courbes A, B et des courbes différentes D, E tracées sur la surface réelle, et on y joindrait l'intégrale prise entre les courbes D et E.

46. Le dernier cas qui resterait à examiner serait celui où les deux limites seraient composées de points entièrement quelconques. Mais nous ne saurions traiter la question dans cette hypothèse générale qui exigerait absolument un changement complet de variables indépendantes. Comme nous l'avons dit déjà, la nouvelle intégrale différerait alors trop profondément de la proposée pour qu'on dût regarder la question comme se rapportant à cette proposée. On étudierait donc l'intégrale transformée dont les variables seraient devenues réelles, comme nous l'avons dit au n° **42**.

47. Toutes les conjuguées d'une surface ne la touchent pas toujours; nous devons donc dire un mot du cas où les limites passeraient sur les conjuguées de la seconde espèce.

La cubature de ces conjuguées ne présente rien de particulier, et inversement l'interprétation de l'intégrale double, dans le cas où les limites appartiendraient à une même conjuguée continue entre ces limites, ne présenterait non plus aucune difficulté. Mais dans tous les autres cas la question offrirait les mêmes embarras que nous avons constatés en géométrie plane dans le cas analogue.

Toutefois nous devons faire remarquer que dans toutes les hypothèses que nous avons examinées relativement aux limites, en exceptant seulement le cas où ces limites seraient composées de points complétement isolés, la transformation que nous avons eu à faire nous a toujours fourni, pour définir les nouvelles variables, une nouvelle équation de la même surface réelle, ayant encore par conséquent tous ses coefficients réels; or les ordonnées y étant devenues réelles à la suite de cette transformation, la section faite par chaque plan parallèle au nouveau plan des xz, dans la conjuguée passant par un point d'une des limites et l'enveloppe imaginaire des autres sections de la surface complète par le même plan réel, comporteront toujours les mêmes observations que nous avons faites en géométrie plane dans le cas analogue.

Par suite, lorsque l'équation proposée aura ses coefficients réels et représentera une surface réelle, on pourra habituellement assigner encore le volume représenté par l'intégrale double, même dans le cas où les limites auraient passé sur les conjuguées qui ne touchent pas la surface réelle.

48. *Des périodes des intégrales doubles.* — Nous avons, dans ce qui précède, trouvé l'un des volumes, et, suivant toute apparence, le volume le plus simplement défini que pût représenter pour chaque système de limites l'intégrale double

$$\int\int z.dx.dy.$$

Mais alors même que les limites resteraient les mêmes, nous savons que la valeur de l'intégrale pourrait changer avec la loi qui réglerait le mouvement du point $[xyz]$: nous allons donc chercher quelle sera cette valeur dans chaque cas. Ce qu'il restait encore de vague dans la recherche de la vraie valeur d'une intégrale double va s'éclaircir de façon à permettre de traiter complétement la question lorsqu'elle sera posée sur un exemple particulier.

Nous allons montrer en effet que les intégrales doubles comme les intégrales simples ont des périodes constantes, et que ce qu'il faut ajouter à la valeur la plus simple d'une intégrale double pour former sa vraie valeur actuelle est une somme de multiples de ces périodes réelles ou imaginaires; nous chercherons ensuite à obtenir un moyen de trouver ces multiples.

Le volume compris dans l'intérieur d'une nappe, fermée de toutes parts, de la surface réelle, peut être engendré plusieurs fois de suite dans le même sens, et ses éléments peuvent se superposer pendant que l'intégrale se forme; ce volume, on le comprend donc à l'avance, doit former une période réelle de l'intégrale; quant aux périodes imaginaires, ce seront les volumes enfermés par les conjuguées fermées.

49. *Démonstration de l'égalité des volumes enveloppés par toutes les conjuguées fermées d'une même catégorie.* — Nous démontrerons d'abord que les conjuguées fermées d'une même surface, comprises entre les mêmes nappes de cette surface, enveloppent toutes un même volume dans leur intérieur.

Il suffira pour cela de comparer entre elles les conjuguées qui ont en même temps leurs ordonnées y réelles ou de comparer l'une d'elles à celle qui a ses ordonnées et ses abscisses réelles; car en changeant la direction de l'axe des x, on pourrait amener successivement toutes les autres à avoir leurs ordonnées y réelles, et, d'un autre côté, celle qui primitivement avait à la fois ses abscisses et ses ordonnées réelles se retrouverait toujours comprise dans chaque nouveau groupe.

Cela posé, l'aire de la section faite dans l'une des conjuguées, qui ont leurs ordonnées réelles, par un plan parallèle au plan des xz est la période imaginaire ω de l'intégrale $\int z\,dx$ calculée en supposant y

constant, le segment compris entre deux plans parallèles au plan des xz est donc $\int \omega\, dy$, qui a la même valeur quelle que soit la conjuguée dont il s'agisse.

Il reste donc seulement à établir que toutes ces conjuguées ont les mêmes limites, parallèlement au plan des xz.

Or cela est évident : elles touchent en effet toutes la surface réelle aux points où elle a son plan tangent parallèle aux xz.

50. *De la manière dont s'accroît l'intégrale double.* — Quelle que fût la loi qui dût régir le mouvement du point $[xyz]$, nous avons toujours pu regarder la portion de surface qu'il décrit et à laquelle correspond le volume qui forme la valeur de l'intégrale double (à la différence près de l'intégrale simple qu'introduit le changement de direction dans l'axe des z), comme engendrée par une courbe B tracée sur la surface réelle, sur une de ses conjuguées, permanente ou non, ou sur des conjuguées pour lesquelles le rapport des caractéristiques C et C′ restât le même, ce rapport pouvant d'ailleurs changer ou non avec la position de la courbe B.

Dans le dernier cas, qui est le plus général, si la courbe B se déplace infiniment peu, l'intégrale subit trois variations distinctes.

1°. Si par chaque point de la courbe B, on fait, dans la conjuguée à laquelle appartient ce point, une section parallèle à la direction qu'il faudrait donner aux xz pour rendre réelles les ordonnées de la courbe B, ces sections forment une nappe N tangente à la surface réelle suivant une courbe A : lorsque la courbe B se déplace, la courbe A se déplace aussi sur la surface réelle, et l'intégrale s'accroît d'abord du volume correspondant à la portion de la surface réelle parcourue par la courbe A.

2°. La nappe N prend des limites différentes, et si l'on mène par chaque point de la courbe B et par le point correspondant de la courbe A deux parallèles aux cordes réelles de la conjuguée qui passe au point considéré de B, la nappe N, le plan des xy et les deux conoïdes formés par les deux suites de droites qui viennent d'être définies, enveloppent un certain volume : ce volume varie quand la courbe B se déplace, et la variation qu'il subit est la seconde partie de l'accroissement de l'intégrale.

3°. Enfin si l'on a formé l'expression du volume compris entre le plan des xy, le cylindre parallèle aux z ayant pour directrice la courbe B et le conoïde, défini comme il vient de l'être, ayant la même directrice B, ce volume ayant été représenté par la même intégrale simple qui le fournirait réel : la variation de cette intégrale simple sera la troisième partie de l'accroissement de l'intégrale double.

31. *De la manière dont s'engendrent les périodes.* — Lorsque la courbe B se déplace, la courbe A, si elle se trouve sur une nappe fermée de la surface réelle, peut parcourir cette nappe plusieurs fois dans le même sens, et chaque fois qu'un tour entier se trouve achevé, l'intégrale comprend une fois de plus le volume réel enfermé par cette nappe. C'est ainsi que s'engendrent les périodes réelles.

Si la courbe B reste sur une nappe illimitée, la partie imaginaire de l'intégrale croît ou décroît suivant que cette courbe B s'éloigne ou se rapproche de la surface réelle; elle peut diminuer jusqu'à zéro ou croître sans limite, mais le volume formé ne peut être engendré deux fois, si l'on écarte le cas où la courbe B étant fermée, on supposerait qu'elle fût parcourue plusieurs fois dans le même sens par le point mobile.

D'un autre côté, lorsque la courbe B reprend la même position, l'intégrale simple complémentaire reprend la même valeur, sans ambiguïté, et son accroissement total se réduit à zéro.

Rien, dans l'hypothèse, ne permet donc alors aux périodes de se développer.

Mais si la courbe B parcourt une conjuguée fermée, ou si, en avançant, elle passe d'une conjuguée fermée à une autre voisine, ou si ses différents points restent sur des conjuguées fermées d'une même catégorie; cette courbe peut deux, ou trois, ou quatre fois parcourir dans le même sens une conjuguée fermée, ou en parcourir les portions équivalentes sur les conjuguées fermées sur lesquelles elle arrive successivement, ou sur lesquelles se transportent ses différents points; et, dans ce cas, la valeur de l'intégrale peut comprendre un nombre quelconque de fois le volume intérieur commun des conjuguées considérées.

52. *Détermination du nombre de chacune des périodes que doit comprendre l'intégrale.* — Il est évident que nous ne saurions prétendre à donner une formule de ce nombre; il s'agit seulement d'indiquer un caractère auquel on puisse reconnaître que la période est achevée.

Nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit précédemment des périodes réelles, dont la théorie est plus simple, et auxquelles d'ailleurs s'appliquera ce que nous avons à dire des périodes imaginaires.

La période imaginaire peut se clore de plusieurs manières différentes : la partie imaginaire de l'intégrale, qui s'accroît à mesure que la courbe B s'éloigne de la surface réelle, atteint la valeur du demi-volume intérieur de l'une des conjuguées fermées, au moment où cette courbe, se réduisant à un point, a parcouru dans son entier l'un des hémisphères de la conjuguée, séparés par la surface diamétrale qu'elle a en commun avec la surface réelle.

A partir de l'instant où se serait passé le fait que nous supposons, en général, la courbe B en reprenant des dimensions finies, retrancherait une partie du volume imaginaire déjà engendré, la demi-période achevée se perdrait petit à petit, et la partie imaginaire de l'intégrale pourrait redevenir nulle au moment où la courbe B repasserait sur la surface réelle.

Mais la demi-période achevée pourra se conserver lorsque le point, où se réduit la courbe B, se trouvera sur la limite commune des deux hémisphères, parce que la courbe B, en reprenant des dimensions finies, pourra se transporter de l'un sur l'autre hémisphère.

Alors les parties équivalentes des deux hémisphères étant parcourues successivement par la courbe B toujours dans le même ordre, chaque demi-période achevée s'ajoutera aux précédentes, et la partie imaginaire de l'intégrale pourra atteindre à un multiple quelconque du volume intérieur de la conjuguée.

D'autres circonstances peuvent donner lieu à l'accumulation des périodes : ainsi, si la courbe B, tournant comme autour d'un axe fixe, toujours dans le même sens, décrivait une même conjuguée, chaque fois qu'elle viendrait se confondre avec la courbe de contact de la conjuguée avec la surface réelle, il faudrait compter une période de plus.

Dans le cas où la courbe B, toujours animée du même mouvement, aurait tous ses points consécutifs sur des conjuguées contigües, chaque fois qu'elle viendrait se confondre avec une ligne réelle, il faudrait compter une période de plus.

Enfin, si tous les points de la courbe B ne passaient pas simultanément sur la surface réelle, quand cependant ils y auraient tous passé, il faudrait compter une période de plus.