

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

H. MOLINS

**Sur les lignes de courbure et les lignes géodésiques des surfaces  
développables dont les génératrices sont parallèles à celles  
d'une surface réglée quelconque**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 4 (1859), p. 347-365.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1859\\_2\\_4\\_347\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4_347_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR  
LES LIGNES DE COURBURE ET LES LIGNES GÉODÉSIQUES  
DES SURFACES DÉVELOPPABLES  
DONT LES GÉNÉRATRICES SONT PARALLÈLES A CELLES  
D'UNE SURFACE RÉGLÉE QUELCONQUE;

PAR M. H. MOLINS,

Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse.

On sait qu'on peut tracer sur une surface développable deux groupes rectangulaires de lignes géodésiques, et qu'il existe une infinité de groupes pareils; c'est ce que l'on voit immédiatement en concevant que la surface soit développée sur un plan, auquel cas deux groupes rectangulaires de lignes géodésiques se transforment en deux groupes rectangulaires de droites parallèles. Ce sont ces systèmes de lignes dont nous nous proposons d'exposer quelques propriétés qui mettront en évidence les rapports remarquables qui existent entre les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces développables. Parmi les résultats auxquels nous arrivons, nous citerons les suivants : 1° l'arête de rebroussement d'une surface développable est une ligne géodésique du lieu de ses centres de courbure, et ce lieu se trouve être la surface polaire de chacune des lignes de courbure de cette surface; 2° étant donnés deux systèmes orthogonaux de lignes géodésiques d'une surface développable, si l'on prend une ligne quelconque de l'un de ces systèmes pour arête de rebroussement d'une autre surface développable, toutes celles de l'autre système sont les lieux des centres de courbure de cette seconde surface, relatifs à ses diverses lignes de courbure; et si l'on prend les lignes de chaque système pour arêtes de rebroussement d'autant de surfaces développables, il en résulte deux systèmes orthogonaux de surfaces développables, qui sont tels, que deux surfaces de systèmes différents se coupent suivant une

courbe qui est une ligne de courbure de chaque surface; 3° aux points où deux lignes géodésiques de systèmes différents rencontrent une même génératrice de la surface qui les contient, les angles de contingence et de torsion de l'une sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de l'autre, quelle que soit cette génératrice : d'ailleurs, en ces mêmes points, les tangentes des deux lignes sont perpendiculaires entre elles.

Nous commençons par déterminer, sous forme intégrable, les équations d'une ligne de courbure quelconque d'une surface développable dont les génératrices sont parallèles à celles d'une surface réglée qu'on suppose connue, ce qui nous conduit à des formules très-simples qui donnent, en grandeur et en direction, le rayon de courbure de cette ligne.

1. Considérons donc une surface réglée quelconque, gauche ou développable, et supposons qu'on connaisse la loi à laquelle est soumise la direction des génératrices de cette surface. Ainsi, en désignant par  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles que fait une génératrice quelconque avec trois axes coordonnés rectangulaires, admettons que  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  sont des fonctions connues d'une variable indépendante  $t$ ; si nous posons

$$(1) \quad \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = u, \quad \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = v,$$

les quantités  $u$  et  $v$  seront aussi des fonctions connues de  $t$ . Cherchons d'abord les équations générales des courbes dont les tangentes seraient parallèles aux génératrices de la surface donnée.

Soient  $x, y, z$  les coordonnées d'un point quelconque d'une de ces courbes, lequel répondra à une certaine génératrice de la surface donnée, et par conséquent à une certaine valeur de  $t$  : ces trois quantités sont donc des fonctions de  $t$ , qu'il s'agit de déterminer; désignons-les par  $Ft, ft, \varphi t$ , de sorte que l'on ait

$$(2) \quad x = Ft, \quad y = ft, \quad z = \varphi t.$$

Lorsque ces fonctions seront connues, on obtiendra les équations de la courbe en éliminant  $t$  entre les équations (2).

Si nous représentons, pour abréger, par  $G$  le radical

$$\sqrt{(F't)^2 + (f't)^2 + (\varphi't)^2},$$

pris avec l'un ou avec l'autre des signes  $\pm$ , les quantités

$$\frac{F't}{G}, \quad \frac{f't}{G}, \quad \frac{\varphi't}{G}$$

seront les cosinus des angles que fait avec les axes la tangente de la courbe au point  $(x, y, z)$ ; et comme cette tangente doit être parallèle à la génératrice correspondante de la surface donnée, nous poserons les trois équations

$$\frac{F't}{G} = \cos \alpha, \quad \frac{f't}{G} = \cos \beta, \quad \frac{\varphi't}{G} = \cos \gamma,$$

d'où

$$\frac{F't}{\varphi't} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad \frac{f't}{\varphi't} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma},$$

ou bien, en vertu des équations (1),

$$\frac{F't}{\varphi't} = u, \quad \frac{f't}{\varphi't} = v.$$

On déduit de là

$$F't = u\varphi't, \quad f't = v\varphi't;$$

donc, en intégrant, et remplaçant  $\varphi't dt$  par  $d\varphi$ , on aura

$$Ft = \int u d\varphi + C, \quad ft = \int v d\varphi + C',$$

$C$  et  $C'$  étant deux constantes arbitraires. Il vient alors, en substituant ces expressions dans les équations (2),

$$(3) \quad x = \int u d\varphi + C, \quad y = \int v d\varphi + C', \quad z = \varphi t.$$

Ce sont là les expressions de  $x, y, z$  en fonction de  $u, v$  et de la quantité  $\varphi t$ , qui reste une fonction de  $t$  entièrement arbitraire.

En différentiant les équations (3), on obtient

$$(4) \quad dx = u d\varphi, \quad dy = v d\varphi, \quad dz = d\varphi;$$

par suite, en désignant par  $s$  un arc de la courbe compté à partir d'un point fixe et aboutissant au point  $(x, y, z)$ ,

$$ds = \sqrt{u^2 + v^2 + 1} d\varphi,$$

ou bien,

$$(5) \quad ds = \frac{d\varphi}{\cos \gamma},$$

d'où

$$(6) \quad s = \int \frac{d\varphi}{\cos \gamma} + K,$$

$K$  étant une nouvelle constante arbitraire dont la valeur dépendra, dans chaque cas, du choix du point fixe pris pour origine des arcs. Au moyen des équations (4) et (5), on vérifie immédiatement que l'on a

$$\frac{dx}{ds} = u \cos \gamma, \quad \frac{dy}{ds} = v \cos \gamma, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma,$$

ou bien, en vertu des équations (1),

$$(7) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma;$$

ce qui montre que la tangente de la courbe au point  $(x, y, z)$  est bien parallèle à la droite dont la direction est déterminée par les angles  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Si l'on faisait  $\varphi' t = \cos \gamma$ , les équations (3) et (6) deviendraient, en mettant pour  $u$  et  $v$  leurs valeurs données par les équations (1),

$$x = \int \cos \alpha dt + C, \quad y = \int \cos \beta dt + C', \quad z = \int \cos \gamma dt + C'', \\ s = t + K,$$

$C''$  étant une nouvelle constante arbitraire.

2. Cherchons les angles de contingence et de torsion de la courbe que nous venons de déterminer; nous désignerons par  $\varepsilon$  et  $\omega$  ces deux angles, par  $\rho$  le rayon de courbure, par  $\lambda, \mu, \nu$  les angles qu'il fait avec

les axes. Il vient d'abord

$$\cos \lambda = \frac{\rho}{ds} d \frac{dx}{ds}, \quad \cos \mu = \frac{\rho}{ds} d \frac{dy}{ds}, \quad \cos \nu = \frac{\rho}{ds} d \frac{dz}{ds},$$

ou bien, en remplaçant  $\frac{\rho}{ds}$  par  $\frac{1}{\varepsilon}$ , et ayant égard aux formules (7),

$$(8) \quad \cos \lambda = \frac{1}{\varepsilon} d \cos \alpha, \quad \cos \mu = \frac{1}{\varepsilon} d \cos \beta, \quad \cos \nu = \frac{1}{\varepsilon} d \cos \gamma,$$

relations qui, ajoutées ensemble, après qu'on les a élevées au carré, donnent la formule

$$(9) \quad \varepsilon = \sqrt{(d \cos \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \cos \gamma)^2},$$

on en déduit

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{(d \cos \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \cos \gamma)^2}},$$

ou bien, en mettant pour  $ds$  sa valeur donnée par la formule (5),

$$\rho = \frac{d\varphi}{\cos \gamma \sqrt{(d \cos \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \cos \gamma)^2}}.$$

Pour obtenir  $\omega$ , on différencie deux fois de suite les équations (4), ce qui donne

$$\begin{aligned} d^2 x &= u d^2 \varphi + du d\varphi, & d^2 y &= v d^2 \varphi + dv d\varphi, & d^2 z &= d^2 \varphi, \\ d^3 x &= u d^3 \varphi + 2 du d^2 \varphi + d^2 u d\varphi, & d^3 y &= v d^3 \varphi + 2 dv d^2 \varphi + d^2 v d\varphi, \\ & & d^3 z &= d^3 \varphi; \end{aligned}$$

par suite, on trouve les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} d^2 y d^3 z - d^2 z d^3 y &= dv d\varphi d^3 \varphi - 2 dv d^2 \varphi^2 - d^2 v d\varphi d^2 \varphi, \\ d^2 z d^3 x - d^3 x d^2 z &= - du d\varphi d^3 \varphi + 2 du d^2 \varphi^2 + d^2 u d\varphi d^2 \varphi, \\ d^2 x d^3 y - d^2 y d^3 x &= (u dv - v du) (2 d^2 \varphi^2 - d\varphi d^3 \varphi) \\ &\quad + (u d^2 v - v d^2 u) d\varphi d^2 \varphi + (d u d^2 v - d v d^2 u) d\varphi^2. \end{aligned}$$

Multipliant ces expressions par  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , dont les valeurs sont déter-



déterminer; la surface développable dont il s'agit de chercher les lignes de courbure, est le lieu des tangentes de cette courbe. Soient  $M, M'$  deux points consécutifs de  $AB$ , répondant à  $t$  et  $t + dt$ ,  $MT$  la tangente en  $M$ ,  $M'T'$  la tangente en  $M'$ ; l'élément  $MM'$  est égal à  $ds$ , que nous supposons positif, pour fixer les idées, en admettant que les arcs positifs soient comptés de  $A$  vers  $B$ . La surface développable dont  $AB$  est l'arête de rebroussement, se compose de deux nappes, dont l'une contient les parties de tangentes  $MT, M'T'$ , et l'autre leurs prolongements  $MN, M'N'$ : considérons, par exemple, cette dernière nappe, et soient  $N, N'$  les points où une ligne de courbure quelconque  $CD$  rencontre les génératrices  $MN, M'N'$ ; comme les lignes de courbure d'une surface développable coupent à angle droit ses diverses génératrices, l'élément  $NN'$  doit être perpendiculaire à  $MN$ . Appelons  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées du point  $N$  qui sur la ligne de courbure répond au point  $M$  de la courbe  $AB$ , ou à la valeur de  $t$  relative à ce dernier point,  $s$ , l'arc de la même ligne compté à partir d'un point fixe et aboutissant au point  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\omega_1$  ses angles de contingence et de torsion,  $\rho_1$  son rayon de courbure,  $p$  la longueur de la partie de génératrice  $MN$ ; ces diverses quantités sont des fonctions de  $t$  qu'il faut déterminer.

La quantité  $p$  représentant la longueur de la partie de génératrice  $MN$  comprise entre le point de contact  $M$  et la ligne de courbure, il s'ensuit que  $p + dp$  représente  $M'N'$ ; on a donc

$$M'N' = p + dp.$$

Mais l'élément  $NN'$  étant perpendiculaire à  $MN$ , on a encore, aux infiniment petits du second ordre près,

$$M'N' = M'N = MN + MM' = p + ds,$$

par suite,

$$(11) \quad dp = ds, \quad \text{ou} \quad dp = \frac{d\varphi}{\cos \gamma},$$

d'où

$$(12) \quad p = s + K', \quad \text{ou} \quad p = \int \frac{d\varphi}{\cos \gamma} + K',$$

$K'$  étant une constante arbitraire dont les valeurs particulières répondront aux diverses lignes de courbure de la surface.



Cela posé, la partie MT de la tangente en M à la courbe AB faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$ , son prolongement MN fera, avec les mêmes axes, des angles ayant pour cosinus  $-\frac{dx}{ds}$ ,  $-\frac{dy}{ds}$ ,  $-\frac{dz}{ds}$ , et l'on aura

$$\frac{x_1 - x}{p} = -\frac{dx}{ds}, \quad \frac{y_1 - y}{p} = -\frac{dy}{ds}, \quad \frac{z_1 - z}{p} = -\frac{dz}{ds},$$

d'où

$$(13) \quad \begin{cases} x_1 = x - p \frac{dx}{ds}, \\ y_1 = y - p \frac{dy}{ds}, \\ z_1 = z - p \frac{dz}{ds}. \end{cases}$$

Si à la place de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $p$  on met leurs valeurs en fonction de  $t$ , données par les équations (3) et (12), et qu'on ait égard aux équations (7), les équations (13) deviennent

$$\begin{aligned} x_1 &= \int u d\varphi - \left( \int \frac{d\varphi}{\cos \gamma} + K' \right) \cos \alpha + C, \\ y_1 &= \int v d\varphi - \left( \int \frac{d\varphi}{\cos \gamma} + K' \right) \cos \beta + C', \\ z_1 &= \varphi t - \left( \int \frac{d\varphi}{\cos \gamma} + K' \right) \cos \gamma, \end{aligned}$$

et en éliminant  $t$  entre ces dernières équations, on tomberait sur deux équations en  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , qui seraient celles de la ligne de courbure correspondante à la valeur particulière attribuée à  $K'$ .

4. Des équations (13) on déduit, par la différentiation,

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx - dp \frac{dx}{ds} - p d \frac{dx}{ds}, \\ dy_1 &= dy - dp \frac{dy}{ds} - p d \frac{dy}{ds}, \\ dz_1 &= dz - dp \frac{dz}{ds} - p d \frac{dz}{ds}, \end{aligned}$$

expressions qui se simplifient, en remarquant que  $dp = ds$ , et qui devient

$$(14) \quad \begin{cases} dx_1 = -pd \frac{dx}{ds}, \\ dy_1 = -pd \frac{dy}{ds}, \\ dz_1 = -pd \frac{dz}{ds}. \end{cases}$$

On en déduit

$$ds_1 = p \sqrt{\left(d \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dz}{ds}\right)^2},$$

ou bien

$$(15) \quad ds_1 = p \varepsilon,$$

d'où

$$s_1 = \int p \varepsilon + K_1,$$

$K_1$  étant une constante arbitraire. Par cette dernière formule, on voit que la rectification des lignes de courbure dépend de deux quadratures successives, dont la première déterminerait  $p$ , comme le montre la formule (12), et dont la seconde déterminerait  $\int p \varepsilon$ .

On arrive, au reste, immédiatement à l'expression de  $ds_1$ , en considérant le triangle rectangle  $NN'M'$ , car ce triangle donne

$$NN' \text{ ou } ds_1 = M'N' \times \sin NM'N',$$

et, en remplaçant  $M'N'$  par  $p + dp$ , l'angle  $NM'N'$  par  $\varepsilon$ , puis négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on tombe visiblement sur la formule (15).

Des équations (14) et (15), on déduit

$$\frac{dx_1}{ds_1} = -\frac{1}{\varepsilon} d \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy_1}{ds_1} = -\frac{1}{\varepsilon} d \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz_1}{ds_1} = -\frac{1}{\varepsilon} d \frac{dz}{ds},$$

ou bien

$$(16) \quad \frac{dx_1}{ds_1} = -\cos \lambda, \quad \frac{dy_1}{ds_1} = -\cos \mu, \quad \frac{dz_1}{ds_1} = -\cos \nu.$$

On en conclut que la tangente de la ligne de courbure au point  $(x_1, y_1, z_1)$  est parallèle au rayon de courbure de la courbe AB au point correspondant  $(x, y, z)$ . Dès lors l'angle de deux tangentes consécutives, ou l'angle de contingence de la première courbe, est égal à l'angle de deux rayons de courbure consécutifs de la seconde; comme on sait que ce dernier angle a pour valeur  $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$ , on aura la formule

$$(17) \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2},$$

par suite,

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}},$$

ou bien

$$(18) \quad \rho_1 = \frac{\rho \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}.$$

§. Désignons par  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  les angles que fait avec les axes le rayon de courbure  $\rho_1$ ; nous aurons

$$\cos \lambda_1 = \frac{\rho_1}{ds_1} d \frac{dx_1}{ds_1}, \quad \cos \mu_1 = \frac{\rho_1}{ds_1} d \frac{dy_1}{ds_1}, \quad \cos \nu_1 = \frac{\rho_1}{ds_1} d \frac{dz_1}{ds_1},$$

ou bien, en remplaçant  $\frac{\rho_1}{ds_1}$  par  $\frac{1}{\varepsilon_1}$ , ou par  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}$ , et ayant égard aux formules (16),

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda_1 = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} d \cos \lambda, \\ \cos \mu_1 = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} d \cos \mu, \\ \cos \nu_1 = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} d \cos \nu. \end{array} \right.$$

Comme  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$  sont déterminés par les formules (8), on connaîtra par les formules (19) la direction du rayon de courbure de la courbe CD au point N, et nous allons en déduire l'angle que fait ce rayon avec la génératrice MN de la surface développable. Soit G le centre du cercle osculateur de CD au même point N : l'angle dont il

s'agit est l'angle GNM, que nous désignerons par  $i$ ; nous aurons

$$\cos i = \cos \alpha \cos \lambda_1 + \cos \beta \cos \mu_1 + \cos \gamma \cos \nu_1,$$

ou bien, en substituant à  $\cos \lambda_1$ ,  $\cos \mu_1$ ,  $\cos \nu_1$  leurs valeurs,

$$\cos i = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} (\cos \alpha d \cos \lambda + \cos \beta d \cos \mu + \cos \gamma d \cos \nu).$$

Mais en différentiant les équations (8), on forme les expressions

$$d \cos \lambda = \frac{1}{\varepsilon} d^2 \cos \alpha - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} d \cos \alpha,$$

$$d \cos \mu = \frac{1}{\varepsilon} d^2 \cos \beta - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} d \cos \beta,$$

$$d \cos \nu = \frac{1}{\varepsilon} d^2 \cos \gamma - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} d \cos \gamma,$$

qui, substituées dans la précédente relation, donnent

$$\begin{aligned} \cos i = & - \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} (\cos \alpha d^2 \cos \alpha + \cos \beta d^2 \cos \beta + \cos \gamma d^2 \cos \gamma) \\ & + \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} (\cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma). \end{aligned}$$

En outre, si l'on différentie deux fois de suite la relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

on obtient ces deux autres

$$\cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma = 0,$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha d^2 \cos \alpha + \cos \beta d^2 \cos \beta + \cos \gamma d^2 \cos \gamma \\ + (d \cos \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \cos \gamma)^2 = 0, \end{aligned}$$

dont la dernière revient à

$$\cos \alpha d^2 \cos \alpha + \cos \beta d^2 \cos \beta + \cos \gamma d^2 \cos \gamma = - \varepsilon^2.$$

A l'aide de ces relations, on trouve que l'expression de  $\cos i$  devient

$$(20) \quad \cos i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}.$$

Cette formule très-simple détermine la position du rayon de courbure NG dans le plan mené suivant la génératrice MN perpendiculairement au plan tangent NM'N' de la surface développable.

On peut, au reste, la déduire immédiatement de la formule (18). Observons en effet que, la génératrice MN étant perpendiculaire à l'élément NN', le plan normal à la ligne de courbure en N doit passer par cette génératrice; pareillement, le plan normal en N' doit contenir la génératrice suivante M'N'. Dès lors l'intersection M'R de ces deux plans normaux consécutifs doit passer au point M'; et si du point N on mène une perpendiculaire sur M'R, le pied de cette perpendiculaire sera le centre G du cercle osculateur de la ligne CD en N. On forme ainsi un triangle rectangle M'NG, dans lequel on a

$$M'N = p + dp, \quad NG = \rho_1, \quad \text{l'angle } M'NG = i,$$

et qui donne

$$\cos i = \frac{\rho_1}{p},$$

aux infiniment petits près. Mettant pour  $\rho_1$  sa valeur déterminée par la formule (18), on retombe visiblement sur la formule (20).

Remarquons que, la génératrice MN et le rayon de courbure NG étant perpendiculaires à l'élément NN', il s'ensuit que l'angle MNG ou  $i$  mesure l'inclinaison du plan osculateur de la ligne de courbure sur le plan tangent correspondant de la surface développable, ou sur le plan osculateur de la courbe AB. La formule (20) détermine donc cette inclinaison, ou, ce qui revient au même, l'angle que fait chaque tangente MN de la courbe AB avec le plan osculateur correspondant de la ligne de courbure.

Remarquons encore que la formule (20) détermine aussi la position de l'intersection M'G de deux plans normaux consécutifs de la courbe CD, car l'angle GM'N que fait cette droite avec la génératrice M'N est le complément de l'angle  $i$ . Comme cette formule est indépendante de  $p$ , on en doit conclure qu'elle donne la même valeur pour l'angle GM'N, quelle que soit la position du point N sur la génératrice MN, c'est-à-dire pour toutes les lignes de courbure aux divers points où elles coupent cette droite; de sorte que l'intersection de deux plans

normaux consécutifs ou la génératrice de la surface polaire de la ligne de courbure, que détermine la formule (20), est la même, quelle que soit cette ligne. Nous arrivons donc à ce résultat, que les diverses lignes de courbure d'une surface développable ont la même surface polaire; la courbe AB est d'ailleurs située sur cette surface polaire.

6. L'angle de torsion  $\omega$ , de la ligne de courbure peut s'obtenir très-simplement à l'aide d'une relation que nous avons donnée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1<sup>re</sup> série, t. VIII, p. 386). Observons, en effet, que la courbe AB est une développée par rapport à la courbe CD; or la relation dont il s'agit est la suivante :

$$\omega = d \operatorname{arc} \sin \frac{\rho}{\rho_1},$$

dans laquelle  $\omega$  et  $\rho$  désignent l'angle de torsion et le rayon de courbure de la développante,  $\rho_1$  la quantité que nous avons représentée par  $p$ . Pour appliquer ici cette formule, nous n'avons donc qu'à y remplacer  $\omega$ ,  $\rho$  et  $\rho_1$  par  $\omega_1$ ,  $\rho_1$  et  $p$ , ce qui donne

$$\omega_1 = d \operatorname{arc} \sin \frac{\rho_1}{p},$$

ou bien, en mettant pour  $\rho_1$  sa valeur,

$$(21) \quad \omega_1 = d \operatorname{arc} \sin \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}.$$

Considérons la sphère osculatrice du troisième ordre de la ligne de courbure, et désignons par H la distance de son centre au plan osculateur de cette ligne en N; ce centre se trouve sur une perpendiculaire élevée au centre du cercle osculateur sur son plan, et est distant de ce dernier centre d'une quantité égale à H. Pour déterminer cette quantité, nous nous servirons d'une autre formule que nous avons donnée dans le même Mémoire (page 381), formule qui établit une relation entre l'angle de torsion d'une courbe quelconque, la différentielle de son rayon de courbure, et la distance du centre de la sphère osculatrice du troisième ordre au plan osculateur; en l'appliquant à la ligne de courbure, il vient

$$d\rho_1 = H\omega_1.$$

Substituant à  $\rho$ , et  $\omega$ , leurs valeurs données par les formules (18) et (21), nous avons

$$d \frac{p}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}}} = H \times d \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}}},$$

ou bien, en effectuant les différentiations, et réduisant,

$$dp - \frac{p \frac{\omega}{\varepsilon} d \frac{\omega}{\varepsilon}}{1 + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}} = -H \times \frac{d \frac{\omega}{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}}},$$

d'où

$$(22) \quad H = \frac{p \omega}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} - \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} \cdot \frac{dp}{\varepsilon d\omega - \omega d\varepsilon}.$$

Il ne resterait plus qu'à mettre pour  $p$  et  $dp$  leurs valeurs données par les formules (11) et (12).

La distance  $H$  étant déterminée, on en déduit immédiatement le rayon  $R$  de la sphère osculatrice, car on a visiblement

$$R = \sqrt{\rho_1^2 + H^2},$$

formule dans laquelle il faudrait substituer à  $\rho$ , et  $H$  leurs valeurs données par les formules (18) et (22).

7. Considérons maintenant le lieu des centres de courbure de la surface développable dont  $AB$  est l'arête de rebroussement. Imaginons une autre surface développable qui serait le lieu des normales de la première, menées aux divers points d'une de ses lignes de courbure  $CD$ ; les génératrices de la nouvelle surface sont visiblement coupées à angle droit par la même ligne de courbure, de sorte que cette ligne est à la fois une ligne de courbure de la nouvelle surface et de la première. Ainsi, l'arête de rebroussement  $A'B'$  de la nouvelle surface est une développée de la ligne de courbure de la première, et, par conséquent, elle est située sur la surface polaire de cette ligne, laquelle surface est également la surface polaire de toutes les autres lignes de courbure. L'arête  $A'B'$  étant le lieu des centres de courbure de la pre-

mière surface, relatifs aux divers points de la ligne de courbure CD, on est conduit, en étendant le résultat précédent à toutes les lignes de courbure, à conclure que le lieu des centres de courbure de la surface développable dont AB est l'arête de rebroussement, se confond avec la surface polaire commune à toutes les lignes de courbure de la même surface. On remarquera que AB étant une développée de CD, se trouve pareillement sur ce lieu des centres de courbure, et en est en même temps une ligne géodésique.

Les normales à la surface dont AB est l'arête de rebroussement, menées aux points N, N' de la ligne de courbure CD, doivent se couper en un certain point O situé sur l'intersection M'R de deux plans normaux consécutifs de cette ligne; de plus, la partie de normale NO est ce qu'on nomme le *rayon de courbure* de cette surface au point N, et ce rayon coïncide avec le rayon de courbure de la section principale, dont le plan passant par NN' est normal à la même surface; désignons cette longueur NO par  $q$ . L'angle des deux normales NO, N'O est égal à celui des plans tangents en N, N', lequel n'est autre chose que l'angle de torsion  $\omega$  de la courbe AB. Dès lors, en considérant le secteur circulaire infiniment petit NON', on a

$$NN' \text{ ou } ds_1 = q\omega,$$

ou bien, en vertu de la formule (15),

$$(23) \quad p\varepsilon = q\omega,$$

d'où, en mettant pour  $p$  sa valeur donnée par la formule (12),

$$q = \frac{\varepsilon}{\omega}(s + K').$$

On remarquera que la quantité  $q$  est, par rapport à l'arête de rebroussement A'B' de la surface développable passant par la courbe CD et normale à la première surface, ce qu'est la quantité  $p$  par rapport à l'arête AB de cette première surface; et de même que nous avons trouvé  $p = s + K'$ , nous trouverions

$$q = s_2 + K'',$$



en désignant par  $s_2$  un arc de la nouvelle arête  $A'B'$ , compté à partir d'un point fixe et aboutissant au point  $O$ , par  $K''$  une nouvelle constante arbitraire. Dès lors la formule (23) peut s'écrire ainsi :

$$\frac{s + K'}{s_2 + K''} = \frac{\omega}{\varepsilon};$$

les constantes  $K'$ ,  $K''$  doivent être déterminées de telle manière que, si l'on considère un point quelconque  $N$  de la courbe  $CD$ , on ait

$$s + K' = NM, \quad s_2 + K'' = NO.$$

Observons que la droite  $MN$ , se trouvant perpendiculaire à l'élément  $NN'$  et à la droite  $NO$ , est normale à la nouvelle surface en  $N$ ; pareillement, la droite  $M'N'$  est normale à la même surface en  $N'$ . Comme ces deux normales se rencontrent en un point  $M'$  de la courbe  $AB$ , et que le même résultat a lieu pour deux normales consécutives quelconques, menées en deux points infiniment voisins de la courbe  $CD$ , on voit que la courbe  $AB$  est le lieu des centres de courbure de la nouvelle surface développable, relatifs aux divers points de  $CD$ , et que la partie  $NM'$  de la normale à la nouvelle surface en  $N$  est le rayon de courbure de la section principale de cette surface au même point  $N$ . La formule (23) montre donc que les rayons de courbure principaux  $p$  et  $q$  des deux surfaces développables, en un point quelconque  $N$  de leur intersection, sont entre eux dans le même rapport que les deux courbures de la courbe  $AB$ . Dès lors, en désignant par  $\varepsilon_2$ ,  $\omega_2$  les angles de contingence et de torsion de la courbe  $A'B'$ , on aura pareillement

$$q \varepsilon_2 = p \omega_2,$$

relation qui, comparée à la formule (23), conduit à cette autre

$$\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2}.$$

En outre, la formule (17) appliquée aux courbes  $CD$ ,  $A'B'$ , donne

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\omega_2^2 + \varepsilon_2^2};$$

de cette relation et de la précédente, on déduit

$$\varepsilon_2 = \omega \cdot \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}}, \quad \omega_2 = \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}},$$

et puisque  $\varepsilon_1 = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}$ , on en conclut  $\varepsilon_2 = \omega$ ,  $\omega_2 = \varepsilon$ , de sorte que les courbes AB, A'B' sont telles, que l'angle de contingence de l'une est égal à l'angle de torsion de l'autre, et réciproquement. C'est, au reste, ce que montre immédiatement l'inspection de la figure; car, par exemple, l'angle de contingence  $\varepsilon_2$  ou NON' de la courbe A'B' est égal à l'angle de deux plans tangents menés en N, N' à la surface dont AB est l'arête de rebroussement; or ces plans ne sont autre chose que deux plans osculateurs consécutifs de la courbe AB, et, par conséquent, leur angle est égal à  $\omega$ .

8. La courbe CD étant une ligne de courbure de la surface développable dont A'B' est l'arête de rebroussement, on voit, en appliquant une des propriétés établies dans le paragraphe précédent, que le lieu des centres de courbure de cette surface se confond avec la surface polaire de sa ligne de courbure CD, laquelle surface est commune à cette ligne et à toutes les autres lignes de courbure. Il en résulte que le lieu des centres de courbure est le même pour les deux surfaces développables dont AB, A'B' sont les arêtes de rebroussement.

Ce résultat n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général. Observons, en effet, que les courbes AB, A'B' étant des développées de la courbe CD, sont aussi des lignes géodésiques par rapport à la surface polaire de cette dernière courbe; or on peut regarder cette surface comme une surface développable donnée, auquel cas AB serait une ligne géodésique quelconque de cette surface; on voit alors, en considérant la surface développable dont AB serait l'arête de rebroussement, que le lieu des centres de courbure de cette nouvelle surface ne serait autre chose que la surface développable donnée. Supposons, par exemple, que la surface donnée soit une surface cylindrique, ses lignes géodésiques seront des hélices, et les surfaces développables qui auront ces hélices pour arêtes de rebroussement, seront des hélicoïdes développables; donc le lieu des centres de courbure d'un hélicoïde développable est la surface cylindrique qui contient l'arête de rebrous-

sement de l'hélicoïde, et dont les génératrices sont coupées par cette courbe sous un angle constant.

Les droites  $MN$ ,  $ON$  sont les tangentes des courbes géodésiques  $AB$ ,  $A'B'$  aux points  $M$ ,  $O$  où ces courbes coupent une génératrice quelconque  $M'R$  de la surface qu'on s'est donnée; or ces tangentes se coupent évidemment à angle droit, et, par conséquent, elles font avec  $M'R$  des angles complémentaires  $NM'O$ ,  $NOM'$ . Ces deux courbes sont donc telles que, l'une étant une ligne géodésique quelconque, l'autre se trouve déterminée de manière à couper chaque génératrice sous un angle complémentaire de celui sous lequel la première la coupe. Il en résulte que ces lignes géodésiques se coupent à angle droit, car en un point, qu'on leur suppose commun, passe une certaine génératrice, et ce point est celui où elles rencontrent cette génératrice, de sorte que les tangentes menées en ce point aux deux courbes sont perpendiculaires entre elles. Ces mêmes lignes sont les arêtes de rebroussement de deux surfaces développables qui se coupent à angle droit suivant une courbe  $CD$  qui est une ligne de courbure commune aux deux surfaces; de plus, les angles de contingence et de torsion de  $AB$  sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de  $A'B'$ .

Remarquons que, à une même ligne géodésique  $AB$  d'une surface développable, correspondent une infinité de lignes telles que  $A'B'$ , puisqu'il y a autant de courbes déterminées comme  $A'B'$  qu'il y a de lignes de courbure telles que  $CD$  sur la surface développable dont  $AB$  est l'arête de rebroussement. Pareillement à la ligne géodésique  $A'B'$ , correspondent une infinité de lignes géodésiques telles que la courbe  $AB$ , et possédant les propriétés que nous avons reconnues à cette courbe. On peut dès lors imaginer que l'on ait tracé sur la surface donnée deux systèmes de lignes géodésiques, dont l'un comprendra toutes celles de l'espèce  $AB$ , et l'autre toutes celles de l'espèce  $A'B'$ : chaque ligne d'un quelconque de ces systèmes sera telle, que si on la prend pour arête de rebroussement d'une surface développable, toutes celles de l'autre système seront les lieux des centres de courbure de cette surface, relatifs à ses diverses lignes de courbure. Ces deux systèmes possèdent les propriétés suivantes: 1° aux points où deux lignes de ces systèmes coupent une même génératrice de la surface qui les contient, les tan-

gentes de ces lignes sont parallèles ou perpendiculaires, selon qu'elles appartiennent à un même système ou à des systèmes différents; 2° si deux lignes appartiennent à des systèmes différents, les angles de contingence et de torsion de l'une sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de l'autre; 3° une ligne quelconque d'un système coupe à angle droit toutes celles de l'autre système.

Cette dernière propriété appartient aussi, comme on sait, aux deux systèmes de lignes de courbure d'une surface quelconque; mais, tandis que le lieu des normales de la surface, menées aux divers points d'une ligne de courbure, forme une surface développable, il n'en est pas de même, en général, pour le lieu des normales passant aux divers points d'une ligne géodésique, car ces normales se confondent avec les rayons de courbure de cette ligne, qui est ordinairement à double courbure, et le lieu des rayons de courbure d'une courbe à double courbure est toujours une surface gauche. Les deux systèmes de lignes géodésiques d'une surface développable donnent donc lieu à deux systèmes correspondants de surfaces gauches, qui sont les lieux des normales passant aux divers points de chacune de ces lignes; et l'on voit que deux quelconques de ces surfaces gauches appartenant à des systèmes différents, se coupent suivant une normale commune, et que leurs plans tangents sont à angle droit au point d'intersection des lignes géodésiques qui leur servent de directrices.