JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 5\left(z^2 + t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 47-48.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__47_0>

SUR LA FORME $x^2+y^2+5(z^2+t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Il est clair que la forme $x^2+y^2+5(z^2+t^2)$, dans laquelle x, y, z, t sont des entiers quelconques, zéro compris, ne peut pas représenter le nombre 3; mais je dis qu'il n'y a pas d'autre exception, en sorte que, pour tout nombre m différent de 3, on peut poser

$$m = x^2+y^2+5(z^2+t^2).$$

Cela est d'abord facile à constater pour les petits nombres 1, 2, 4, etc., et je suppose la vérification faite jusqu'au nombre 20. La forme citée étant une de celles qui se reproduisent par la multiplication, nous savons que dès que la représentation a lieu pour certains nombres, elle a lieu également pour leurs puissances et leurs produits. Ainsi, quand α et β ne sont pas nuls tous deux à la fois, on peut être assuré que

$$2^\alpha.5^\beta.3,$$

qui peut s'écrire

$$2^{\alpha-1}.5^\beta.6,$$

ou

$$2^\alpha.5^{\beta-1}.15,$$

est comme les nombres 2, 5, 6 et 15 exprimable par la forme qui nous occupe. En général, on n'est jamais gêné par les facteurs 2 et 5 qui peuvent se trouver dans le nombre m; il ne reste dès lors à traiter que le cas de m impair et premier à 5, et l'on peut même supposer $m > 20$, d'après ce qu'on a dit plus haut.

Cela posé, j'observe que si m est de l'une des trois formes

$$8\mu+1,\quad 8\mu+5,\quad 8\mu+7,$$

$5m$ sera de l'une des trois formes

$$8\nu+5,\quad 8\nu+1,\quad 8\nu+3.$$

et, par conséquent, s'exprimera par une somme de trois carrés. Or dans l'équation

$$5m = u^2 + v^2 + w^2,$$

où m est premier à 5, un seul des trois nombres u, v, w peut être divisible par 5, et il faut évidemment qu'un d'entre eux le soit. On peut donc écrire

$$5m = u^2 + v^2 + 25z^2,$$

u et v étant premiers à 5. Mais alors $u^2 + v^2$ devra être divisible par 5 et donner un quotient de la forme $x^2 + y^2$. Il s'ensuit que

$$m = x^2 + y^2 + 5z^2,$$

ce qui rentre bien dans l'équation générale

$$m = x^2 + y^2 + 5(z^2 + t^2),$$

en y prenant $t = 0$.

Si m est de la forme $8\mu + 3$, le raisonnement doit être un peu modifié. On observera qu'alors $m - 20$ est de la forme $8\nu + 7$, et reste d'ailleurs premier à 5, en sorte que la conclusion ci-dessus s'applique à $m - 20$. On peut donc poser, dans ce cas,

$$m - 20 = x^2 + y^2 + 5z^2,$$

d'où

$$m = x^2 + y^2 + 5(z^2 + 2^2),$$

ce qui complète notre démonstration.

Des considérations semblables s'appliquent à d'autres formes quadratiques dont nous pourrons parler une autre fois.