JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 153-266.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__153_0>

MÉMOIRE

SUR

L'EMPLOI D'UN NOUVEAU SYSTÈME DE VARIABLES

DANS

L'ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DES SURFACES COURBES;

PAR M. OSSIAN BONNET.

Dans l'analyse appliquée à la géométrie, on définit, en général, une surface par une équation entre les trois coordonnées rectangles de ses différents points; toutefois il est presque évident à priori qu'il y aurait de grands avantages à substituer aux coordonnées trois autres variables liées d'une manière plus intime à la forme de la surface. Je me propose, dans ce Mémoire, d'exposer une théorie complète des surfaces *courbes* (non développables) fondée sur la considération des variables qui servent à fixer la position du plan tangent. Mon travail se compose de deux parties : la première contient les formules générales relatives aux lignes géodésiques, aux lignes de courbure, aux rayons de courbure des sections normales, etc., et plusieurs applications simples, qui déjà mettent en évidence l'utilité de ces formules. La seconde partie est consacrée à la recherche de certaines classes de surfaces parmi lesquelles je citerai les surfaces dont un des rayons de courbure principaux est constant, les surfaces d'étendue minimum, les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. La plupart de ces surfaces ont été étudiées par Monge, mais l'emploi des formules établies dans la première partie facilite d'une manière remarquable les intégrations et l'interprétation géométrique des résultats obtenus.

Soit une surface S rapportée à trois axes rectangulaires, et considérons un de ses points M ayant ξ, η, ζ pour coordonnées. Si nous appelons α, β, γ les angles que la normale MN, menée à la surface S par le point M, fait avec les parties positives des axes, et δ la distance de l'origine au plan tangent, nous aurons pour l'équation de ce dernier plan

$$(1) \qquad X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \delta,$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes. Dans cette équation, il entre quatre variables $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, δ, mais les trois premières sont liées, comme on sait, par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

On laisse cette condition de côté en posant

$$\cos\alpha = \sin\theta\cos\varphi, \quad \cos\beta = \sin\theta\sin\varphi, \quad \cos\gamma = \cos\theta,$$

ce qui donne pour l'équation (1)

$$(2) \qquad X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta = \delta,$$

et alors considérant δ comme une fonction de θ et de φ, on a l'équation générale des plans tangents à une surface déterminée quelconque. A la place de θ, φ, δ, on peut prendre trois autres variables liées d'une manière quelconque aux premières; voici le choix qui m'a semblé devoir conduire aux résultats les plus simples. Je conserve φ que j'appelle x, puis je pose

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = dy, \quad \text{ou} \quad \tang\frac{1}{2}\theta = e^y,$$

ce qui donne

$$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = \frac{2e^y}{1+e^{2y}} = \frac{1}{\frac{e^y+e^{-y}}{2}} = \frac{1}{\cos iy},$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{1}{2}\theta - \sin^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}} = \frac{i\,\frac{e^{-y}-e^y}{2i}}{\frac{e^{-y}+e^y}{2}} = i\tang iy,$$

i étant l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$; enfin je désigne par $-z$ l'expression $\frac{\delta}{\sin\theta} = \delta\cos iy$; de cette manière l'équation (2) se change en celle-ci

$$(3) \qquad X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = -z,$$

dans laquelle je considère z comme une fonction connue de x et de y.

Il ne sera pas inutile d'observer, avant d'aller plus loin, que x représente l'angle du plan mené par la normale MN parallèlement à l'axe des ζ avec le plan des (ξ, ζ); que y est le logarithme-tangente de la moitié de l'angle formé par la normale avec l'axe des ζ, et enfin que z est la distance de l'origine à la trace du plan tangent sur le plan des (ξ, η). De là il résulte que les points de la surface S pour lesquels x est constant, sont tels, que la normale en ces points est parallèle à un même plan conduit par l'axe des ζ, et que les points pour lesquels y est constant sont tels, que la normale en ces points fait le même angle avec l'axe des ζ. Nous donnerons, pour cette raison, à nos lignes coordonnées $x =$ constante, $y =$ constante, le nom de méridiens et de parallèles. Ajoutons encore que si, à l'exemple de Gauss, on rapporte les différents points de la surface S sur une sphère de rayon 1, en menant des rayons respectivement parallèles aux normales de la surface, l'équation en x et y qui définira une courbe quelconque tracée sur la surface, conviendra aussi à la transformée sphérique de cette courbe, pourvu que l'on considère x et y comme les variables dont je me suis servi au commencement de mon Mémoire sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, variables qui représentent la longitude et le logarithme-tangente du demi-complément de la latitude.

Montrons maintenant comment, de l'équation (3), qui définit tous les plans tangents à la surface considérée, on peut déduire les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de cette surface. Pour cela, observons qu'un point de la surface se trouve non-seulement dans le plan tangent mené par ce point, mais encore dans tous les plans tangents menés par les points infiniment voisins; donc ξ, η, ζ substitués respectivement à X, Y, Z doivent vérifier l'équation (3) et cette équation différentiée, soit par rapport à x, soit par rapport à y, en laissant X, Y, Z constants. Ainsi, si l'on pose

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

on a

$$\begin{aligned} \xi \cos x + \eta \sin x + \zeta i \sin i y &= -z, \\ \xi \sin x - \eta \cos x &= p, \\ \zeta \cos i y &= q. \end{aligned}$$

Telles sont les équations qui déterminent les coordonnées ξ, η, ζ ; nous les mettrons le plus souvent sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \xi\cos x + \eta\sin x = -z - i\,\mathrm{tang}\,iy.q, \\ \xi\sin x - \eta\cos x = p, \\ \zeta = \dfrac{q}{\cos iy}, \end{cases}$$

et quelquefois sous celle-ci

$$(4\ bis)\quad \begin{cases} r\cos(x-\omega) = -z - i\,\mathrm{tang}\,iy.q, \\ r\sin(x-\omega) = p, \\ \zeta = \dfrac{q}{\cos iy}, \end{cases}$$

en substituant les coordonnées polaires r et ω aux coordonnées rectangulaires ξ et η.

PREMIÈRE PARTIE.

FORMULES GÉNÉRALES DE LA THÉORIE DES SURFACES COURBES.

Les formules que l'on rencontre dans la théorie des surfaces peuvent être classées en deux catégories bien distinctes : celles de la première catégorie se rapportent aux éléments qui restent les mêmes lorsque l'on déforme la surface sans en changer l'étendue, telles sont les formules relatives aux longueurs des lignes qu'on peut tracer sur la surface, aux angles que font ces lignes, aux aires comprises entre ces lignes et enfin aux courbures que M. Liouville a appelées géodésiques; les formules de la seconde catégorie se rapportent aux éléments qui dépendent au contraire de la forme de la surface. Nous allons d'abord nous occuper des formules de la première catégorie.

I.

Évaluons l'élément linéaire de la surface, c'est-à-dire la distance ds de deux points infiniment voisins répondant aux valeurs x, y ; $x+dx$, $y+dy$ des variables indépendantes x et y. Si nous différentions les équations (4) en faisant varier x, y, ξ, η, ζ, il vient, après réductions,

$$(5)\quad \begin{cases} d\xi\cos x + d\eta\sin x = -\,i\,\mathrm{tang}\,iy\,[s\,dx + (t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q)\,dy], \\ d\xi\sin x - d\eta\cos x = (r + i\,\mathrm{tang}\,iy.q + z)\,dx + s\,dy, \\ \qquad d\zeta = \dfrac{1}{\cos iy}[s\,dx + (t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q)\,dy], \end{cases}$$

où l'on a

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t.$$

Faisant la somme des carrés membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & [(r + i\,\mathrm{tang}\,iy.q + z)\,dx + s\,dy]^2 \\ & + [s\,dx + (t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q)\,dy]^2 \end{aligned}$$

ou bien

$$(6)\quad \begin{cases} ds^2 = (u\,dx + v\,dy)^2 + (v\,dx + w\,dy)^2 \\ \qquad = (u^2 + v^2)\,dx^2 + 2v(u + w)\,dx\,dy + (v^2 + w^2)\,dy^2, \end{cases}$$

en posant

$$r + i\,\mathrm{tang}\,iy.q + z = u, \quad s = v, \quad t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q = w.$$

II.

Les quantités u, v, w doivent jouer dans la suite un très-grand rôle; nous ferons dès à présent remarquer deux de leurs propriétés. On a

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \dfrac{dv}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy.w, \\ \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dv}{dy} + i\,\mathrm{tang}\,iy.v; \end{cases}$$

puis, en se rappelant la troisième des équations (4),

$$(8)\quad \begin{cases} v = \cos iy \cdot \dfrac{d\zeta}{dx}, \\ w = \cos iy \cdot \dfrac{d\zeta}{dy}, \\ u = \displaystyle\int \left(\cos iy \cdot \frac{d^2\zeta}{dx^2} + i\sin iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}\right) dy. \end{cases}$$

III.

Les équations (7) sont caractéristiques, je veux dire que trois fonctions de x et de y qui, prises pour u, v, w, vérifient les équations (7), peuvent toujours être considérées comme se rapportant à une et à une seule surface. Pour le démontrer, je vais faire voir que si l'on se donne trois fonctions u, v, w satisfaisant aux équations (7), il sera possible de trouver une fonction z telle, que l'on ait

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + i \operatorname{tang} iy \cdot \frac{dz}{dy} + z = u,$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = v,$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + i \operatorname{tang} iy \cdot \frac{dz}{dy} = w.$$

En effet, les deux dernières équations reviennent à

$$\frac{d \cdot \dfrac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy}}{dx} = \frac{v}{\cos iy}, \qquad \frac{d \cdot \dfrac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy}}{dy} = \frac{w}{\cos iy};$$

donc, si z existe, $\dfrac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy}$ devra avoir pour différentielle totale $\dfrac{v\,dx + w\,dy}{\cos iy}$.

Cette propriété détermine à une constante près la valeur de $\dfrac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy}$, et cette valeur existe toujours, car, à cause de la seconde des équations (7), on a

$$\frac{d \cdot \dfrac{v}{\cos iy}}{dy} = \frac{d \cdot \dfrac{w}{\cos iy}}{dx}.$$

Posons donc

$$\frac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy} = \zeta + C,$$

nous déduirons de là

$$z = \int_0^y \zeta \cos iy\, dy - C i \sin iy + X,$$

X étant une fonction arbitraire de x; il faudra maintenant que X puisse être déterminée par la condition

$$\int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2}\cos iy\, dy + \int_0^y \zeta\cos iy\, dy + i\sin iy\,.\,\zeta + X'' + X = u,$$

ce qui exige que l'expression

$$u - \int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2}\cos iy\, dy - \int_0^y \zeta \cos iy\, dy - i\sin iy\,.\,\zeta$$

ne contienne que x, c'est-à-dire ait zéro pour dérivée relative à y; or on reconnaît que cela a lieu en vertu de la première des équations (7), en remarquant que

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\cos iy}, \quad \frac{d\zeta}{dy} = \frac{v}{\cos iy}.$$

Ainsi X existe, et sa valeur générale est d'ailleurs de la forme

$$X_1 - C'\cos x - C''\sin x,$$

C′ et C″ étant des constantes arbitraires; donc z existe aussi et a pour valeur générale

$$z_1 - C i\sin iy - C'\cos x - C''\sin x.$$

z étant connu, on n'a qu'à substituer sa valeur dans les équations (4) pour obtenir les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ des différents points de la surface. On remarquera sans peine que, quoique la valeur générale de z renferme trois constantes arbitraires, il n'y a cependant qu'une surface qui satisfasse à la question, car en portant les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont C′, C″, C, on fait disparaître ces trois constantes.

IV.

Reprenons le carré de l'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = (u^2 + v^2)\,dx^2 + 2v(u + w)\,dx\,dy + (v^2 + w^2)\,dy^2.$$

On en déduit immédiatement (voyez *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss)

$$dx\sqrt{u^2 + v^2}, \quad dy\sqrt{v^2 + w^2}$$

pour les éléments des lignes coordonnées $y =$ constante, $x =$ constante; puis en appelant ω l'angle que ces lignes font entre elles

$$\text{(9)} \qquad \cos\omega = \frac{v(u + w)}{\sqrt{(u^2 + v^2)(v^2 + w^2)}},$$

par suite

$$\text{(9)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin\omega &= \frac{uw - v^2}{\sqrt{(u^2 + v^2)(v^2 + w^2)}}, \\ \operatorname{tang}\omega &= \frac{uw - v^2}{v(u + w)}. \end{aligned} \right.$$

De là résulte que l'élément dA de la surface, compris entre quatre lignes coordonnées infiniment voisines, est

$$\text{(10)} \qquad dA = (uw - v^2)\,dx\,dy,$$

formule très-simple et débarrassée de radicaux qui rend commode dans le problème de la quadrature des surfaces l'emploi des variables x et y.

On peut observer, en passant, que $\cos\omega$ ne devient nul que pour $v = 0$ ou bien pour $u + w = 0$, Or, comme on le verra plus bas, la condition $v = 0$ convient aux surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont dans des plans parallèles; la condition

$$u + w = 0$$

définit les surfaces d'étendue minimum. Ce n'est donc que pour les deux classes de surfaces dont nous venons de parler que les méridiens et les parallèles peuvent se couper à angle droit.

V.

Soit maintenant

$$mdx + ndy = 0$$

l'équation différentielle d'une ligne quelconque tracée sur la surface S, et appelons φ l'angle que cette ligne fait avec les méridiens $x =$ constante; nous aurons

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \omega)} = \frac{n\sqrt{u^2 + v^2}}{m\sqrt{v^2 + w^2}},$$

ou

$$\frac{(v^2 + w^2)\sin\varphi}{v(u + w)\sin\varphi - (uw - v^2)\cos\varphi} = \frac{n}{m},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{n(uw - v^2)}{nv(u + w) - m(v^2 + w^2)}.$$

VI.

Appliquons, en particulier, le résultat précédent aux lignes

$$udx + vdy = 0$$

et

$$vdx + wdy = 0.$$

Nous trouvons pour la première

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{v}{w},$$

et pour la seconde

$$\operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{w}{v}.$$

On conclut de là que les lignes

$$udx + vdy = 0, \quad vdx + wdy = 0$$

forment deux systèmes orthogonaux; mais l'équation

$$v dx + w dy = 0,$$

en remplaçant v et w par les valeurs que fournissent les équations (8), se réduit à

$$\frac{d\zeta}{dx} dx + \frac{d\zeta}{dy} dy = 0$$

ou

$$\zeta = \text{constante};$$

donc les courbes

$$v dx + w dy = 0$$

sont les lignes de niveau de la surface par rapport au plan des (ξ, η); par conséquent, les courbes

$$u dx + v dy = 0$$

sont les lignes de plus grande pente par rapport au même plan des (ξ, η).

VII.

Nous substituerons, dans la suite, à l'angle φ qu'une ligne fait avec les méridiens $x =$ constante, l'angle θ formé avec les lignes de plus grande pente, $u dx + v dy = 0$. Les lignes trigonométriques de ce nouvel angle sont d'ailleurs faciles à obtenir. En effet, on a

$$\theta = \varphi - \varphi_1,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi_1}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1},$$

et en remplaçant $\operatorname{tang}\varphi$ et $\operatorname{tang}\varphi_1$ par leurs valeurs

$$(11) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{un - vm}{vn - wm},$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin\theta &= \frac{un - vm}{\sqrt{(u^2 + v^2) n^2 - 2v(u + w) mn + (v^2 + w^2) m^2}}, \\ \cos\theta &= \frac{vn - wm}{\sqrt{(u^2 + v^2) n^2 - 2v(u + w) mn + (v^2 + w^2) m^2}}. \end{aligned} \right.$$

On peut mettre ces résultats sous une autre forme : appelons ds l'arc de la courbe considérée, compris entre le point (x, y) et le point infiniment voisin $(x + dx,\ y + dy)$, nous aurons

$$\frac{dx}{n} = \frac{dy}{-m} = \frac{ds}{\sqrt{(u^2+v^2)n^2 - 2v(u+w)mn + (v^2+w^2)m^2}},$$

d'où

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \tang\theta &= \frac{u\,dx + v\,dy}{v\,dx + w\,dy}, \\ \sin\theta &= u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds}; \\ \cos\theta &= v\frac{dx}{ds} + w\frac{dy}{ds}. \end{aligned}\right.$$

Remarquons encore les formules

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{u\cos\theta - v\sin\theta}{w\sin\theta - v\cos\theta}, \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{w\sin\theta - v\cos\theta}{uw - v^2}, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{u\cos\theta - v\sin\theta}{uw - v^2}, \end{aligned}\right.$$

qui se déduisent sans peine des précédentes.

VIII.

Afin de montrer immédiatement par une application simple l'utilité des formules précédentes, cherchons les trajectoires orthogonales d'une série de lignes tracées sur la surface S. Soit

$$m\,dx + n\,dy = 0$$

l'équation différentielle sans constante arbitraire qui représente toutes les lignes considérées; la première des équations (11) donne

$$\frac{un - vm}{vn - wm}$$

pour la tangente de l'angle que les lignes données font avec les lignes de plus grande pente, puis la première des équations (12) montre que

$$\frac{u\,dx + v\,dy}{v\,dx + w\,dy}$$

représente la tangente de l'angle sous lequel les lignes cherchées coupent les mêmes lignes de plus grande pente. Or le produit de ces deux tangentes doit être égal à -1; on a donc

$$(un - vm)(udx + vdy) + (vn - wm)(vdx + wdy) = 0$$

pour l'équation différentielle des trajectoires orthogonales.

Si les lignes considérées, au lieu d'être définies par leur équation différentielle, étaient données par l'angle θ sous lequel ces lignes coupent les lignes de plus grande pente, on trouverait d'une manière analogue que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\sin\theta(udx + vdy) + \cos\theta(vdx + wdy) = 0$$

ou bien

$$(14)\qquad (u\sin\theta + v\cos\theta)\,dx + (v\sin\theta + w\cos\theta)\,dy = 0.$$

IX.

Je vais maintenant m'occuper de la courbure géodésique; et d'abord j'établirai une formule importante qui fait connaître cette courbure dans le cas général où les lignes coordonnées sont tout à fait quelconques.

Soient u et v les deux variables indépendantes au moyen desquelles on fixe la position des différents points de la surface, et supposons l'élément linéaire ds de la surface déterminé par l'égalité

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}dv^2.$$

Considérons deux séries de lignes orthogonales représentées respectivement par les équations

$$\alpha = \text{constante},\quad \beta = \text{constante}.$$

Posons

$$d\alpha = m\,du + n\,dv, \quad d\beta = p\,du + q\,dv,$$

nous aurons, k étant un certain facteur,

$$\frac{1}{k}(\mathrm{E}n - \mathrm{F}m) = p, \quad \frac{1}{k}(\mathrm{F}n - \mathrm{G}m) = q,$$

d'où

$$\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2 = \frac{k^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}(\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2).$$

Or s et t étant les arcs des courbes $\alpha =$ constante, $\beta =$ constante, on a, d'après une formule connue (*voyez* mon Mémoire sur la théorie générale des surfaces, XXXII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*) pour la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_\alpha}$ des courbes $\alpha =$ constante,

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{d_\alpha d_\beta s}{d_\beta s . d_\alpha t},$$

où la caractéristique d_α indique les différentielles prises en laissant β constant et en faisant varier α de $d\alpha$, et la caractéristique d_β les différentielles prises en laissant α constant et faisant varier β de $d\beta$; mais

$$d_\beta s = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,d\beta}{\sqrt{\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2}}, \quad d_\alpha t = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,d\alpha}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}},$$

donc

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{\sqrt{\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2}\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}{(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)\,d\alpha}\, d_\alpha . \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2}},$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}{k\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,d\alpha}\, d_\alpha . \frac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}.$$

D'ailleurs

$$d_\alpha . \frac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}} = \frac{d . \dfrac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{du}\, d_\alpha u + \frac{d . \dfrac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{dv}\, d_\alpha v.$$

puis

$$md_\alpha u + nd_\alpha v = d\alpha,$$

$$pd_\alpha u + qd_\alpha v = 0,$$

d'où

$$d_\alpha u = \frac{-q\,d\alpha}{np - mq} = \frac{-(\mathrm{F}n - \mathrm{G}m)\,d\alpha}{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2},$$

$$d_\alpha v = \frac{p\,d\alpha}{np - mq} = \frac{(\mathrm{E}n - \mathrm{F}m)\,d\alpha}{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2};$$

on a donc encore

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{E}n - \mathrm{F}m}{k}\,\dfrac{d\cdot\dfrac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{dv} \\ -\dfrac{\mathrm{F}n - \mathrm{G}m}{k}\,\dfrac{d\cdot\dfrac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{du} \end{array}\right\},$$

ou bien enfin

$$(15)\quad \frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\left[\frac{d\cdot\dfrac{\mathrm{E}n - \mathrm{F}m}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{dv} - \frac{d\cdot\dfrac{\mathrm{F}n - \mathrm{G}m}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{du}\right],$$

en observant que

$$\frac{d\cdot\frac{1}{k}(\mathrm{E}n - \mathrm{F}m)}{dv} = \frac{d\cdot\frac{1}{k}(\mathrm{F}n - \mathrm{G}m)}{du}.$$

X.

Dans le système de variables que nous employons, la formule (15) devient, en reprenant nos anciennes notations,

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{uw - v^2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\cdot\dfrac{(u^2+v^2)\,n - v\,(u+w)\,m}{\sqrt{(u^2+v^2)\,n^2 - 2v\,(u+w)\,mn + (v^2+w^2)\,m^2}}}{dy} \\ -\dfrac{d\cdot\dfrac{v\,(u+w)\,n - (v^2+w^2)\,m}{\sqrt{(u^2+v^2)\,n^2 - 2v\,(u+w)\,mn + (v^2+w^2)\,m^2}}}{dx} \end{array}\right\}.$$

Or ds étant, comme plus haut, l'arc de la courbe compris entre le point (x, y) et le point infiniment voisin $(x + dx, y + dy)$, nous avons trouvé

$$\frac{dx}{ds} = \frac{n}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{-m}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}};$$

donc on a

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{uw - v^2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\cdot\left[(u^2 + v^2)\dfrac{dx}{ds} + v(u + w)\dfrac{dy}{ds}\right]}{dy} \\ - \dfrac{d\cdot\left[v(u + w)\dfrac{dx}{ds} + (v^2 + w^2)\dfrac{dy}{ds}\right]}{dx} \end{array}\right\},$$

ou, à cause des formules (12),

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{uw - v^2}\left[\frac{d(u\sin\theta + v\cos\theta)}{dy} - \frac{d(v\sin\theta + w\cos\theta)}{dx}\right],$$

c'est-à-dire, en développant,

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{uw - v^2}\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right)\sin\theta + \left(\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dw}{dx}\right)\cos\theta \\ + (u\cos\theta - v\sin\theta)\dfrac{d\theta}{dy} + (w\sin\theta - v\cos\theta)\dfrac{d\theta}{dx} \end{array}\right\},$$

et, en se rappelant les formules (7) et (13),

$$(16) \qquad \frac{ds}{\rho_\alpha} = i\,\mathrm{tang}\,iy\,dx + d\theta,$$

résultat d'une simplicité remarquable.

XI.

La formule (16) conduit immédiatement à plusieurs conséquences curieuses On voit que si deux des trois quantités $\frac{1}{\rho_\alpha}$, dx, $d\theta$ sont supposées nulles, la troisième le sera nécessairement. On a donc les trois théorèmes suivants :

Si une ligne géodésique tracée sur la surface S *est en même temps ligne méridienne, elle coupera sous un angle constant les lignes de niveau.*

Si une ligne géodésique tracée sur la surface S *coupe sous un angle constant les lignes de niveau, elle sera en même temps ligne méridienne.*

Si une ligne méridienne tracée sur la surface S *coupe sous un angle constant les lignes de niveau, elle sera en même temps ligne géodésique.*

Ceci posé, cherchons l'équation générale des surfaces sur lesquelles on peut tracer une série de lignes qui jouissent à la fois des trois propriétés d'être lignes géodésiques, d'être lignes méridiennes et de couper sous un angle constant les lignes de niveau. Si nous appelons θ l'angle sous lequel les lignes dont il s'agit coupent les lignes de plus grande pente, θ sera une fonction de x, et en même temps on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{v}{w} = \frac{\dfrac{d\zeta}{dx}}{\dfrac{d\zeta}{dy}},$$

donc on pourra poser

$$\frac{d\zeta}{dy} - \varphi(x)\frac{d\zeta}{dx} = 0,$$

d'où

$$\zeta = \mathrm{F}(y + \mathrm{X}),$$

X étant une fonction de x; par suite, d'après la troisième des équations (4)

$$z = \int \cos iy\,\mathrm{F}(y + \mathrm{X})\,dy + \mathrm{X}_1,$$

X_1 étant une nouvelle fonction de x. z étant connu en fonction de x et de y, la surface est déterminée.

XII.

Les lignes géodésiques sont celles dont la courbure géodésique est nulle : on a donc pour ces lignes l'équation

$$(17) \qquad i \operatorname{tang} iy\, dx + d\theta = 0,$$

à laquelle il faut joindre celle-ci

$$(13) \qquad (u \cos\theta - v \sin\theta)\, dx - (w \sin\theta - v \cos\theta)\, dy = 0,$$

qui a lieu pour toutes les lignes tracées sur la surface S. Les équations (17) et (13) paraissent devoir jouer un grand rôle dans la théorie importante des lignes géodésiques; c'est ce que je vais essayer de montrer, en appliquant ces équations à la solution de plusieurs questions de nature différente.

1°. On déduit d'abord des équations (17) et (13) un cas d'intégrabilité qui n'a pas, je crois, encore été remarqué. Supposons que les trois fonctions u, v, w ne dépendent que de y; éliminant dx entre les deux équations (17) et (13), nous aurons la suivante

$$(u \cos\theta - v \sin\theta)\, d\theta + i \operatorname{tang} iy\, (w \sin\theta - v \cos\theta)\, dy = 0,$$

qui ne contiendra que les deux variables θ et y. Je dis que cette dernière équation a pour intégrale

$$u \sin\theta + v \cos\theta = \text{constante}.$$

Il suffit, pour le démontrer, de faire voir que

$$\frac{du}{dy} = i \operatorname{tang} iy . w, \quad \frac{dv}{dy} = - i \operatorname{tang} iy . v.$$

Or cela est évident en vertu des relations (7).

Les surfaces pour lesquelles u, v, w sont fonctions de y seul sont faciles à déterminer. En effet, les équations (7) donnent sans peine, dans le cas dont il s'agit,

$$u = \mathrm{Y}, \quad v = m \cos iy, \quad w = \frac{\mathrm{Y}'}{i \operatorname{tang} iy},$$

Y étant une fonction arbitraire de y et m une constante; puis, en suivant la marche qui a été indiquée au § III, on trouve

$$z = - mxi \sin iy + \mathrm{Y}_1,$$

Y_1 étant une nouvelle fonction de y, liée à la première par la relation

$$Y = Y_1 + i \operatorname{tang} iy\, Y'_1;$$

z étant connu, on a enfin les coordonnées d'un point quelconque de la surface par les équations (4) ou par les équations (4 *bis*). Je dis maintenant que les surfaces que nous venons d'obtenir sont engendrées par le mouvement hélicoïdal autour de l'axe des ζ d'une courbe plane ou gauche quelconque. En effet, pour qu'une surface soit du genre hélicoïde, il faut et il suffit que lorsqu'on fait croître x de x_0 sans changer y, r reste constant, ω croisse de x_0 et ζ croisse de mx_0. Or, d'après les équations (4 *bis*), les deux premières conditions exigent : 1° que p ne contienne pas x et par conséquent que z soit de la forme $Yx + Y_1$; 2° que $Y + i \operatorname{tang} iy\, Y'$ soit nul et par conséquent que Y soit de la forme $-mi \sin iy$; d'ailleurs la troisième condition est satisfaite d'elle-même lorsque

$$Y = -mi \sin iy;$$

donc pour qu'une surface soit du genre hélicoïde, il faut et il suffit que

$$z = -mxi \sin iy + Y_1,$$

Y_1 étant une fonction arbitraire de y.

2°. Non-seulement les équations (17) et (13) facilitent, dans beaucoup de cas, la recherche des lignes géodésiques d'une surface donnée, mais elles servent surtout à déterminer une surface d'après quelque propriété relative à ses lignes géodésiques.

Cherchons, par exemple, les surfaces qui admettent comme lignes géodésiques toutes les lignes pour lesquelles l'angle θ formé avec les lignes de plus grande pente est une fonction connue de x et de y. L'équation (17) donnera

$$i \operatorname{tang} iy + \frac{d\theta}{dx} + \frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur déduite de la première des équations (13), on aura

$$(18)\quad \left(i \operatorname{tang} iy + \frac{d\theta}{dx}\right)(w \sin\theta - v \cos\theta) + \frac{d\theta}{dy}(u \cos\theta - v \sin\theta) = 0.$$

Si, au lieu de l'angle θ, on se donnait la tangente k de cet angle, l'équation du problème serait

$$\left[\frac{dk}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy\,(1 + k^2)\right](wk - v) + \frac{dk}{dy}(u - vk) = 0.$$

3°. L'équation précédente permet de démontrer très-simplement qu'il n'est pas possible de trouver sur une surface *courbe* deux séries de lignes géodésiques qui se coupent à angle droit; propriété remarquable que M. Liouville a indiquée pour la première fois dans ses Notes à l'*Analyse appliquée* de Monge. Supposons, en effet, qu'il existe sur une surface S deux séries de lignes géodésiques orthogonales entre elles. Appellons k_1 et k_2 les tangentes des angles sous lesquels ces lignes coupent respectivement les lignes de plus grande pente, nous aurons

$$\left[\frac{dk_1}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy\,(1 + k_1^2)\right](wk_1 - v) + \frac{dk_1}{dy}(u - vk_1) = 0,$$
$$\left[\frac{dk_2}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy\,(1 + k_2^2)\right](wk_2 - v) + \frac{dk_2}{dy}(u - vk_2) = 0,$$
$$k_1 k_2 = -1.$$

Je multiplie la première équation par $\frac{1}{k_1}$, la seconde par $\frac{1}{k_2}$ et j'ajoute, il viendra, eu égard à la troisième,

$$w\left[\frac{dk_1}{dx} + \frac{dk_2}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy\,(k_1^2 + k_2^2 + 2)\right] - v\left(\frac{dk_1}{dy} + \frac{dk_2}{dy}\right) = 0.$$

Multipliant ensuite la première équation par $\frac{1}{k_1^2}$, la seconde par $\frac{1}{k_2^2}$, et ajoutant, nous aurons

$$v\left[\frac{dk_1}{dx} + \frac{dk_2}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy\,(k_1^2 + k_2^2 + 2)\right] - u\left(\frac{dk_1}{dy} + \frac{dk_2}{dy}\right) = 0;$$

la comparaison de ces deux relations donne

$$uw - v^2 = 0.$$

Or cette équation ne peut convenir à aucune surface et définit seulement une ligne, comme nous le montrerons plus loin (deuxième partie, § V).

Il ne sera pas inutile d'observer que par le choix même de nos variables indépendantes x et y, nous excluons essentiellement de nos recherches le cas des surfaces développables, de sorte que le résultat que nous venons d'obtenir ne doit pas être étendu à ces surfaces; et, en effet, on sait qu'il est toujours possible de trouver sur une surface développable et cela d'une infinité de manières deux séries de lignes géodésiques orthogonales.

4°. Proposons-nous, maintenant, de trouver les trajectoires orthogonales d'une série de lignes géodésiques. Soit θ l'angle sous lequel les lignes géodésiques considérées coupent les lignes de plus grande pente, l'équation des trajectoires orthogonales cherchées sera, d'après ce que nous avons obtenu au § VIII,

$$(u\sin\theta + v\cos\theta)dx + (v\sin\theta + w\cos\theta)dy = 0.$$

Je dis que cette équation a pour premier membre une différentielle exacte. Il suffit, pour le prouver, de faire voir que

$$\frac{d(u\sin\theta + v\cos\theta)}{dy} = \frac{d(v\sin\theta + w\cos\theta)}{dx}.$$

Or en développant on trouve

$$\sin\theta\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + \cos\theta\left(\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dx}\right)$$
$$+ (u\cos\theta - v\sin\theta)\frac{d\theta}{dy} + (w\sin\theta - v\cos\theta)\frac{d\theta}{dx} = 0,$$

ou bien, en tenant compte des équations (7),

$$(u\cos\theta - v\sin\theta)\frac{d\theta}{dy} + (w\sin\theta - v\cos\theta)\left(\frac{d\theta}{dx} + i\operatorname{tang} iy\right) = 0,$$

ce qui a lieu en effet d'après l'équation (18). Ainsi l'équation en termes finis des trajectoires orthogonales cherchées est

$$(19)\qquad \int[(u\sin\theta + v\cos\theta)dx + (v\sin\theta + w\cos\theta)dy] = c.$$

5°. Évaluons l'arc infiniment petit d'une ligne géodésique quelconque, compris entre les deux trajectoires orthogonales qui répondent aux valeurs c et $c + dc$ de la constante c. Appelons ds la longueur de cet arc et x et y, $x + dx$ et $y + dy$ les valeurs de x et de y relatives à ses extrémités, nous aurons d'après les équations (13)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{w\sin\theta - v\cos\theta}{uw - v^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{u\cos\theta - v\sin\theta}{uw - v^2},$$

et d'après l'équation (19)

$$(u\sin\theta + v\cos\theta)\,dx + (v\sin\theta + w\cos\theta)\,dy = dc;$$

éliminant dx et dy, il vient après réductions

$$ds = dc,$$

d'où

$$s = c_1 - c_2,$$

s étant l'arc fini d'une ligne géodésique quelconque, compris entre les deux trajectoires orthogonales qui répondent aux valeurs c_1 et c_2 de la constante c. Nous obtenons ainsi le beau théorème de Gauss.

6°. Je vais enfin me servir des équations (17) et (13) pour établir un théorème que Jacobi a donné sans démonstration dans un des premiers volumes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et qui se rattache à la célèbre théorie du dernier multiplicateur. Le théorème dont je veux parler s'énonce ainsi : Si on est parvenu à trouver une intégrale première

$$\theta = f(x, y, \alpha)$$

des équations (17) et (13), on connaîtra le facteur qui rend intégrable l'équation du premier ordre obtenue en remplaçant θ par sa valeur dans l'équation (13); ce facteur sera d'ailleurs, dans le cas actuel, $\frac{d\theta}{d\alpha}$. Pour le prouver, il suffit de faire voir que l'on a

$$\frac{d\cdot\frac{d\theta}{d\alpha}(u\cos\theta - v\sin\theta)}{dy} + \frac{d\cdot\frac{d\theta}{d\alpha}(w\sin\theta - v\cos\theta)}{dx} = 0,$$

ou bien

$$\begin{gathered}\frac{d^2\theta}{d\alpha dy}(u\cos\theta - v\sin\theta) + \frac{d^2\theta}{d\alpha dx}(w\sin\theta - v\cos\theta)\\ - \frac{d\theta}{d\alpha}\frac{d\theta}{dy}(u\sin\theta + v\cos\theta) + \frac{d\theta}{d\alpha}\frac{d\theta}{dx}(w\cos\theta + v\sin\theta)\\ + \frac{d\theta}{d\alpha}\left(\frac{du}{dy}\cos\theta - \frac{dv}{dy}\sin\theta + \frac{dw}{dx}\sin\theta - \frac{dv}{dx}\cos\theta\right) = 0,\end{gathered}$$

ou bien encore, à cause des équations (7),

$$\begin{gathered}\frac{d^2\theta}{d\alpha dy}(u\cos\theta - v\sin\theta) + \frac{d^2\theta}{d\alpha dx}(w\sin\theta - v\cos\theta)\\ - \frac{d\theta}{d\alpha}\frac{d\theta}{dy}(u\sin\theta + v\cos\theta) + \frac{d\theta}{d\alpha}(w\cos\theta + v\sin\theta)\left(\frac{d\theta}{dx} + i\operatorname{tang} iy\right) = 0.\end{gathered}$$

Or, puisque $\theta = f(x, y, \alpha)$ est une intégrale des équations (17) et (13), on a, quels que soient x, y et α,

$$\left(\frac{d\theta}{dx} + i\operatorname{tang} iy\right)(w\sin\theta - v\cos\theta) + (u\cos\theta - v\sin\theta)\frac{d\theta}{dy} = 0.$$

Différentiant cette dernière équation par rapport à α, on tombe précisément sur la condition qu'il s'agit de vérifier.

XIII.

Je terminerai par quelques mots sur les systèmes de lignes orthogonales qui peuvent partager la surface en carrés infiniment petits. On sait que ces lignes, que je proposerai d'appeler *isométriques*, sont données en égalant à zéro l'élément linéaire de la surface (*voyez* un article de M. Liouville, t. XII de ce Journal); leur détermination dépend donc dans notre système de variables de l'intégration des deux équations

$$\begin{gathered}(u + iv)\,dx + (v + iw)\,dy = 0,\\ (u - iv)\,dx + (v - iw)\,dy = 0.\end{gathered}$$

Si $\alpha + i\beta$ est le facteur qui rend intégrable la première équation et par conséquent $\alpha - i\beta$ le facteur qui rend intégrable la seconde, les équations différentielles des deux systèmes de lignes considérées seront

$$(\alpha u - \beta v)\,dx + (\alpha v - \beta w)\,dy = 0,$$

$$(\alpha v + \beta u)\,dx + (\alpha w + \beta v)\,dy = 0,$$

et α et β satisferont aux deux relations

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d(\alpha u - \beta v)}{dy} &= \frac{d(\alpha v - \beta w)}{dx},\\ \frac{d(\alpha v + \beta u)}{dy} &= \frac{d(\alpha w + \beta v)}{dx},\end{aligned}\right.$$

qui, en développant et simplifiant au moyen des égalités (7), deviennent

$$\alpha i \operatorname{tang} iy . w + \beta i \operatorname{tang} iy . v = v\frac{d\alpha}{dx} - w\frac{d\beta}{dx} - u\frac{d\alpha}{dy} + v\frac{d\beta}{dy},$$

$$\beta i \operatorname{tang} iy . w - \alpha i \operatorname{tang} iy . v = w\frac{d\alpha}{dx} + v\frac{d\beta}{dx} - v\frac{d\alpha}{dy} - u\frac{d\beta}{dy}.$$

En cherchant l'angle θ sous lequel les lignes isométriques coupent les lignes de plus grande pente, on trouve pour les lignes du premier système

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{\beta}{\alpha},$$

et pour les lignes du second système

$$\operatorname{tang}\theta_2 = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ces deux résultats remarquables permettent de trouver simplement les équations aux différences partielles des surfaces qui admettent comme lignes isométriques deux systèmes de lignes orthogonales données, les deux systèmes de lignes de courbure, par exemple; mais ce sujet est trop vaste pour être traité ici avec l'importance qu'il mérite : je me propose d'y revenir dans une autre occasion. Je me contenterai, pour donner une idée de la marche à suivre, de considérer les surfaces qui admettent comme lignes isométriques les deux systèmes orthogonaux formés par les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente. On a alors $\beta = 0$, et les équations (20) deviennent

$$\frac{d(\alpha u)}{dy} = \frac{d(\alpha v)}{dx}, \quad \frac{d(\alpha v)}{dy} = \frac{d(\alpha w)}{dx};$$

la seconde, en remarquant que $v = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dx}$, $w = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}$, montre que $\alpha \cos iy$ est une fonction de ζ; on peut donc poser

$$\log \alpha = \int \varphi(\zeta)\,d\zeta - \log \cos iy,$$

et la première devient

$$i \operatorname{tang} iy . w = v\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dx} - u\left[\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dy} + i \operatorname{tang} iy\right],$$

d'où

$$u = \frac{\varphi(\zeta)\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 \cos iy - i \sin iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}}{\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dy} + i \operatorname{tang} iy}.$$

Différentiant par rapport à y après avoir remplacé u par sa valeur fournie par la troisième des équations (8), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left[\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dy} + i \operatorname{tang} iy\right]^2 \frac{d^2\zeta}{dx^2} - 2\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dx}\left[\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dy} + i \operatorname{tang} iy\right]\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}\\
&+\left[\varphi^2(\zeta)\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 - \operatorname{tang}^2 iy\right]\frac{d^2\zeta}{dy^2} + i \operatorname{tang} iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}\left[\varphi^2(\zeta) - \varphi'(\zeta)\right]\left[\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\right]\\
&-(1 + 2\operatorname{tang}^2 iy)\varphi(\zeta)\left[\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\right] + i \operatorname{tang} iy \cdot \frac{d\zeta}{dy} = 0.
\end{aligned}$$

Telle est l'équation aux différentielles partielles du second ordre des surfaces cherchées. Cette équation s'intégre dans plusieurs cas, comme nous le montrerons dans le travail annoncé.

XIV.

Nous allons maintenant nous occuper des formules relatives aux éléments tels que les lignes de courbure, les lignes asymptotiques, les rayons de courbure des sections normales, qui dépendent essentiellement de la forme de la surface.

Reprenons l'équation

$$(3) \qquad X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = -z$$

du plan tangent mené par le point M à la surface S. Si dans cette équation nous faisons varier x et y de quantités infiniment petites dx, dy sans changer d'ailleurs X, Y, Z, nous aurons

$$X\sin x dx - Y\cos x dx + Z\cos iy dy = p dx + q dy,$$

et cette équation, prise conjointement avec (3), représentera une tangente quelconque MT à la surface S au point M. Les cosinus des angles que cette tangente fait avec les axes sont proportionnels aux valeurs de X, Y, Z qui vérifient les équations

$$X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = 0,$$
$$X\sin x dx - Y\cos x dx + Z\cos iy dy = 0,$$

obtenues en négligeant les termes tout connus dans les équations de la tangente; par conséquent en appelant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ces cosinus, on a

$$\frac{\cos\alpha}{-i\sin iy\cos x dx - \sin x\cos iy dy} = \frac{\cos\beta}{-i\sin iy\sin x dx + \cos x\cos iy dy} = \frac{\cos\gamma}{dx}.$$

Cherchons maintenant la tangente MV conjuguée de MT. On sait, d'après un théorème de M. Dupin, que cette nouvelle tangente joint le point M au point infiniment voisin M' pour lequel les variables x, y sont $x + dx$, $y + dy$. Or $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ étant les coordonnées rectangles du point M', on a par les équations (5)

$$d\xi\sin x - d\eta\cos x = u dx + v dy,$$
$$d\xi\cos x + d\eta\sin x = -i\operatorname{tang} iy\,(v dx + w dy),$$
$$d\zeta = \frac{1}{\cos iy}(v dx + w dy);$$

de là on déduit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, qui sont proportionnels aux cosinus des angles formés par la tangente cherchée MV avec les axes des coordonnées

XV.

La connaissance de deux tangentes conjuguées quelconques conduit aisément à l'équation des lignes de courbure; il suffit d'exprimer que les deux tangentes conjuguées sont perpendiculaires entre elles, c'est-à-dire que

$$\cos\alpha\, d\xi + \cos\beta\, d\eta + \cos\gamma\, d\zeta = 0,$$

et il vient

$$(u dx + v dy)\, dy - (v dx + w dy)\, dx = 0,$$

ou

$$(21) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u - w}{v}\,\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Au moyen de cette équation on trouve ensuite l'angle θ sous lequel les lignes de courbure coupent les lignes de plus grande pente : en effet, les formules établies plus haut (§ VII) donnent

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{dx}{dy},$$

par conséquent, on a

$$\operatorname{tang}^2\theta + \frac{w - u}{v}\operatorname{tang}\theta - 1 = 0,$$

ou

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2v}{w - u}.$$

On pourrait aussi obtenir la courbure géodésique des lignes de courbure, mais l'expression en est compliquée.

Faisons quelques applications de l'équation (21). Cherchons d'abord les lignes de courbure de l'ellipsoïde. On a pour cette surface

$$z^2 = a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - c^2\sin^2 iy,$$

et par conséquent

$$zp = (b^2 - a^2)\sin x \cos x,$$

$$zq = -c^2 i \sin iy \cos iy,$$

$$zr = (b^2 - a^2)\cos^2 x - (b^2 - a^2)\sin^2 x - \frac{(b^2 - a^2)^2 \sin^2 x \cos^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - c^2\sin^2 iy},$$

$$zs = \frac{c^2(b^2 - a^2) i \sin iy \cos iy \sin x \cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - c^2\sin^2 iy},$$

$$zt = c^2\cos^2 iy - c^2\sin^2 iy + \frac{c^4\sin^2 iy\cos^2 iy}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - c^2\sin^2 iy},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{u - w}{v} = \frac{r - t + z}{s} = \frac{a^2b^2 - c^2\cos^2 iy(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x) - c^2\sin^2 iy(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{c^2(b^2 - a^2) i \sin iy \cos iy \sin x \cos x};$$

ce qui donne pour l'équation différentielle des lignes cherchées

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{a^2b^2 - c^2\cos^2 iy(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x) - c^2\sin^2 iy(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{c^2(b^2 - a^2) i \sin iy \cos iy \sin x \cos x}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Pour intégrer cette équation, je multiplie par $(i\sin iy\cos iy)^2$ et je fais

$$\cos^2 x = x_1, \quad \cos^2 iy = y_1,$$

j'obtiens

$$x_1(1 - x_1)\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + \left[\frac{a^2(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} + 2x_1y_1 - x_1 - y_1\right]\frac{dy_1}{dx_1} + y_1(1 - y_1) = 0.$$

Différentiant par rapport à x_1, il vient

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\left[2x_1(1 - x_1)\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{a^2(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} + 2x_1y_1 - x_1 - y_1\right] = 0,$$

ou simplement

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0,$$

de là on tire

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \alpha,$$

α étant une constante arbitraire. Ainsi les deux systèmes de lignes de courbure sont renfermés dans l'équation

$$x_1(1-x_1)\alpha^2+\left[\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^2(b^2-a^2)}+2x_1y_1-x_1-y_1\right]\alpha+y_1(1-y_1)=0,$$

qui, en rétablissant les variables x et y, devient

$$\alpha^2\sin^2x\cos^2x+\alpha\left[\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^2(b^2-a^2)}+2\cos^2x\cos^2iy-\cos^2x-\cos^2iy\right]$$
$$+\sin^2iy\cos^2iy=0.$$

Cherchons encore les lignes de courbure de la surface représentée par l'équation

$$z^m=\mathrm{A}\cos mx+\mathrm{B}\cos imy.$$

On a

$$z^{m-1}p=-\mathrm{A}\sin mx,$$
$$z^{m-1}q=-\mathrm{B}i\sin imy,$$
$$z^{m-1}r=-m\mathrm{A}\cos mx-\frac{(m-1)\mathrm{A}^2\sin^2mx}{\mathrm{A}\cos mx+\mathrm{B}\cos imy},$$
$$z^{m-1}s=-\frac{(m-1)\mathrm{AB}i\sin imy\sin mx}{\mathrm{A}\cos mx+\mathrm{B}\cos imy},$$
$$z^{m-1}t=m\mathrm{B}\cos imy+\frac{(m-1)\mathrm{B}^2\sin^2imy}{\mathrm{A}\cos mx+\mathrm{B}\cos imy};$$

de là on déduit

$$\frac{u-w}{v}=\frac{r-t+z}{s}=\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+2\mathrm{AB}\cos imy\cos mx}{\mathrm{AB}i\sin imy\sin mx},$$

ce qui donne pour l'équation différentielle des lignes cherchées

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+2\mathrm{AB}\cos imy\cos mx}{\mathrm{AB}i\sin imy\sin mx}\,\frac{dy}{dx}-1=0.$$

Pour intégrer cette équation, je multiplie par $(i\sin imy)^2$ et je fais

$$\cos mx=x_1,\quad \cos imy=y_1,$$

j'obtiens

$$(1-x_1^2)\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}{\mathrm{AB}}+2x_1y_1\right)\frac{dy_1}{dx_1}+(1-y_1^2)=0.$$

Différentiant par rapport à x_1, il vient

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\left[2(1-x_1^2)\frac{dy_1}{dx_1}+\frac{A^2+B^2}{AB}+2x_1y_1\right]=0,$$

ou simplement

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=0.$$

De là on tire

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\alpha,$$

α étant une constante arbitraire. Ainsi les deux systèmes de lignes de courbure sont renfermés dans l'équation

$$(1-x_1^2)\alpha^2+\left(\frac{A^2+B^2}{AB}+2x_1y_1\right)\alpha+1-y_1^2=0,$$

qui, en rétablissant les variables x et y, devient

$$\alpha^2\sin^2 mx+\alpha\left(\frac{A^2+B^2}{AB}+2\cos mx\cos imy\right)+\sin^2 imy=0.$$

Les surfaces que nous venons de considérer offrent un exemple de surfaces algébriques de tous les degrés qui ont pour lignes de courbure des lignes algébriques.

L'équation déjà si simple

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{u-w}{v}\frac{dy}{dx}-1=0 \tag{21}$$

des lignes de courbure d'une surface quelconque peut encore être simplifiée par un choix convenable de nouvelles variables. Posons

$$x+iy=2x_1,\quad x-iy=2y_1,$$

nous aurons d'abord

$$dx^2-dy^2=2(dx_1^2+dy_1^2),\quad i\,dx\,dy=dx_1^2-dy_1^2;$$

puis

$$r = \frac{r_1}{4} + \frac{2s_1}{4} + \frac{t_1}{4},$$

$$s = i\frac{r_1}{4} - i\frac{t_1}{4},$$

$$t = -\frac{r_1}{4} + \frac{2s_1}{4} - \frac{t_1}{4}$$

en appelant r_1, s_1, t_1 les dérivées secondes de z par rapport à x_1 et à y_1. Donc l'équation (21), qui peut s'écrire ainsi

$$s(dy^2 - dx^2) + (r - t + z)\,dx\,dy = 0,$$

deviendra

$$\frac{r_1 - t_1}{2}(dx_1^2 + dy_1^2) + \left(\frac{r_1 + t_1}{2} + z\right)(dx_1^2 - dy_1^2) = 0$$

ou bien

$$(r_1 + z)\,dx_1^2 = (t_1 + z)\,dy_1^2. \tag{22}$$

Posons encore

$$z = z_1 \cos x_1 \cos y_1,$$

il viendra

$$r_1 = \cos y_1 \left(\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}\cos x_1 - 2\frac{dz_1}{dx_1}\sin x_1 - z_1 \cos x_1\right),$$

$$t_1 = \cos x_1 \left(\frac{d^2 z_1}{dy_1^2}\cos y_1 - 2\frac{dz_1}{dy_1}\sin y_1 - z_1 \cos y_1\right),$$

et l'équation (22) prendra la forme

$$\cos y_1 \left(\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}\cos x_1 - 2\frac{dz_1}{dx_1}\sin x_1\right) dx_1^2$$

$$= \cos x_1 \left(\frac{d^2 z_1}{dy_1^2}\cos y_1 - 2\frac{dz_1}{dy_1}\sin y_1\right) dy_1^2,$$

ou bien celle-ci

$$\cos^2 y_1 \frac{d\left(\frac{dz_1}{dx_1}\cos^2 x_1\right)}{dx_1} dx_1^2 = \cos^2 x_1 \frac{d\left(\frac{dz_1}{dy_1}\cos^2 y_1\right)}{dy_1} dy_1^2.$$

De telle sorte qu'en faisant

$$\operatorname{tang} x_1 = x_2, \quad \operatorname{tang} y_1 = y_2,$$

on aura finalement

$$\frac{d^2 z_1}{dx_2^2} dx_2^2 = \frac{d^2 z_1}{dy_2^2} dy_2^2.$$

Cette dernière équation fait connaître de nombreuses classes de surfaces pour lesquelles la détermination des lignes de courbure se ramène aux quadratures. Nous nous bornerons à signaler les deux cas où l'on a

$$z_1 = \varphi(x_2) + \psi(y_2)$$

et

$$z_1 = \varphi(x_2)\psi(y_2).$$

XVI.

Reprenons les deux systèmes d'équations

$$\frac{\cos\alpha}{-i\sin iy\cos x\,dx - \sin x\cos iy\,dy} = \frac{\cos\beta}{-i\sin iy\sin x\,dx + \cos x\cos iy\,dy} = \frac{\cos\gamma}{dx},$$

$$\left\{\begin{aligned} d\xi\sin x - d\eta\cos x &= u\,dx + v\,dy,\\ d\xi\cos x + d\eta\sin x &= -i\,\mathrm{tang}\,iy\,(v\,dx + w\,dy),\\ d\zeta &= \frac{1}{\cos iy}(v\,dx + w\,dy),\end{aligned}\right.$$

qui définissent les directions de deux tangentes conjuguées quelconques MT et MV. Si, au lieu d'exprimer que les deux tangentes conjuguées sont perpendiculaires l'une à l'autre, comme nous l'avons fait pour obtenir les lignes de courbure, nous écrivons que ces tangentes coïncident, nous aurons l'équation différentielle des lignes asymptotiques; on trouve ainsi

$$(u\,dx + v\,dy)\,dx + (v\,dx + w\,dy)\,dy = 0,$$

ou

$$u\,dx^2 + 2v\,dx\,dy + w\,dy^2 = 0; \tag{23}$$

puis, pour l'angle θ formé avec les lignes de plus grande pente,

$$\mathrm{tang}\,\theta = -\frac{dy}{dx},$$

et par conséquent

$$w \operatorname{tang}^2\theta - 2v \operatorname{tang}\theta + u = 0.$$

L'équation (23) est un peu moins simple que celle à laquelle on est conduit lorsqu'on prend comme variables les coordonnées ordinaires, mais elle se prête mieux à certaines applications. Dans un travail spécial que j'espère pouvoir bientôt publier, je montrerai comment l'équation (23) permet de trouver les surfaces dont toutes les lignes asymptotiques sont des hélices.

XVII.

Cherchons l'angle de deux normales infiniment voisines, afin de pouvoir déterminer ensuite les rayons de courbure principaux. Soient M et M′ deux points infiniment voisins de la surface S. Les cosinus des angles que la normale en M fait avec les axes des ξ, η, ζ sont, en se rappelant la signification des variables x et y,

$$\frac{\cos x}{\cos iy}, \quad \frac{\sin x}{\cos iy}, \quad i \operatorname{tang} iy,$$

de même les cosinus des angles que la normale en M′ forme avec les mêmes axes, sont

$$\frac{\cos x}{\cos iy} + d\cdot\frac{\cos x}{\cos iy}, \quad \frac{\sin x}{\cos iy} + d\cdot\frac{\sin x}{\cos iy}, \quad i \operatorname{tang} iy + d.i \operatorname{tang} iy,$$

les différentielles se rapportant au déplacement de M en M′. Donc l'angle infiniment petit ω des deux normales en M et M′ est déterminé par la formule

$$\omega = \sqrt{\left(d\cdot\frac{\cos x}{\cos iy}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{\sin x}{\cos iy}\right)^2 + (d.i \operatorname{tang} iy)^2},$$

qui, en développant et simplifiant, devient

$$\omega = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\cos iy}.$$

XVIII.

Supposons maintenant que M et M' se trouvent sur une même ligne de courbure. Appelons R le rayon de courbure de la section principale tangente à cette ligne de courbure au point M et posons $MM' = ds$, nous aurons aussi

$$\omega = \frac{ds}{R};$$

par conséquent

$$R = \frac{\cos iy\, ds}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Mais l'équation (21), ou plutôt celle qui la précède, donne

$$\frac{u\,dx + v\,dy}{dx} = \frac{v\,dx + w\,dy}{dy} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

donc

$$(24) \qquad R = \cos iy\left(u + v\frac{dy}{dx}\right) = \cos iy\left(v\frac{dx}{dy} + w\right).$$

Telle est la relation qui lie la valeur de $\frac{dy}{dx}$ relative à une ligne de courbure et le rayon de courbure principal correspondant. En substituant la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de cette relation, dans l'équation (21) des lignes de courbure, on obtient pour les deux rayons de courbure principaux

$$(25) \qquad R^2 - (u + w)\cos iy\,.\,R + (uw - v^2)\cos^2 iy = 0.$$

XIX.

Si les deux points M et M' étaient pris sur une même ligne asymptotique, on aurait, en posant toujours $MM' = ds$,

$$-\frac{u\,dx + v\,dy}{dy} = \frac{v\,dx + w\,dy}{dx} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2 + dy}},$$

donc l'angle ω satisferait à la condition

$$\frac{ds}{\omega \cos iy} = v + w\frac{dy}{dx}.$$

Eliminant $\frac{dy}{dx}$ entre cette dernière équation et l'équation (23) des lignes asymptotiques, il vient

$$\left(\frac{\omega}{ds}\right)^2 = \frac{1}{(v^2 - uw)\cos^2 iy}.$$

Ainsi le rapport $\frac{\omega}{ds}$ a la même valeur absolue quand on prend l'élément ds à partir du même point M sur l'une et sur l'autre des deux lignes asymptotiques qui se croisent en ce point, et cette valeur absolue est, d'après l'équation (25), celle de la moyenne géométrique des courbures principales. Nous retrouvons ainsi un théorème fort utile dans la théorie des surfaces gauches et que nous avons donné pour la première fois dans le Mémoire sur la théorie générale des surfaces inséré au XXXII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

XX.

Ayant déterminé la direction des lignes de courbure et les rayons de courbure principaux en chaque point de la surface, on trouve sans difficulté le rayon de courbure d'une section normale quelconque. Toutefois il convient, pour éviter des calculs assez longs, de s'aider d'une certaine interprétation géométrique des résultats précédents, interprétation que nous allons d'abord indiquer.

Considérons le plan tangent à la surface S au point M et, dans ce plan, la section conique qui, par rapport à la tangente à la ligne de plus grande pente prise comme axe des X et à la tangente à la ligne de niveau prise comme axe des Y, a pour équation

$$uY^2 + 2vXY + wX^2 = 1. \tag{26}$$

Cherchons la direction des axes de cette section conique. En désignant par m la tangente de l'angle que l'un quelconque de ces axes fait avec l'axe des X, on a, d'après une formule connue,

$$m^2 + \frac{w-u}{v} m - 1 = 0;$$

ce qui prouve déjà que les axes de la section conique sont dirigés suivant les tangentes aux lignes de courbure ou aux sections principales.

Cherchons en second lieu la grandeur des axes. Soit $2a$ cette grandeur, a^2 sera le maximum ou le minimum de

$$X^2 + Y^2,$$

où X et Y varient de manière à toujours donner

$$uY^2 + 2vXY + wX^2 = 1.$$

Or, pour le maximum comme pour le minimum, on a

$$XdX + YdY = 0$$

et

$$(uY + vX)\,dY + (vY + wX)\,dX = 0;$$

de là on tire

$$\frac{X}{vY + wX} = \frac{Y}{uY + vX} = X^2 + Y^2 = a^2,$$

d'où

$$\frac{1}{a^2} - w = v\frac{Y}{X}, \quad \frac{1}{a^2} - u = v\frac{X}{Y},$$

par suite

$$\frac{1}{a^2} - w = mv, \quad \frac{1}{a^2} - u = \frac{v}{m},$$

m étant le coefficient angulaire de l'axe a.

Ce résultat, rapproché des égalités (24) et de cette autre $m = \frac{dx}{dy}$ obtenue plus haut, montre qu'en appelant $2a_1$ et $2a_2$ les longueurs des deux axes de la section conique, et R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux répondant aux lignes de courbure qui ont ces axes pour tangentes, on a

$$R_1 = \frac{\cos iy}{a_1^2}, \quad R_2 = \frac{\cos iy}{a_2^2}.$$

XXI.

Revenons maintenant à l'évaluation du rayon de courbure d'une section normale quelconque. Supposons la section conique que l'équation (26) représente, rapportée à ses axes comme axes de coordonnées; elle aura alors pour équation

$$R_1 X^2 + R_2 Y^2 = \cos iy.$$

Soit $2d$ le diamètre que fait l'angle $\frac{\varpi}{2} + \alpha$ avec l'axe des X, c'est-à-dire avec la tangente à la section principale qui répond au rayon de courbure principal R_1, nous aurons

$$d^2 (R_1 \sin^2 \alpha + R_2 \cos^2 \alpha) = \cos iy,$$

d'où

$$\frac{\cos iy}{d^2} = R_1 \sin^2 \alpha + R_2 \cos^2 \alpha;$$

mais ρ étant le rayon de courbure de la section normale qui fait l'angle α avec la section principale répondant au rayon de courbure R_1, on a, d'après la formule d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} = \frac{R_1 \sin^2 \alpha + R_2 \cos^2 \alpha}{R_1 R_2},$$

donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos iy}{R_1 R_2 d^2}$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{d^2 (uw - v^2) \cos iy},$$

en remarquant que, d'après l'équation (25),

$$R_1 R_2 = (uw - v^2) \cos^2 iy.$$

Telle est la relation qui existe entre le rayon de courbure ρ d'une section normale quelconque et la demi-longueur d du diamètre de la section conique (26), qui est perpendiculaire à la tangente à cette section principale. Cette relation conduit aisément à l'expression du rayon de courbure ρ. Appelons en effet θ l'angle que la tangente à la section normale considérée forme avec la tangente à la ligne de plus grande pente, c'est-à-dire avec l'axe des X du § XX; $\frac{\pi}{2}+\theta$ sera l'angle du diamètre $2d$ avec ce même axe des X, donc on aura, d'après l'équation (26),

$$d^2(u\cos^2\theta - 2v\sin\theta\cos\theta + w\sin^2\theta) = 1,$$

par suite

$$\frac{1}{\rho} = \frac{u\cos^2\theta - 2v\sin\theta\cos\theta + w\sin^2\theta}{(uw - v^2)\cos iy}. \tag{27}$$

On peut encore écrire, en se rappelant les formules (13),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\cos iy}\left(\frac{dy}{ds}\cos\theta + \frac{dx}{ds}\sin\theta\right), \tag{28}$$

$\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ se rapportant à la section normale considérée.

XXII.

Nous allons encore déterminer l'angle que le plan osculateur d'une ligne de courbure fait avec le plan tangent à la surface. Soit φ cet angle. Si R est le rayon de courbure principal correspondant à la ligne de courbure considérée, $R\sin\varphi$ représentera le rayon de courbure de cette ligne de courbure, d'après le théorème de Meunier; par conséquent $\frac{\cot\varphi}{R}$ sera la courbure géodésique de la même ligne : on aura donc, d'après l'équation (10),

$$\frac{\cot\varphi}{R}ds = i\,\mathrm{tang}\,iy\,dx + d\theta,$$

d'où

$$\cot\varphi = i\,\mathrm{tang}\,iy.R\frac{dx}{ds} + R\frac{d\theta}{ds}.$$

Or les deux équations

$$R = \cos iy\left(u + v\frac{dy}{dx}\right),$$

$$R = \cos iy\left(v\frac{dx}{dy} + w\right),$$

obtenues au § XVIII, donnent

$$R\frac{dx}{ds} = \cos iy\left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds}\right),$$

$$R\frac{dy}{ds} = \cos iy\left(v\frac{dx}{ds} + w\frac{dy}{ds}\right),$$

ou bien, à cause des équations (12),

$$R\frac{dx}{ds} = \cos iy\sin\theta,$$

$$R\frac{dy}{ds} = \cos iy\cos\theta.$$

On a donc encore

$$\cot\varphi = i\sin iy\sin\theta + \cos iy\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dy},$$

ou plus simplement

$$\cot\varphi = \cos^2 iy\cdot\frac{d\cdot\frac{\sin\theta}{\cos iy}}{dy}, \tag{29}$$

les différentielles se rapportant à un déplacement effectué sur la ligne de courbure.

XXIII.

La valeur de $\cot\varphi$ que nous venons d'obtenir permet de démontrer avec M. Joachimstal que toute ligne de courbure qui coupe la surface sous un angle constant est nécessairement plane. En effet, supposons $\cot\varphi$ constant; en intégrant l'équation précédente, il viendra

$$\frac{\sin\theta}{\cos iy} = C - i\tang iy\cot\varphi$$

ou

$$\sin\theta = C\cos iy - i\sin iy\cot\varphi,$$

et en changeant les constantes C et $\cot\varphi$ en deux autres m et y_0 d'une forme convenable

$$\sin\theta = mi\sin i(y - y_0).$$

Or, d'après ce qu'on a vu au § XV,

$$\tang\theta = \frac{dx}{dy},$$

on déduit de là

$$dx = \frac{mi\sin i(y - y_0)\,dy}{\sqrt{1 + m^2 - m^2\cos^2 i(y - y_0)}},$$

et en intégrant une seconde fois,

$$\cos(x - x_0) = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}\cos i(y - y_0),$$

x_0 étant une nouvelle constante. Cette équation convient non-seulement à la ligne de courbure, mais encore à la transformée sphérique de la ligne de courbure, d'après une remarque faite dans l'introduction; cette transformée sphérique est donc un cercle (*Journal de l'École Polytechnique,* XXXV[e] cahier, p. 124), par conséquent une courbe plane; donc la ligne de courbure qui a ses tangentes respectivement parallèles à celles de sa transformée sphérique, est aussi une courbe plane.

La réciproque du théorème de M. Joachimstal, d'après laquelle toute ligne de courbure plane coupe nécessairement la surface sous un angle constant, s'établirait en reprenant les mêmes calculs en sens inverse.

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHE DE QUELQUES SURFACES D'APRÈS CERTAINES PROPRIÉTÉS RELATIVES A LA COURBURE.

Pour montrer l'utilité des formules obtenues dans la première partie, nous allons appliquer ces formules à la solution de quelques problèmes. Les questions que nous considérons dans ce premier travail ont, pour la plupart, déjà été traitées par d'autres méthodes; mais nous espérons pouvoir montrer plus tard que nos formules se prêtent aussi bien à des recherches qu'il serait à peu près impossible d'aborder par les méthodes anciennes.

I. — Surfaces dont tous les points sont des ombilics.

Les rayons de courbure principaux d'une surface quelconque sont donnés par l'équation du second degré

$$R^2 - (u + w)\cos iy \,.\, R + (uw - v^2)\cos^2 iy = 0;$$

en exprimant l'égalité des racines, on a la condition

$$(u + w)^2 - 4(uw - v^2) = (u - w)^2 + 4v^2,$$

qui se décompose en ces deux-ci :

$$u = w, \quad v = 0.$$

Joignant à ces deux conditions les suivantes :

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} + i \operatorname{tang} iy \,.\, w,$$
$$\frac{dw}{dx} = \frac{dv}{dy} + i \operatorname{tang} iy \,.\, v,$$

que remplissent toujours les fonctions u, v, w, nous trouvons sans difficulté

$$u = w = \frac{m}{\cos iy}, \quad v = 0,$$

m étant une constante arbitraire. Les fonctions u, v, w étant connues, la surface est déterminée, et pour en avoir l'équation il suffit de suivre la marche qui a été indiquée au § III; on obtient ainsi

$$\zeta = - mi \operatorname{tang} iy,$$

en laissant de côté une première constante inutile, puis

$$z = m \cos iy + X,$$

puis

$$X = 0,$$

en laissant de côté deux nouvelles constantes sans importance; enfin, on a

$$\xi \cos x + \eta \sin x = -\frac{m}{\cos iy},$$

$$\xi \sin x - \eta \cos x = 0,$$

$$\zeta = -\frac{mi \sin iy}{\cos iy};$$

d'où, en faisant la somme des carrés membre à membre,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = m^2.$$

Ainsi la sphère est la seule surface dont tous les points soient des ombilics.

II. — Surfaces dont les rayons de courbure principaux sont constants.

M. J. Bertrand a démontré, par des considérations infinitésimales, que la sphère est la seule surface dont les deux rayons de courbure principaux soient constants; cette propriété résulte simplement de nos formules. En effet, pour que les deux rayons de courbure principaux d'une surface soient constants, il faut et il suffit que l'on ait

$$u + w = \frac{2a}{\cos iy},$$

$$uw - v^2 = \frac{b}{\cos^2 iy},$$

a et b étant des constantes. Éliminons u entre ces deux relations et les suivantes :

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} + i \operatorname{tang} iy . w,$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dv}{dy} + i \operatorname{tang} iy . v,$$

nous aurons

$$v^2 + w^2 - \frac{2aw}{\cos iy} = -\frac{b}{\cos^2 iy},$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} = \frac{2ai\sin iy}{\cos^2 iy} - i\operatorname{tang} iy \,.\, w,$$

$$\frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dy} = i\operatorname{tang} iy \,.\, v.$$

Posons

$$w - \frac{a}{\cos iy} = w_1,$$

il viendra

$$v^2 + w_1^2 = \frac{a^2 - b}{\cos^2 iy},$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{dw_1}{dy} = -i\operatorname{tang} iy \,.\, w_1,$$

$$\frac{dw_1}{dx} - \frac{dv}{dy} = i\operatorname{tang} iy \,.\, v,$$

ou bien, en faisant $v = \omega_1 \cos iy$, $w_1 = \omega_2 \cos iy$,

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{a^2 - b}{\cos^4 iy},$$

$$\frac{d\omega_1}{dx} + \frac{d\omega_2}{dy} = 0,$$

$$\frac{d\omega_1}{dy} - \frac{d\omega_2}{dx} = 0.$$

Lorsque $a^2 = b$, ces trois équations sont vérifiées pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, et l'on a une sphère. Je dis qu'il n'y a aucune solution lorsque a^2 est différent de b. En effet, dans ce cas on peut poser

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{a^2 - b}}{\cos^2 iy} \sin\alpha,$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{a^2 - b}}{\cos^2 iy} \cos\alpha;$$

α étant réel, car ω_1 et ω_2 sont réels. La première équation est ainsi satisfaite d'elle-même, et les deux autres deviennent

$$\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}+2i\,\mathrm{tang}\,iy\right)-\sin\alpha\frac{d\alpha}{dy}=0,$$

$$\cos\alpha\frac{d\alpha}{dy}+\sin\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}+2i\,\mathrm{tang}\,iy\right)=0;$$

d'où, en faisant la somme des carrés membre à membre,

$$\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dx}+2i\,\mathrm{tang}\,iy\right)^2=0,$$

et par conséquent, puisque α est réel,

$$\frac{d\alpha}{dy}=0,\quad \frac{d\alpha}{dx}+2i\,\mathrm{tang}\,iy=0,$$

ce qui est évidemment impossible.

III. — Surfaces dont les lignes de première courbure sont situées dans des plans parallèles.

Prenons pour plan des (ξ,η) celui auquel sont parallèles les plans des lignes de première courbure. Ces lignes seront alors les lignes de niveau par rapport au plan des (ξ,η); par conséquent l'équation (21),

$$v\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(u-w)\frac{dy}{dx}-v=0,$$

devra être vérifiée par la valeur de $\frac{dy}{dx}$ que l'on déduit de

$$vdx+wdy=0;$$

nous aurons donc

$$v(uw-v^2)=0,$$

et par conséquent

$$v=0,$$

car $uw-v^2$ ne peut pas être nul (*voyez* le § V). Cette condition prouve d'abord que l'on a pour les lignes de première courbure,

$$\frac{dy}{dx}=0\quad\text{ou}\quad y=\text{const.}$$

et pour les lignes de seconde courbure

$$\frac{dy}{dx} = \infty \quad \text{ou} \quad x = \text{const.}$$

Ainsi les lignes de courbure sont les parallèles et les méridiens. On voit de plus que les lignes de seconde courbure sont planes, comme les lignes de première courbure, et que leurs plans sont perpendiculaires à ceux des lignes de première courbure. Si maintenant on se rappelle que

$$\nu = \frac{d^2 z}{dx dy},$$

on trouve

$$z = X + Y,$$

X étant une fonction de x et Y une fonction de y. Puis on a

$$\begin{aligned} &\xi \cos x + \eta \sin x = -X - Y - i \operatorname{tang} iy . Y', \\ &\xi \sin x - \eta \cos x = X', \\ &\zeta = \frac{Y'}{\cos iy}, \end{aligned}$$

pour les équations qui déterminent les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface.

Il est facile de déduire des équations précédentes la génération de la surface. En effet, considérons une ligne de niveau caractérisée par la condition $y = \text{const.}$ La projection de cette ligne sur le plan des (ξ, η) a pour équations

$$\begin{aligned} &\xi \cos x + \eta \sin x = -X - Y - i \operatorname{tang} iy\, Y', \\ &\xi \sin x - \eta \cos x = X'; \end{aligned}$$

donc cette projection est une ligne parallèle à celle que définissent les équations

$$\begin{aligned} &\xi \cos x + \eta \sin x = -X, \\ &\xi \sin x - \eta \cos x = X', \end{aligned}$$

la distance des deux lignes étant d'ailleurs $Y + i \operatorname{tang} iy\, Y'$. On déduit de là que les sections faites dans la surface par tous les plans parallèles au plan des (ξ, η) sont en projection sur ce plan les développantes d'une même ligne. Par conséquent la surface est engendrée par une courbe tracée dans le plan tangent à un cylindre perpendiculaire au plan des (ξ, η), lorsqu'on enroule ce plan sur le cylindre.

Pour que la surface devienne de révolution, il faut et il suffit que les lignes de niveau soient des cercles; donc on doit avoir

$$X = 0,$$

par suite

$$z = Y,$$

et enfin

$$u = i \operatorname{tang} iy . Y' + Y, \quad w = Y'' + i \operatorname{tang} iy . Y'$$

Ces valeurs de u et de w, auxquelles il faut joindre la valeur zéro de v, montrent que dans le cas des surfaces de révolution l'intégration des équations qui fournissent les lignes asymptotiques, les lignes géodésiques, les lignes isométriques, etc., se ramène aux quadratures. Nous n'insisterons pas sur ces détails, qui sont parfaitement connus.

IV. — Surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite.

Lorsqu'une surface admet des génératrices rectilignes, ces génératrices sont évidemment des lignes asymptotiques; d'un autre côté, la transformée sphérique d'une ligne droite, quelle que soit la surface sur laquelle cette droite est tracée, ne peut être qu'un grand cercle, et doit, par conséquent, dans notre système de coordonnées, avoir pour équation

$$(30) \qquad \cos(x - \alpha) = \sin i\beta \sin iy,$$

α et β étant des constantes. Il suit de là que pour avoir l'équation des surfaces cherchées il suffit de regarder, dans l'équation précédente, β comme une fonction de α, de tirer de cette équation les valeurs de y et de $\frac{dy}{dx}$ et d'exprimer que les valeurs obtenues vérifient l'équation (23), c'est-à-dire

$$(23)\quad r + i\,\mathrm{tang}\,iy.q + z + 2s\frac{dy}{dx} + (t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

quels que soient x et α. Nous prendrons pour variables indépendantes x et α au lieu de x et de y. En appelant p_1 et r_1 les nouvelles dérivées première et seconde de z par rapport à x, on trouve aisément

$$p_1 = p + q\frac{dy}{dx},$$

$$r_1 = r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + q\frac{d^2y}{dx^2},$$

ce qui transforme l'équation (23) en celle-ci

$$r_1 + z + q\left[i\,\mathrm{tang}\,iy\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) - \frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0.$$

Mais de l'équation (30) on tire

$$-\sin(x-\alpha) = i\sin i\beta\cos iy\,\frac{dy}{dx},$$

$$\begin{aligned}-\cos(x-\alpha) &= \sin i\beta\sin iy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + i\sin i\beta\cos iy\,\frac{d^2y}{dx^2}\\ &= \cos(x-\alpha)\frac{dy^2}{dx^2} + \cos(x-\alpha)\,i\cot iy\,\frac{d^2y}{dx^2};\end{aligned}$$

d'où

$$i\,\mathrm{tang}\,iy\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) - \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

On a donc simplement

$$r_1 + z = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$z = \gamma\cos x + \delta\sin x,$$

γ et δ étant des fonctions de α. Ainsi l'équation en z, x et y de la surface cherchée est le résultat de l'élimination de α entre ces deux-ci :

$$z = \gamma \cos x + \delta \sin x,$$

$$\cos(x - \alpha) = \sin i\beta \sin iy,$$

où β, γ et δ sont des fonctions arbitraires de α.

Lorsque la surface réglée considérée est à plan directeur, les grands cercles transformés sphériques des génératrices rectilignes sont perpendiculaires à un même plan, et passent par conséquent par un même point. Si l'on suppose ce point sur l'axe des ζ, l'équation (30) se réduit à $x = \alpha$; on ne peut donc plus prendre x et α pour variables indépendantes, et le résultat précédent se trouve en défaut. Mais l'équation (23) devant être vérifiée par $\frac{dx}{dy} = 0$, on a alors

$$t + i \operatorname{tang} iy \,.\, q = 0,$$

d'où

$$z = X_1 + X_2 i \sin iy,$$

X_1 et X_2 étant deux fonctions arbitraires de x.

V. — Surfaces dont un des rayons de courbure principaux est constant.

Reprenons l'équation du second degré

$$R^2 - (u + w) \cos iy \,.\, R + (uw - v^2) \cos^2 iy = 0,$$

qui donne les rayons de courbure principaux d'une surface quelconque; si nous exprimons que l'une des racines est égale à la constante a, nous aurons

$$(31) \qquad a^2 - a(u + w) \cos iy + (uw - v^2) \cos^2 iy = 0,$$

ou bien

$$(u \cos iy - a)(w \cos iy - a) - v^2 \cos^2 iy = 0,$$

pour l'équation aux différentielles partielles secondes de la surface.

Changeons dans cette équation z en $z + a \cos iy$; il est facile de voir que v ne changera pas et que u et w augmenteront l'un et l'autre de $\frac{a}{\cos iy}$; nous aurons donc

$$(32)\qquad uw - v^2 = 0,$$

et c'est cette dernière équation qu'il suffira d'intégrer. Je l'écris ainsi

$$u = \frac{v^2}{w};$$

puis je différentie par rapport à y; en se rappelant les égalités (8), on trouve

$$\cos iy.\frac{d^2\zeta}{dx^2} + i\sin iy.\frac{d\zeta}{dy} = -\frac{i\sin iy\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}{\frac{d\zeta}{dy}} + \frac{2\cos iy.\frac{d\zeta}{dx}\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}}{\frac{d\zeta}{dy}} - \frac{\cos iy\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\frac{d^2\zeta}{dy^2}}{\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2};$$

ou bien

$$(33)\qquad q^2 r - 2pqs + p^2 t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q\,(p^2 + q^2) = 0,$$

en posant, pour ne pas multiplier les notations,

$$\frac{d\zeta}{dx} = p,\quad \frac{d\zeta}{dy} = q,\quad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = r,\quad \frac{d^2\zeta}{dx\,dy} = s,\quad \frac{d^2\zeta}{dy^2} = t.$$

L'équation (33) s'intègre aisément par la méthode de Monge; en effet, les équations de la caractéristique qui se réduisent ici à

$$q^2 dy^2 + 2pq\,dx\,dy + p^2 dx^2 = 0,$$
$$q^2\frac{dy}{dx}dp + p^2 dq + i\,\mathrm{tang}\,iy.q\,(p^2 + q^2)\,dy = 0,$$

admettent deux combinaisons intégrables et donnent

$$\zeta = c,$$
$$q = c'\cos iy.\sqrt{p^2 + q^2};$$

on a donc

$$q = \varphi(\zeta)\cos iy.\sqrt{p^2 + q^2},$$

ou mieux

$$q\sqrt{1 - \varphi^2(\zeta)\cos^2 iy} = p\,\varphi(\zeta)\cos iy,$$

pour l'intégrale première. D'autre part l'équation du premier ordre que l'on vient d'obtenir étant linéaire, si l'on pose, conformément à la méthode connue, les équations simultanées

$$\frac{dx}{\varphi(\zeta)\cos iy} = \frac{dy}{-\sqrt{1-\varphi^2(\zeta)\cos^2 iy}} = \frac{d\zeta}{0},$$

on trouve

$$\zeta = c, \quad x + c' = \arcsin\frac{\varphi(c)\, i\sin iy}{\sqrt{1-\varphi^2(c)}};$$

par conséquent, l'intégrale définitive est

$$\frac{\varphi(\zeta)\, i\sin iy}{\sqrt{1-\varphi^2(\zeta)}} = \sin[x + \varphi_1(\zeta)],$$

ou mieux

$$(34) \qquad i\sin iy + \psi(\zeta)\cos x + \psi_1(\zeta)\sin x = 0.$$

L'intégrale de l'équation (33) étant connue, on en déduit celle de l'équation (32) et puis celle de l'équation (31); mais il faut pour cela connaître d'abord la valeur de z en x et y. Or on a, comme on sait, entre les deux fonctions ζ et z la relation

$$\zeta = \frac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy};$$

d'où l'on tire

$$z = \int \zeta \cos iy\, dy + \mathrm{X}.$$

Si ζ était connu explicitement en fonction de y, l'équation précédente donnerait z; malheureusement l'équation (34) renferme des fonctions arbitraires où entre ζ, et ne peut par conséquent pas être résolue par rapport à cette variable. Pour lever la difficulté, on remarque que

$$\int \zeta \cos iy\, dy = -\zeta\, i\sin iy + \int \frac{d\zeta}{dy}\, i\sin iy\, dy;$$

substituant alors à $i\sin iy$ sa valeur fournie par l'équation (34), il vient

$$\int \zeta \cos iy\, dy = -\zeta\, i\sin iy - \cos x \int \psi(\zeta)\, d\zeta - \sin x \int \psi_1(\zeta) d\zeta$$

ou, en remplaçant $\psi(\zeta)$ par $\psi'(\zeta)$ et $\psi_1(\zeta)$ par $\psi'_1(\zeta)$,

$$\int \zeta \cos iy\, dy = -\zeta i \sin iy - \psi(\zeta)\cos x - \psi_1(\zeta)\sin x,$$

de sorte que la valeur cherchée de z est le résultat de l'élimination de ζ entre l'équation

$$z = -\zeta i \sin iy - \psi(\zeta)\cos x - \psi_1(\zeta)\sin x + \mathrm{X}$$

et l'équation (34) qui, par notre changement de notations, prend la forme

$$o = -i\sin iy - \psi'(\zeta)\cos x - \psi'_1(\zeta)\sin x.$$

La valeur de z que nous venons d'obtenir se rapporte toujours à l'équation (33); pour qu'elle devienne l'intégrale de l'équation (32), il nous reste encore à particulariser d'une manière convenable la fonction X de x.

Or on a

$$\begin{aligned} u &= \frac{d^2 z}{dx^2} + i \operatorname{tang} iy \cdot \frac{dz}{dy} + z,\\ v &= \frac{d^2 z}{dz\,dy},\\ w &= \frac{d^2 z}{dy^2} + i \operatorname{tang} iy \cdot \frac{dz}{dy}. \end{aligned}$$

D'ailleurs les équations

$$\begin{aligned} z &= -\zeta i \sin iy - \psi(\zeta)\cos x - \psi_1(\zeta)\sin x + \mathrm{X},\\ o &= -i\sin iy - \psi'(\zeta)\cos x - \psi'_1(\zeta)\sin x, \end{aligned}$$

donnent

$$\frac{dz}{dx} = \psi(\zeta)\sin x - \psi_1(\zeta)\cos x + \mathrm{X}',$$

$$\frac{dz}{dy} = \zeta \cos iy,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \psi(\zeta)\cos x + \psi_1(\zeta)\sin x + [\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x]\frac{d\zeta}{dx} + \mathrm{X}'',$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d\zeta}{dx}\cos iy,$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d\zeta}{dy}\cos iy - \zeta i \sin iy;$$

donc

$$u = [\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x]\frac{d\zeta}{dx} + X'' + X,$$

$$v = \frac{d\zeta}{dx}\cos iy,$$

$$w = \frac{d\zeta}{dy}\cos iy.$$

Substituant dans l'équation (32), on trouve

$$\frac{d\zeta}{dy}\left\{[\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x]\frac{d\zeta}{dx} + X'' + X\right\} - \cos iy.\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = 0,$$

ou simplement

$$X'' + X = 0;$$

car, en différentiant successivement par rapport à y et par rapport à x, l'équation

$$0 = -i\sin iy - \psi'(\zeta)\cos x - \psi'_1(\zeta)\sin x,$$

on a

$$\cos iy = [\psi''(\zeta)\cos x + \psi''_1(\zeta)\sin x]\frac{d\zeta}{dy}$$

$$\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x = [\psi''(\zeta)\cos x + \psi''_1(\zeta)\sin x]\frac{d\zeta}{dy},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\zeta}{dy}[\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x] - \frac{d\zeta}{dx}\cos iy = 0.$$

Ainsi X est nul, en laissant de coté des constantes sans importance, et l'intégrale de l'équation (32) est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= -\alpha i\sin iy - \psi(\alpha)\cos x - \psi_1(\alpha)\sin x,\\ 0 &= -i\sin iy - \psi'(\alpha)\cos x - \psi'_1(\alpha)\sin x;\end{aligned}\right.$$

par conséquent l'intégrale de l'équation (31) est représentée par le système des deux équations

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= a\cos iy - \alpha i\sin iy - \psi(\alpha)\cos x - \psi_1(\alpha)\sin x,\\ 0 &= -i\sin iy - \psi'(\alpha)\cos x - \psi'_1(\alpha)\sin x.\end{aligned}\right.$$

Tâchons maintenant d'obtenir la génération de la surface. Des deux équations (36) la seconde est la dérivée relative à α de la première; je dis qu'il résulte de là que la surface S représentée par le système des deux équations (36) est l'enveloppe de la surface mobile s que définit la première de ces deux équations lorsque l'on considère α comme un paramètre variable. Soit, en effet, une des surfaces s que nous appellerons s_0 et que nous supposerons obtenue en donnant au paramètre α la valeur particulière α_0. Considérons sur cette surface s_0 et sur la surface S les lignes c_0 et C pour lesquelles on a

$$o = -i \sin iy - \psi'(\alpha_0)\cos x - \psi'_1(\alpha_0)\sin x.$$

Il est facile de voir que la valeur de z sera la même pour les points de ces lignes répondant aux mêmes valeurs de x et de y; de plus, comme les dérivées $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ ont la même valeur, soit qu'on les tire de l'équation obtenue en éliminant α entre les deux équations (36), soit qu'on les tire de la première des équations (36) dans l'hypothèse de α constant, on reconnaît par les égalités (4) que les coordonnées rectangles ξ, η, ζ sont aussi les mêmes pour les points des courbes c_0 et C répondant aux mêmes valeurs de x et de y. Ainsi les lignes c_0 et C se confondent, et les surfaces s_0 et S sur lesquelles elles sont respectivement tracées sont d'ailleurs tangentes tout le long de ces lignes. Donc la surface S est bien l'enveloppe de la surface mobile s. Ceci posé, cherchons quelle est la surface s représentée par la première des équations (36) lorsque α est considéré comme constant. Or, dans cette hypothèse de α constant, on a

$$\frac{dz}{dx} = \psi(\alpha)\sin x - \psi_1(\alpha)\cos x,$$

$$\frac{dz}{dy} = -ai\sin iy + \alpha\cos iy;$$

substituant dans les égalités (4), il vient

$$\begin{gathered}[\xi - \psi(\alpha)]\cos x + [\eta - \psi_1(\alpha)]\sin x = -\frac{a}{\cos iy},\\ [\xi - \psi(\alpha)]\sin x - [\eta - \psi_1(\alpha)]\cos x = o,\\ \zeta - \alpha = -ai\,\text{tang}\, iy,\end{gathered}$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées rectangles d'un point quelconque de la surface. Faisant la somme des carrés, membre à membre, on trouve

$$[\xi - \psi(\alpha)]^2 + [\eta - \psi_1(\alpha)]^2 + (z - \alpha)^2 = a^2,$$

c'est-à-dire l'équation d'une sphère de rayon a et dont le centre a pour coordonnées $\psi(\alpha)$, $\psi_1(\alpha)$ et α. Ainsi la surface cherchée est l'enveloppe d'une sphère de rayon constant égal à a et dont le centre parcourt une ligne tout à fait quelconque.

Reprenons l'intégrale de l'équation

$$uw - v^2 = 0,$$

intégrale qui, d'après ce que l'on a vu, est représentée par le système des deux équations

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= -\alpha i \sin iy - \psi(\alpha)\cos x - \psi_1(\alpha)\sin x, \\ 0 &= -i\sin iy - \psi'(\alpha)\cos x - \psi'_1(\alpha)\sin x, \end{aligned} \right.$$

et cherchons-en aussi la signification géométrique. En différentiant la première des équations (35) successivement par rapport à x et par rapport à y, α étant, bien entendu, considéré comme variable, on trouve simplement, à cause de la seconde équation,

$$\frac{dz}{dx} = \psi(\alpha)\sin x - \psi_1(\alpha)\cos x,$$

$$\frac{dz}{dy} = \alpha\cos iy.$$

Portant ces valeurs dans les égalités (4), on a

$$[\xi - \psi(\alpha)]\cos x + [\eta - \psi_1(\alpha)]\sin x = 0,$$

$$[\xi - \psi(\alpha)]\sin x - [\eta - \psi_1(\alpha)]\cos x = 0,$$

$$\zeta = \alpha,$$

d'où

$$\xi = \psi(\alpha), \quad \eta = \psi_1(\alpha), \quad \zeta = \alpha.$$

Ainsi le lieu géométrique correspondant à l'intégrale considérée est la ligne dont les équations sont

$$\xi = \psi(\zeta), \quad \eta = \psi_1(\zeta).$$

Le résultat précédent pouvait être prévu. En effet, on obtient le lieu géométrique correspondant à l'intégrale de l'équation (32) en effectuant, sur la surface représentée par l'intégrale de l'équation (31), une contraction constante et égale à a suivant la normale : c'est ce qui résulte de la relation qui existe entre les valeurs de z déduites des deux intégrales. Or, d'après la nature même de la surface, la contraction suivant la normale dont il s'agit doit donner les centres des sphères de rayon a dont la surface est l'enveloppe; donc le lieu géométrique de l'intégrale (32) est la ligne que décrit le centre mobile de la sphère de rayon a.

VI. — Digression sur un nouveau mode de représentation des lignes courbes.

Cette particularité d'après laquelle toute ligne plane ou gauche peut être représentée par une seule relation entre z, x, y, comme le sont toutes les surfaces *courbes*, est très-remarquable et permet de déduire les formules relatives à la théorie des lignes courbes de celles qui ont été établies pour les surfaces. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Prenons d'abord l'équation générale des lignes de courbure

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u-w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

et faisons $uw - v^2 = 0$ afin d'exprimer que la relation entre z, x, y se rapporte à une ligne; nous aurons

$$vdx + wdy = 0, \quad vdy - wdx = 0.$$

Ces deux équations font connaître tous les systèmes de normales à la ligne considérée qui forment des surfaces développables. La première, qui se réduit à $\zeta = \text{const.}$, donne toutes les normales qui partent d'un même point de la courbe et qui forment les plans normaux; la seconde fournit les normales qui par leurs intersections successives forment les développées de la courbe. Ainsi on voit que la détermination des développées se ramène à l'intégration de l'équation

$$vdy - wdx = 0.$$

Considérons, en second lieu, les équations

$$d\theta + i\,\mathrm{tang}\,iy\,dx = 0,$$
$$(u\cos\theta - v\sin\theta)\,dx - (w\sin\theta - v\cos\theta)\,dy = 0,$$

des lignes géodésiques. L'hypothèse $uw - v^2 = 0$ décompose la seconde équation en ces deux-ci

$$v\,dx + w\,dy = 0,$$
$$w\sin\theta - v\cos\theta = 0.$$

L'équation $v\,dx + w\,dy = 0$, qui revient à $\zeta = \text{const.}$, ne donne que les normales issues d'un même point de la courbe; l'autre équation doit donc fournir les normales principales, d'après la propriété caractéristique des lignes géodésiques. Or on en tire

$$\mathrm{tang}\,\theta = \frac{v}{w},$$

d'où, en portant dans la première équation des lignes géodésiques,

$$\left[w\frac{dv}{dx} - v\frac{dw}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy\,(v^2 + w^2)\right]dx + \left(w\frac{dv}{dy} - v\frac{dw}{dy}\right)dy = 0,$$

et, en se rappelant les équations (7),

$$\left(w\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dy}\right)dx + \left(w\frac{dv}{dy} - v\frac{dw}{dy}\right)dy = 0.$$

D'ailleurs de l'équation

$$uw - v^2 = 0,$$

qui revient à

$$\frac{u}{v} = \frac{v}{w},$$

on déduit

$$\frac{w^2}{v^2}\left(v\frac{du}{dy} - u\frac{dv}{dy}\right) = w\frac{dv}{dy} - v\frac{dw}{dy};$$

donc on a

$$v^2\left(w\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dy}\right)dx + w^2\left(v\frac{du}{dy} - u\frac{dv}{dy}\right)dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$v(vdx + wdy)\left(w\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dy}\right) = 0,$$

et en laissant de côté les deux premiers facteurs,

$$w\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dy} = 0,$$

ou bien enfin

$$\frac{d.\frac{u}{v}}{dy} = \frac{d.\frac{v}{w}}{dy} = 0,$$

à cause de

$$\frac{u}{v} = \frac{v}{w}.$$

Telle est l'équation qui définit les normales principales de la courbe.

Considérons enfin l'équation

$$R^2 - (u+w)\cos iy.R + (uw - v^2)\cos^2 iy = 0,$$

qui fait connaître les rayons de courbure principaux; si on fait $uw - v^2 = 0$, on trouve

$$R = (u+w)\cos iy,$$

en laissant de côté une valeur nulle. Cette formule, lorsqu'on considère x et y comme déterminés, c'est-à-dire lorsqu'on prend une normale particulière, donne la portion de la normale comprise entre la courbe et la surface polaire. Si on suppose que x et y satisfassent à la condition

$$\frac{d.\frac{v}{w}}{dy} = 0,$$

on a le rayon de courbure ordinaire.

Nous pourrions obtenir d'une manière analogue plusieurs autres résultats, mais, pour le moment, nous bornerons là cette digression. Montrons seulement ici comment, au moyen des équations de la courbe, on peut calculer u, v, w.

$$\xi = \psi(\zeta) \quad \eta = \psi_1(\zeta)$$

étant les équations de la courbe, la relation en z, x, y est, comme on l'a vu, le résultat de l'élimination du paramètre α entre les deux équations

$$z = -\alpha i \sin iy - \psi(\alpha)\cos x - \psi_1(\alpha)\sin x,$$
$$0 = -i\sin iy - \psi'(\alpha)\cos x - \psi'_1(\alpha)\sin x;$$

de plus, on a

$$\alpha = \zeta.$$

Or, d'après les formules (8),

$$v = \frac{d\zeta}{dx}\cos iy, \quad w = \frac{d\zeta}{dy}\cos iy:$$

donc

$$v = \frac{[\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x]\cos i y}{\psi''(\zeta)\cos x + \psi''_1(\zeta)\sin x},$$

$$w = \frac{\cos^2 iy}{\psi''(\zeta)\cos x + \psi''_1(\zeta)\sin x};$$

v et w étant connus, on obtient u au moyen de la relation

$$uw - v^2 = 0.$$

VII. — Surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

La transformée sphérique d'une ligne de courbure a toujours ses tangentes respectivement parallèles à celles de la ligne de courbure. Il suit évidemment de là que pour qu'une surface ait toutes ses lignes de courbure planes, il faut et il suffit que les transformées sphériques des lignes de courbure soient, pour cette surface, deux séries de cercles orthogonaux. Ceci posé, nous allons d'abord chercher sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées tous les systèmes de cercles orthogonaux.

L'équation des cercles du premier système peut être mise sous la forme

$$\cos(x - a) + c\cos ib\cos iy = \sin ib\sin iy, \tag{37}$$

ou bien encore sous celle-ci

$$(37\ bis)\qquad \cos(x-a)+r\cos i(y-d)=0,$$

a, b, c, r, d étant des fonctions arbitraires d'un paramètre variable t (*voyez* mon Mémoire sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, XXXV[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*).

De même l'équation des cercles du second système est

$$(38)\qquad \cos(x-\alpha)+\gamma\cos i\beta\cos iy=\sin i\beta\sin iy$$

ou

$$(38\ bis)\qquad \cos(x-\alpha)+\rho\cos i(y-\delta)=0,$$

α, β, γ, ρ, δ étant des fonctions arbitraires d'un second paramètre variable τ.

Pour que les cercles du premier système soient orthogonaux avec ceux du second, il faut et il suffit que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation (37 *bis*), qui est $-\frac{\sin(x-a)}{ri\sin i(y-d)}$, et la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation (38 *bis*), qui est $-\frac{\sin(x-\alpha)}{\rho i\sin i(y-\delta)}$, donnent pour produit -1; on a donc

$$\sin(x-a)\sin(x-\alpha)=r\rho\sin i(y-d)\sin i(y-\delta),$$

ou, en éliminant x et y au moyen des équations (37 *bis*) et (38 *bis*),

$$\cos(a-\alpha)=r\rho\cos i(d-\delta);$$

d'ailleurs cette dernière relation doit être satisfaite quels que soient t et τ. Nous mettrons l'égalité précédente sous la forme

$$(39)\quad \cos a\cos\alpha+\sin a\sin\alpha-c\gamma\cos ib\cos i\beta-\sin ib\sin i\beta=0,$$

afin d'y introduire les quantités b, c, β, γ; et pour faciliter l'interprétation des résultats qui vont suivre, nous rappellerons que a et b, α et β représentent respectivement les coordonnées sphériques x et y des pôles des cercles du premier et du second système, tandis que c et γ sont les cosinus des rayons sphériques de ces cercles.

Supposons d'abord $c=0$ et $a=0$, auquel cas les cercles représentés par l'équation (37) sont des grands cercles passant tous par le point $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$; l'équation (39) devient

$$\cos\alpha = \sin ib \sin i\beta,$$

et comme b doit rester indéterminé, sans quoi la série des cercles (37) se réduirait à un seul cercle, on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = 0;$$

donc les cercles du second système ont tous pour pôle le point par lequel passent tous les grands cercles du premier système; en d'autres termes, le double système obtenu est celui que forment un système de méridiens et le système des parallèles correspondants.

Supposons en second lieu c nul, mais a différent de 0; en divisant l'équation (39) par $\sin a$ et prenant les dérivées relatives à t du résultat, nous aurons

$$(40) \qquad \cos\alpha(\cot a)' = \sin i\beta \left(\frac{\sin ib}{\sin a}\right)'.$$

La dérivée $(\cot a)'$ peut être nulle ou différente de zéro. Dans le premier cas a est constant, et en changeant d'une manière convenable le méridien à partir duquel on compte les x, on peut supposer a nul, ce qui nous fait rentrer dans le cas examiné. Si $(\cot a)'$ est différent de zéro, en divisant par ce facteur et prenant ensuite la dérivée relative à t, il vient

$$0 = \sin i\beta \left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{\sin a}\right)'}{(\cot a)'}\right]',$$

d'où l'on tire $\beta = 0$, ou bien $\sin ib = m\cos a + n\sin a$ (m et n étant des constantes arbitraires). La première condition est inadmissible, car elle réduit l'équation (40) à $\cos\alpha = 0$ et puis l'équation (39) à $\sin\alpha = 0$. La seconde exprime que les grands cercles représentés par l'équation

(37) ont leurs pôles sur un même grand cercle; or rien n'empêche de prendre ce dernier grand cercle pour celui à partir duquel on compte les x : alors $a = 0$ et nous retombons encore sur le premier cas. Ainsi quand c est nul, c'est-à-dire quand les cercles de l'un des systèmes sont des grands cercles, on ne trouve pour systèmes orthogonaux que les systèmes évidents formés par des méridiens et les parallèles correspondants.

Supposons maintenant c et γ différents de zéro. $\cos ib$ n'étant jamais nul, nous pourrons diviser l'équation (39) par $c\cos ib$, et en prenant la dérivée relative à t du résultat, nous aurons

$$(41)\qquad \cos\alpha\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)' + \sin\alpha\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)' = \sin i\beta\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'.$$

Il peut se faire d'abord que les dérivées $\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'$, $\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'$, soient toutes les deux nulles; dans ce cas, a et $c\cos ib$ sont constants, et l'égalité (41) montre que $\beta = 0$; en effet $\frac{\sin ib}{c\cos ib}$ ne peut pas être constant, sans quoi a, b et c seraient constants et les cercles du premier système se réduiraient à un seul. Ces résultats montrent que le lieu des pôles des cercles de chaque série est un grand cercle, et que les deux lieux correspondant aux deux séries de cercles sont perpendiculaires l'un à l'autre. Pour achever de déterminer les deux séries de cercles auxquels nous sommes ainsi conduits, supposons que les grands cercles qui contiennent leurs pôles soient les méridiens $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on aura alors $a = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et l'équation (39) deviendra

$$c\gamma\cos ib\cos i\beta = -\sin ib\sin i\beta.$$

Mais aucun des facteurs du premier membre ne peut être nul; donc on a

$$c\cot ib = m,\quad \gamma\cot i\beta = -\frac{1}{m},$$

m étant une constante. En introduisant dans les équations (37) et (38) les conditions précédentes, on trouve pour les équations des séries de cercles obtenus

$$\cos x = \sin ib\,(\sin iy - m\cos iy),$$
$$\sin x = -\sin i\beta\left(\sin iy + \frac{1}{m}\cos iy\right),$$

que nous mettrons sous la forme

$$\cos x = \alpha \cos i(y - m),$$
$$\sin x = \beta i \sin i(y - m),$$

m étant une constante et α et β les deux paramètres variables.

Revenons à la discussion de l'équation (41), et supposons que l'une des deux dérivées $\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'$, $\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'$, la première par exemple, ne soit pas nulle : divisant par cette dérivée et différentiant par rapport à t, il viendra

$$(42) \qquad \cos\alpha \left[\frac{\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]' = \sin i\beta \left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]'.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$\left[\frac{\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]' = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]' = 0,$$

ou

$$\cos a = m\sin a + nc\cos ib$$

et

$$\sin ib = p\sin a + qc\cos ib,$$

m, n, p et q étant des constantes; de ces deux résultats on tire

$$q\cos a - n\sin ib = (mq - np)\sin a,$$

ce qui prouve que les pôles des cercles du premier système sont sur un même grand cercle; mais on a alors par l'équation (41)

$$m\cos\alpha + \sin\alpha = p\sin i\beta;$$

d'où l'on déduit que les pôles des cercles du second système sont aussi sur un même grand cercle, qui d'ailleurs est perpendiculaire au premier; nous retombons donc sur les deux systèmes qui ont été déjà indiqués.

Si l'une des dérivées

$$\left[\frac{\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ia}\right)'}\right]', \quad \left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]'$$

la première par exemple n'est pas nulle, on aura, en divisant l'équation (42) par cette dérivée et différentiant le résultat par rapport à t,

$$0 = \sin i\beta \left\{\frac{\left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]'}{\left[\frac{\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]'}\right\}' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta = 0 \quad \text{ou bien} \quad \sin ib = m\cos a + n\sin a + pc\cos ib.$$

m, n et p étant des constantes. La première condition donne

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

par l'équation (42), et puis

$$\alpha = 0$$

par l'équation (41), résultat absurde. La seconde condition donne

$$\cos\alpha = m\sin i\beta$$

par l'équation (42); puis

$$\sin\alpha = n\sin i\beta$$

par l'équation (41); puis enfin

$$\gamma\cos i\beta + p\sin i\beta = 0,$$

à cause de l'équation (39), résultat inadmissible aussi, car on en déduirait que α, β et γ sont constants.

En résumé, il n'existe donc que deux systèmes de séries de cercles, tracés sur la sphère, respectivement orthogonaux : 1° le système formé par des méridiens et les parallèles correspondants; 2° le système formé par les deux séries de cercles

$$(43)\qquad \begin{cases} \cos x = \alpha \cos i(y-m), \\ \sin x = \beta i \sin i(y-m). \end{cases}$$

Les surfaces dont les lignes de courbure ont pour transformées sphériques les méridiens et les parallèles sont évidemment celles qui ont été étudiées au § III; il ne nous reste donc à nous occuper que de celles dont les lignes de courbure ont pour transformées sphériques les cercles représentés par les équations (43).

Or les équations (43), dans lesquelles α et β sont des constantes, sont les intégrales respectives des équations différentielles

$$(44)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang} x\, dx = i \operatorname{tang} i(y-m)\, dy, \\ \cot x\, dx = i \cot i(y-m)\, dy; \end{cases}$$

d'ailleurs nous avons trouvé pour l'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface quelconque

$$(23)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u-w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

x et y ayant évidemment la même signification que dans les équations (44); donc si nous exprimons que les deux équations (44) équivalent à l'équation (23), ce qui donne

$$v[\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 i(y-m)] + (u-w)\operatorname{tang} x\, i \operatorname{tang} i(y-m) = 0,$$

ou bien

$$(45)\qquad s[\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 i(y-m)] + (r-t+z)\operatorname{tang} x\, i \operatorname{tang} i(y-m) = 0,$$

en remplaçant u, v, w par leurs valeurs indiquées au § I de la première partie; nous aurons l'équation aux différentielles partielles du second ordre en z, x, y des surfaces cherchées.

Pour intégrer l'équation (45), nous allons d'abord substituer aux variables indépendantes x et y les variables α et β. Pour cela observons que l'on a

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dz}{d\beta}\frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = q = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{dz}{d\beta}\frac{d\beta}{dy};$$

mais les équations (43) donnent par la différentiation

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos i(y-m)}, \quad \frac{d\alpha}{dy} = \alpha i \operatorname{tang} i(y-m),$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\cos x}{i \sin i(y-m)}, \quad \frac{d\beta}{dy} = \frac{\beta}{i \operatorname{tang} i(y-m)},$$

ou bien

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \frac{d\beta}{dy} = \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

car

$$i \sin i(y-m) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \cos i(y-m) = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\cos x = \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin x = \frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$

donc

$$p = -\frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dz}{d\alpha} + \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dz}{d\beta},$$

$$q = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dz}{d\alpha} + \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dz}{d\beta}.$$

On trouve de la même manière

$$r = -\frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dp}{d\alpha} + \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dp}{d\beta},$$

$$s = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dp}{d\alpha} + \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dp}{d\beta},$$

$$t = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dq}{d\alpha} + \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dq}{d\beta},$$

et, en remplaçant $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dp}{d\beta}$, $\frac{dq}{d\alpha}$, $\frac{dq}{d\beta}$ par leurs valeurs,

$$r = \beta^2 \frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2} \frac{d^2 z}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta \frac{d^2 z}{d\alpha\, d\beta} + \alpha^2 \frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2} \frac{d^2 z}{d\beta^2} - \alpha \frac{dz}{d\alpha} - \beta \frac{dz}{d\beta},$$

$$s = -\alpha\beta \frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2} \frac{d^2 z}{d\alpha^2} - (\beta^2 - \alpha^2) \frac{d^2 z}{d\alpha\, d\beta} + \alpha\beta \frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2} \frac{d^2 z}{d\beta^2}$$
$$- \beta \frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2} \frac{dz}{d\alpha} + \alpha \frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2} \frac{dz}{d\beta},$$

$$t = \alpha^2 \frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2} \frac{d^2 z}{d\alpha^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2 z}{d\alpha\, d\beta} + \beta^2 \frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2} \frac{d^2 z}{d\beta^2}$$
$$+ \alpha \left(2 \frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2} - 1 \right) \frac{dz}{d\alpha} + \beta \left(2 \frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2} - 1 \right) \frac{dz}{d\beta};$$

substituant dans l'équation (45), qui revient à

$$(r - t + z)\,\alpha\beta + s\,(\beta^2 - \alpha^2) = 0,$$

on trouve

$$(46) \quad \frac{d^2 z}{d\alpha\, d\beta} + \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)} \frac{dz}{d\alpha} + \frac{\alpha(1+\beta^2)}{(1-\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)} \frac{dz}{d\beta} - \frac{\alpha\beta z}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = 0.$$

Pour déduire de cette équation la valeur de z, je remarque qu'en ajoutant et en retranchant, dans le premier membre,

$$z \frac{d.}{d\alpha} \; \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)},$$

on peut écrire

$$\frac{d.\left[\frac{dz}{d\beta} + \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)} z\right]}{d\alpha} + \frac{\alpha(1+\beta^2)}{(1-\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)} \left[\frac{dz}{d\beta} + \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)} z\right] = 0.$$

Intégrant par rapport à α, on a

$$\frac{dz}{d\beta} + \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)} z = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}}\, \varphi(\beta),$$

$\varphi(\beta)$ représentant une fonction arbitraire de β. Intégrant de nouveau par rapport à β, il vient

$$z = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}[F(\alpha) + F_1(\beta)],$$

$F(\alpha)$ et $F_1(\beta)$ étant des fonctions arbitraires de α et de β.

La valeur de z étant connue en fonction de α et de β et par suite en fonction de x et de y d'après les égalités (44), on pourrait se servir des égalités (4) pour calculer les coordonnées rectangles ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface en fonction de x et de y, et de là on passerait ensuite aux valeurs de ξ, η, ζ en α et β; mais on arrive directement, et d'une manière plus simple, comme il suit. L'équation du plan tangent à nos surfaces est

$$X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = -z.$$

Substituons à $z, \cos x, \sin x, i\sin iy$ leurs valeurs en α et β, il viendra

$$\begin{aligned}X\alpha\sqrt{1+\beta^2} + Y\beta\sqrt{1-\alpha^2} + Z\left(\cos im.\sqrt{1-\alpha^2} + i\sin im.\sqrt{1+\beta^2}\right)\\ = -\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}[F(\alpha)+F_1(\beta)],\end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant $\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ par α et $\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$ par β,

$$\alpha X + \beta Y + \left(i\sin im.\sqrt{1+\alpha^2} + \cos im.\sqrt{1-\beta^2}\right)Z = F(\alpha) + F_1(\beta),$$

les fonctions arbitraires $F(\alpha)$ et $F_1(\beta)$ ayant, bien entendu, changé de forme. Or les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface doivent vérifier cette équation du plan tangent et ses dérivées partielles relatives à α et à β; on a donc les trois équations

$$\alpha\xi + \beta\eta + \left(i\sin im.\sqrt{1+\alpha^2} + \cos im.\sqrt{1-\beta^2}\right)\zeta = F(\alpha) + F_1(\beta),$$

$$\xi + \frac{\alpha\, i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}\zeta = F'(\alpha),$$

$$\eta - \frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\zeta = F'_1(\beta),$$

pour déterminer complétement les coordonnées ξ, η, ζ en fonction de α et de β; à la place de la première de ces équations, on peut prendre celle-ci

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\zeta = F(\alpha) - \alpha F'(\alpha) + F_1(\beta) - \beta F'_1(\beta),$$

qui résulte de l'élimination de ξ et de η, et on obtient le système plus simple

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\zeta = F(\alpha) - \alpha F'(\alpha) + F(\beta) - \beta F'_1(\beta),\\ &\xi + \frac{\alpha i \sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}\zeta = F'(\alpha),\\ &\eta - \frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\zeta = F'_1(\beta). \end{aligned}\right.$$

Évaluons l'élément linéaire ds de la surface, élément dont la connaissance est nécessaire dans l'étude des propriétés géodésiques.

En différentiant les équations (47) et posant, pour simplifier,

$$F(\alpha) - \alpha F'(\alpha) = \varphi(\alpha), \quad F_1(\beta) - \beta F'_1(\beta) = \varphi_1(\beta),$$

on trouve celles-ci

$$\begin{aligned} \left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) d\zeta = &\left[\varphi'(\alpha) + \frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right] d\alpha \\ &+ \left[\varphi'_1(\beta) - \frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right] d\beta, \end{aligned}$$

$$d\xi + \frac{\alpha i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} d\zeta = -\frac{1}{\alpha}\left[\varphi'(\alpha) + \frac{\alpha i \sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right] d\alpha,$$

$$d\eta - \frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}} d\zeta = -\frac{1}{\beta}\left[\varphi'_1(\beta) - \frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right] d\beta,$$

qui reviennent à

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)d\zeta=\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha$$
$$+\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta,$$

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)d\xi=\frac{-\alpha i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$
$$\times\left\{\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha+\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta\right\}$$
$$-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha,$$

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)d\eta=\frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\times\left\{\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha+\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta\right\}$$
$$-\frac{1}{\beta}\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta.$$

Faisant la somme des carrés membre à membre et supprimant le facteur $\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$, il vient

$$ds^2=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]^2d\alpha^2+\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\left[\varphi'(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]^2d\beta^2,$$

où ζ doit encore être remplacé par sa valeur tirée de l'équation

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\zeta=\varphi(\alpha)+\varphi_1(\beta),$$

si l'on veut avoir ds en fonction des deux variables indépendantes α et β. La valeur de ds^2 peut se mettre sous une autre forme : de l'équation qui détermine ζ on déduit

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{d\zeta}{d\alpha}=\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta,$$

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{d\zeta}{d\beta}=\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta,$$

donc on a

$$ds^2=\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2\left[\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\left(\frac{d\zeta}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2+\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{d\zeta}{d\beta}\right)^2 d\beta^2\right].$$

La valeur de ds, quoique d'une forme assez élégante, est néanmoins trop compliquée pour qu'on puisse, dans le cas général, se proposer, avec quelques chances de succès, la détermination des lignes isométriques, des lignes géodésiques, etc.; mais dans certains cas particuliers toutes ces questions deviennent abordables. Je me bornerai à signaler le cas où l'on a

$$\varphi(\alpha)=\cos im.\sqrt{1+\alpha^2},\quad \varphi_1(\beta)=i\sin im.\sqrt{1-\beta^2},$$

et celui où

$$\varphi(\alpha)=\frac{\sin^2 im}{1+\alpha^2},\quad \varphi_1(\beta)=\frac{\cos^2 im}{1-\beta^2}.$$

VIII. — Surfaces d'étendue minimum (*).

Les surfaces d'étendue minimum sont celles dont les rayons de courbure principaux ont en chaque point des valeurs égales et de signes contraires. On a donc pour ces surfaces, d'après l'équation (25),

$$u+w=0, \tag{48}$$

(*) Quelques-uns des résultats contenus dans ce paragraphe, à savoir : 1° l'intégrale générale sous forme réelle; 2° les surfaces d'étendue minimum algébriques; 3° la surface d'étendue minimum du genre hélicoïde, constituent le but principal des recherches que M. Catalan a présentées en 1855 à l'Académie des Sciences et qu'il a ensuite publiées dans le tome XXXVII du *Journal de l'École Polytechnique*. Je crois devoir faire observer que j'avais donné tous ces résultats, dès 1853 dans le tome XXXVII des *Comptes rendus*, page 531. Du reste M. Catalan a bien voulu reconnaître, dans une note placée en tête de son Mémoire, mes droits à la priorité.

ou bien

$$(48\ bis)\qquad t + r + i\operatorname{tang} iy . q + z = 0.$$

L'équation précédente s'intègre sans difficulté par la méthode de Monge, mais on est conduit à des résultats plus simples en partant de l'équation qui détermine ζ.

Différentions l'équation (48) par rapport à y; en se rappelant que

$$u = \int \left(\cos iy \frac{d^2\zeta}{dx^2} + i\sin iy \frac{d\zeta}{dy}\right) dy, \quad w = \cos iy \frac{d\zeta}{dy},$$

on trouve

$$(49)\qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0,$$

équation bien connue et dont l'intégrale générale est

$$(50)\qquad \zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy),$$

f et f_1 étant des fonctions réelles ou imaginaires; ou mieux, en évitant la forme imaginaire,

$$(51)\ \zeta = \frac{1}{2}[\varphi(x + iy) + \varphi(x - iy)] + \frac{i}{2}[\varphi_1(x + iy) - \varphi_1(x - iy)],$$

φ et φ_1 étant des fonctions réelles. Observons toutefois que l'équation (49) est plus générale que l'équation (48), et que lorsque nous déduirons z de la valeur de ζ fournie par l'équation (50) au moyen de la relation $z = \int \zeta \cos iy\, dy$, il faudra déterminer la fonction arbitraire de x introduite par l'intégration, de façon que $u + w = 0$.

Indiquons dès à présent et d'une manière générale comment se fait le calcul de cette fonction de x. Je pose

$$z = \int_0^y \zeta \cos iy\, dy + \mathrm{X},$$

j'aurai

$$u = \frac{d^2z}{dx^2} + i\operatorname{tang} iy . \frac{dz}{dy} + z = \int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \cos iy\, dy$$
$$+ \int_0^y \zeta \cos iy\, dy + \zeta i \sin iy + \mathrm{X}'' + \mathrm{X},$$

mais puisque

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0,$$

on a

$$\int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \cos iy\, dy = -\int_0^y \frac{d^2\zeta}{dy^2} \cos iy\, dy,$$

et, en intégrant par parties deux fois de suite dans le second membre,

$$\int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \cos iy\, dy = -\frac{d\zeta}{dy}\cos iy + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0 - \zeta i \sin iy - \int_0^y \zeta \cos iy\, dy,$$

$\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0$ désignant ce que devient $\frac{d\zeta}{dy}$ pour $y = 0$; donc

$$u = -\frac{d\zeta}{dy}\cos iy + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0 + X'' + X;$$

par conséquent, si l'on veut que la condition $u + w = 0$ soit satisfaite, il faudra que

$$X'' + X + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0 = 0,$$

ce qui donne

$$X = C\cos x + C'\sin x + \int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha,$$

en représentant par $\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0}$ la valeur que prend $\frac{d\zeta}{dy}$ pour $x = \alpha$ et $y = 0$. Ainsi on a

$$(52)\quad z = C\cos x + C'\sin x + \int_0^y \cos iy\, \zeta\, dy + \int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha,$$

expression dans laquelle on pourra toujours laisser de côté les termes en $\cos x$ et en $\sin x$ qui n'influent, comme on sait, que sur la position de la surface par rapport aux axes.

Appliquons les formules précédentes à la recherche de quelques surfaces simples. Posons

$$f(x + iy) = \frac{1}{2}(a - ib)(x + iy), \quad f_1(x - iy) = \frac{1}{2}(a + ib)(x - iy),$$

a et b étant des constantes réelles et qu'on pourra toujours supposer positives; nous aurons

$$\zeta = ax + by,$$

puis

$$\int_0^y \zeta \cos iy\, dy = -(ax+by)\, i \sin iy - b\cos iy + b,$$

$$\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha = b\cos x - b,$$

et, par suite,

$$z = (C+b)\cos x + C' \sin x - (ax+by)\, i \sin iy - b\cos iy,$$

ou simplement

$$z = -(ax+by)\, i \sin iy - b\cos iy,$$

en laissant de coté des termes inutiles. Portant cette valeur dans les équations (4 *bis*), on a celles-ci

$$r\cos(\omega - x) = b\cos iy,$$
$$r\sin(\omega - x) = ai\sin iy,$$
$$\zeta = ax + by,$$

pour déterminer les coordonnées polaires r et ω et la coordonnée rectiligne ζ des différents points de la surface. Si $a = 0$, on trouve

$$r = b\cos\frac{i\zeta}{b},$$

c'est-à-dire la surface de révolution engendrée par une chaînette. Si $b=0$, on a

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\zeta}{a},$$

c'est-à-dire l'hélicoïde gauche à plan directeur. Dans le cas général où a et b sont positifs quelconques, la surface admet la génération suivante :

Considérons dans le plan des (ξ, η) l'hyperbole représentée par l'équation

$$\left(\frac{\xi}{b}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{a}\right)^2 = 1$$

et prenons la branche située du côté des ξ positifs pour base d'un cylindre parallèle aux ζ. Sur ce cylindre traçons une courbe telle, que la coordonnée ζ de l'un quelconque de ses points M, soit dans un rapport constant égal à $-\frac{2}{a}$, avec le secteur hyperbolique compté à partir du demi-axe réel qui aboutit au sommet ($\xi = b$, $\eta = 0$), et terminé au demi-diamètre qui aboutit à la projection du point M sur le plan des (ξ, η); enfin donnons à cette espèce d'hélice hyperbolique, un mouvement hélicoïdal direct autour de l'axe des ζ, de façon que les hélices circulaires décrites par ses différents points aient toutes $2\pi a$ pour pas; la surface ainsi obtenue sera la surface d'étendue minimum considérée.

Faisons encore

$$f(x+iy) = \frac{1}{2}e^{-in(x+iy)}, \quad f_1(x-iy) = \frac{1}{2}e^{in(x-iy)};$$

nous aurons $\zeta = e^{ny}\cos nx$, puis

$$\begin{aligned}\int_0^y \zeta \cos iy\, dy &= \frac{1}{2}\cos nx \int_0^y (e^y + e^{-y})e^{ny}\, dy \\ &= \frac{\cos nx}{2(n+1)}(e^{(n+1)y} - 1) + \frac{\cos nx}{2(n-1)}(e^{(n-1)y} - 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha &= n\int_0^x \sin(\alpha - x)\cos n\alpha\, d\alpha \\ &= -\frac{n\cos nx}{2(n+1)} + \frac{n\cos nx}{2(n-1)} + \frac{n\cos x}{2(n+1)} - \frac{n\cos x}{2(n-1)},\end{aligned}$$

d'où

$$z = \frac{e^{(n+1)y}\cos nx}{2(n+1)} + \frac{e^{(n-1)y}\cos nx}{2(n-1)}.$$

Par conséquent les équations (4) qui déterminent les coordonnées rectangles d'un point quelconque de la surface deviendront

$$\begin{aligned}\xi\cos x + \eta \sin x &= \frac{n\cos nx}{2}\left[\frac{e^{(n+1)y}}{n+1} - \frac{e^{(n-1)y}}{n-1}\right], \\ \xi \sin x - \eta\cos x &= \frac{-n\sin nx}{2}\left[\frac{e^{(n+1)y}}{n+1} + \frac{e^{(n-1)y}}{n-1}\right], \\ \zeta &= e^{ny}\cos nx.\end{aligned}$$

Si on éliminait x et y entre ces trois équations, il est évident que le résultat contiendrait ξ, η, ζ sous forme algébrique; donc la surface d'étendue minimum que nous venons d'obtenir est algébrique. On peut avoir autant de surfaces de cette nature que l'on veut en posant

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= (A_1+iB_1)\,e^{in_1(x+iy)} + (A_2+iB_2)\,e^{in_2(x+iy)} \\ &\quad + (A_3+iB_3)\,e^{in_3(x+iy)} + \ldots, \\ f(x-iy) &= (A_1-iB_1)\,e^{-in_1(x-iy)} + (A_2-iB_2)\,e^{-in_2(x-iy)} \\ &\quad + (A_3-iB_3)\,e^{-in_3(x-iy)} + \ldots, \end{aligned}$$

A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3,... étant des nombres réels quelconques et n_1, n_2, n_3,... des nombres réels tous différents de -1 et de $+1$.

Nous ne pousserons pas plus loin la recherche des surfaces d'étendue minimum particulières. Cette question, qui a été l'objet de plusieurs travaux, pouvait avoir de l'intérêt quand on ne connaissait que l'intégrale si compliquée de Monge; mais elle n'offre plus maintenant la moindre difficulté, puisque nous avons par ce qui précède un résultat entièrement débarrassé d'imaginaires. Proposons-nous plutôt de déterminer les fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation générale des surfaces d'étendue minimum de manière que ces surfaces remplissent certaines conditions géométriques; et pour faciliter la solution de ces nouveaux problèmes, établissons d'abord quelques propriétés et quelques formules générales.

Une surface d'étendue minimum est entièrement déterminée de forme, mais non de position, par les deux équations

$$\zeta = f(x+iy) + f_1(x-iy), \tag{50}$$

$$u + w = 0. \tag{48}$$

En effet, connaissant ζ en fonction de x et de y, on a, par cela même,

$$v = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dx}, \quad w = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dy},$$

puis u, qui est égal à $-\cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}$, d'après l'équation (48). Or on sait que lorsque u, v et w sont connus, la surface est déterminée, sauf cependant trois constantes qui permettent de déplacer la surface comme on veut parallèlement à elle-même.

La condition (48), introduite dans l'expression du carré de l'élément linéaire de la surface, réduit ce carré à

$$(53)\quad ds^2 = (v^2+w^2)(dx^2+dy^2) = \cos^2 iy\left[\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\right](dx^2+dy^2),$$

cette dernière égalité prouve que non-seulement les méridiens et les parallèles sont orthogonaux, mais encore que ces lignes forment un double système isométrique. D'une manière plus générale, on peut dire que deux séries de lignes tracées sur la surface qui ont pour transformées sphériques deux séries de lignes sphériques orthogonales et isothermes, sont des lignes isométriques de la surface. On s'assurera de l'exactitude de ce résultat, en se rapportant à la règle que nous avons donnée au § XIII de la première Partie pour déterminer les lignes isométriques d'une surface quelconque.

Déterminons les lignes de courbure des surfaces d'étendue minimum; à cet effet, portons les valeurs de u, v, w, qui sont ici

$$\begin{aligned} u = -w &= -i\cos iy\,[f'(x+iy) - f'_1(x-iy)],\\ v &= \cos iy\,[f'(x+iy) + f'_1(x-iy)],\\ w &= i\cos iy\,[f'(x+iy) - f'_1(x-iy)], \end{aligned}$$

dans l'équation générale (23)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u-w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

et il viendra

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2i\frac{f'(x+iy)-f'_1(x-iy)}{f'(x+iy)+f'_1(x-iy)}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Cette dernière équation s'intègre, quelles que soient les fonctions f et f_1, ainsi que l'a fait voir pour la première fois M. Michaël Roberts. Posons, en effet,

$$x+iy = x_1,\quad x-iy = y_1,$$

d'où

$$dx^2 - dy^2 = \frac{dx_1^2+dy_1^2}{2},\quad 2i\,dx\,dy = \frac{dx_1^2-dy_1^2}{2},$$

nous aurons

$$[f'(x_1)+f'_1(y_1)](dx_1^2+dy_1^2)+[f'(x_1)-f'_1(y_1)](dx_1^2-dy_1^2)=0,$$

ou bien

$$f'(x_1)\,dx_1^2+f'_1(y_1)\,dy_1^2=0,$$

d'où

$$(54)\qquad \int\sqrt{f'(x_1)}\,dx_1=\pm i\int\sqrt{f'_1(y_1)}\,dy_1+\mathrm{C}.$$

On peut observer que les lignes de courbure forment deux séries de lignes isométriques.

Cherchons, en second lieu, les lignes asymptotiques.

L'équation de ces lignes est, pour une surface quelconque,

$$w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2v\frac{dy}{dx}+u=0;$$

en remplaçant u, v, w par les valeurs qui se rapportent aux surfaces considérées, il vient

$$\begin{gathered}[f'(x+iy)-f'_1(x-iy)](dy^2-dx^2)\\ -2i[f'(x+iy)+f'_1(x-iy)]\,dx\,dy=0,\end{gathered}$$

et, en introduisant les variables x_1 et y_1,

$$[f'(x_1)-f'_1(y_1)](dy_1^2+dx_1^2)+[f'(x_1)+f'_1(y_1)][(dx_1^2-dy^2)=0,$$

ou

$$f'(x_1)\,dx_1^2=f'_1(y_1)\,dy_1^2,$$

d'où

$$(55)\qquad \int\sqrt{f'(x_1)}\,dx_1=\pm\int\sqrt{f'_1(y_1)}\,dy_1+\mathrm{C}.$$

Ainsi la détermination des lignes asymptotiques se ramène aux quadratures comme celle des lignes de courbure; de plus ces quadratures sont les mêmes pour les deux systèmes de lignes.

Déterminons encore l'angle θ sous lequel une ligne quelconque tracée sur une surface d'étendue minimum, coupe les lignes de plus grande pente.

Nous avons trouvé d'une manière générale

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u\cos\theta-v\sin\theta}{w\sin\theta-v\cos\theta};$$

or, pour les surfaces considérées, $u=-w$, donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-w\cos\theta-v\sin\theta}{w\sin\theta-v\cos\theta},$$

de là on tire

$$\frac{dx+idy}{dx-idy}=\frac{-iw(\cos\theta+i\sin\theta)-v(\cos\theta+i\sin\theta)}{iw(\cos\theta-i\sin\theta)-v(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$=\frac{(v+iw)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(v-iw)(\cos\theta-i\sin\theta)}=\frac{v+iw}{v-iw}e^{2i\theta},$$

ou bien enfin

$$(56)\qquad \frac{dx_1}{dy_1}=\frac{f'_1(y_1)}{f'(x_1)}e^{2i\theta},$$

en introduisant les variables x_1 et y_1.

La formule précédente donne aisément l'angle formé par deux courbes quelconques. Soit en effet $\frac{dx_1}{dy_1}$ le rapport différentiel des variables x_1 et y_1 pour la première courbe, $\frac{\delta x_1}{\delta y_1}$ le même rapport pour la seconde courbe, au point x_1, y_1 où les courbes se coupent, nous aurons

$$\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{f'_1(y_1)}{f'(x_1)}e^{2i\theta},$$

$$\frac{\delta x_1}{\delta y_1}=\frac{f'_1(y_1)}{f'(x_1)}e^{2i\theta_1},$$

θ et θ_1 étant les angles sous lesquels la première et la seconde courbe coupent la ligne de plus grande pente. Divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\frac{dx_1}{dy_1}}{\frac{\delta x_1}{\delta y_1}}=e^{2i(\theta-\theta_1)},$$

et comme l'angle ω que forment les deux courbes est égal à $\theta-\theta_1$, on obtient

$$(57)\qquad \frac{\frac{dx_1}{dy_1}}{\frac{\delta x_1}{\delta y_1}} = e^{2i\omega}.$$

Si les lignes considérées sont une ligne de courbure et une ligne asymptotique, on aura

$$\frac{\frac{dx_1}{dy_1}}{\frac{\delta x_1}{\delta y_1}} = i,$$

et par suite $\omega = \frac{\pi}{4}$, ce qui pourrait être établi directement au moyen des propriétés de l'indicatrice. On déduit aussi de l'équation (54), que les équations des lignes qui coupent sous un angle constant les lignes de courbure ou les lignes asymptotiques, sont

$$(58)\qquad \int\sqrt{f'(x_1)}\,dx_1 = m\int\sqrt{f'_1(y_1)}\,dy_1 + \mathrm{C},$$

de telle sorte que la détermination de ces lignes dépend des deux mêmes quadratures qui font connaître les lignes de courbures et les lignes asymptotiques.

Cherchons enfin les lignes géodésiques. Ces lignes sont définies par les deux équations

$$d\theta = -i\operatorname{tang} iy\,dx,\quad \frac{dx_1}{dy_1} = \frac{f'_1(y_1)}{f'(x_1)}e^{2i\theta};$$

la première équation, en substituant à y et à x leurs valeurs en x_1 et y_1, devient

$$2d\theta = -i\operatorname{tang}\frac{x_1-y_1}{2}(dx_1+dy_1) = -\frac{e^{\frac{i(x_1-y_1)}{2}} - e^{-\frac{i(x_1-y_1)}{2}}}{e^{\frac{i(x_1-y_1)}{2}} + e^{-\frac{i(x_1-y_1)}{2}}}(dx_1+dy_1)$$

$$= -\frac{e^{ix_1}-e^{iy_1}}{e^{ix_1}+e^{iy_1}}(dx_1+dy_1),$$

ou bien

$$2\,d\theta = i\frac{x_2 - y_2}{x_2 + y_2}\left(\frac{dx_2}{x_2} + \frac{dy_2}{y_2}\right),$$

en faisant

$$e^{ix_1} = x_2, \quad e^{iy_1} = y_2.$$

Quant à la seconde équation, si l'on pose

$$f(x_1) = f(-i\log x_2) = \varphi(x_2),$$
$$f_1(y_1) = f_1(-i\log y_2) = \varphi_1(y_2),$$

elle revient d'abord à

$$\frac{dx_2}{dy_2} = \frac{\varphi'_1(y_2)}{\varphi'(x_2)}\,e^{2i\theta};$$

prenons les logarithmes et différentions par rapport à y_2, nous aurons

$$\frac{\dfrac{d^2x_2}{dy_2^2}}{\dfrac{dx_2}{dy_2}} = \frac{\varphi''_1(y_2)}{\varphi'_1(y_2)} - \frac{\varphi''(x_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{dx_2}{dy_2} + 2i\frac{d\theta}{dy_2},$$

d'où, en remplaçant $\dfrac{d\theta}{dy_2}$ par sa valeur,

$$\frac{\dfrac{d^2x_2}{dy_2^2}}{\dfrac{dx_2}{dy_2}} = \frac{\varphi''_1(y_2)}{\varphi'_1(y_2)} - \frac{\varphi''(x_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{dx_2}{dy_2} - \frac{x_2 - y_2}{x_2(x_2+y_2)}\frac{dx_2}{dy_2} - \frac{x_2 - y_2}{y_2(x_2+y_2)}.$$

Pour simplifier encore, je fais

$$\frac{dx_2}{dy_2} = \omega\,\frac{\varphi'_1(y_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{x_2}{y_2};$$

ce qui donne

$$\frac{\dfrac{d^2x_2}{dy_2^2}}{\dfrac{dx_2}{dy_2}} = \frac{\dfrac{d\omega}{dy_2}}{\omega} + \frac{\varphi''_1(y_2)}{\varphi'_1(y} - \frac{\varphi''(x_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{\dfrac{dx_2}{dy_2}}{x_2} - \frac{1}{y_2},$$

et j'obtiens

$$\frac{\frac{d\omega}{dy_2}}{\omega} = -\frac{2\frac{dx_2}{dy_2}}{x_2+y_2} + \frac{2}{x_2+y_2}.$$

Posant enfin

$$\frac{\varphi'(x_2)\,dx_2}{x_2} = dx_3, \quad \frac{\varphi'_1(y_2)\,dy_2}{y_2} = dy_3,$$

d'où

$$x_2 = \psi(x_3)$$

et

$$y_2 = \psi_1(y_3);$$

on a

$$(59) \qquad \frac{dx_3}{dy_3} = \omega, \quad \frac{d\omega}{\omega} = 2\,\frac{\psi'_1(y_3)\,dy_3 - \psi'(x_3)\,dx_3}{\psi_1(y_3)+\psi(x_3)},$$

et par conséquent

$$(60) \qquad \frac{d^2x_3}{dy_3^2}[\psi_1(y_3)+\psi(x_3)] = 2\psi'_1(y_3)\frac{dx_3}{dy_3} - 2\psi'(x_3)\left(\frac{dx_3}{dy_3}\right)^2.$$

Les deux équations simultanées du premier ordre (59), ou bien l'équation du second ordre (60), définissent les lignes géodésiques des surfaces d'étendue minimum. Ces équations, quoique d'une forme assez élégante, ne paraissent pas pouvoir être intégrées sans particulariser les fonctions ψ et ψ_1.

Nous joindrons encore aux formules précédentes celle qui donne l'élément lineaire ds de la surface en fonction des variables x_3 et y_3. Nous avons trouvé plus haut

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2 iy\left[\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\right](dx^2+dy^2) \\ &= 4\cos^2 iy f'(x+iy)f_1'(x-iy)(dx^2+dy^2), \end{aligned}$$

et de là on tire, en introduisant les variables x_1 et y_1,

$$ds^2 = \left[e^{\frac{i(x_1-y_1)}{2}} + e^{-\frac{i(x_1-y_1)}{2}}\right]^2 f'(x_1)f_1'(y_1)\,dx_1\,dy_1;$$

remplaçant e^{ix_1} par x_2, e^{iy_1} par y_2, on a encore

$$ds^2 = \left[\sqrt{\frac{x_2}{y_2}} + \sqrt{\frac{y_2}{x_2}}\right]^2 \varphi'(x_2)\varphi'_1(y_2)\,dx_2\,dy_2$$
$$= (x_2 + y_2)^2 \frac{\varphi'(x_2)}{x_2}\frac{\varphi'_1(y_2)}{y_2}\,dx_2 dy_2,$$

puis enfin

$$(61)\qquad ds^2 = [\psi(x_3) + \psi_1(y_3)]^2\,dx_3\,dy_3.$$

Occupons-nous maintenant de la recherche des surfaces d'étendue minimum qui remplissent certaines conditions géométriques.

Cherchons, en premier lieu, celles de ces surfaces qui sont de révolution ou plus généralement qui ont leurs lignes de première courbure dans des plans parallèles au plan des (ξ, η). On doit avoir pour ces surfaces

$$\zeta = \varphi(y) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{d\zeta}{dx} = 0,$$

et, en même temps,

$$\zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy);$$

de là on déduit

$$f'(x + iy) + f_1'(x - iy) = 0,$$

d'où

$$f'(x + iy) = a + ib, \quad f_1'(x - iy) = -(a + ib),$$

a et b étant des constantes réelles, par conséquent

$$f(x + iy) = (a + ib)(x + iy) + c + id,$$
$$f_1(x - iy) = -(a + ib)(x - iy) + e + if,$$

c, d, e, f étant quatre nouvelles constantes réelles; on a donc

$$\zeta = 2(a + ib)iy + c + e + i(d + f)$$

ou simplement

$$\zeta = -2by,$$

puisque ζ doit être réel et que la suppression d'une constante dans la valeur de ζ ne produit qu'un déplacement de la surface parallèlement aux ζ. On conclut de là que les surfaces cherchées se réduisent à la surface de révolution qui a pour méridienne une chaînette.

Déterminons, en second lieu, les surfaces d'étendue minimum qui peuvent être engendrées par le mouvement hélicoïdal autour de l'axe des ζ d'une courbe plane ou gauche. On a pour ces surfaces, d'abord

$$\frac{d\zeta}{dx} = m,$$

m étant une constante réelle, et puis

$$\zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy);$$

de là on déduit

$$f'(x + iy) + f'_1(x - iy) = m,$$

par suite

$$f'(x + iy) = a + ib, \quad f'_1(x - iy) = m - (a + ib),$$

d'où

$$f(x + iy) = (a + ib)(x + iy) + c + id,$$
$$f_1(x - iy) = (m - a - ib)(x - iy) + e + if,$$

d'où

$$\zeta = m(x - iy) + 2iy(a + ib) + c + e + i(d + f),$$

ou simplement

$$\zeta = mx - 2by,$$

ce qui donne la surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une hélice hyperbolique, surface que nous avons indiquée précédemment.

Cherchons encore les surfaces gauches d'étendue minimum.

Pour qu'une surface soit gauche, il faut et il suffit que les lignes asymptotiques de l'un des systèmes soient des droites : or la transformée sphérique d'une droite, quelle que soit la surface sur laquelle cette droite est tracée, est un grand cercle ; on conclut de là que les lignes asymptotiques de l'un des systèmes sont dans toute surface gauche représentées par les équations

$$\cos(x-\alpha) = \sin i\beta \sin iy, \quad \beta = \varphi(\alpha),$$

qui conviennent à un système quelconque de grands cercles. De ces équations on déduit, en différentiant deux fois,

$$-\cos(x-\alpha) = \sin i\beta \sin iy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + i \sin i\beta \cos iy \frac{d^2y}{dx^2},$$

ou

$$-\cos(x-\alpha) = \cos(x-\alpha)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + i\cos(x-\alpha)\cot iy \frac{d^2y}{dx^2}:$$

d'où

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) i \operatorname{tang} iy = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$\left(1+\frac{dx_1}{dy_1}\right)\frac{dx_1}{dy_1} \operatorname{tang}\frac{x_1-y_1}{2} = -\frac{d^2x_1}{dy_1^2},$$

en introduisant les deux variables x_1 et y_1 et prenant la seconde comme variable indépendante.

Maintenant nous avons vu précédemment que les équations des lignes asymptotiques d'une surface d'étendue minimum pour laquelle

$$\zeta = f(x+iy) + f_1(x-iy) = f(x_1) + f_1(y_1),$$

sont

$$\frac{dx_1}{dy_1} = \pm\frac{\sqrt{f'_1(y_1)}}{\sqrt{f'(x_1)}};$$

donc si nous posons

$$\sqrt{f'(x_1)} = \frac{1}{X_1}, \quad \pm\sqrt{f'_1(y_1)} = \frac{1}{Y_1},$$

nous aurons

$$\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{X_1}{Y_1};$$

d'où

$$\frac{\dfrac{d^2x_1}{dy_1^2}}{\dfrac{dx_1}{dy_1}} = \frac{X'_1}{X_1}\frac{dx_1}{dy_1} - \frac{Y'_1}{Y_1}.$$

En rapprochant cette équation de celle qui a été obtenue plus haut, on voit que pour que la surface d'étendue minimum soit gauche, il faut et il suffit que l'on ait, Y_1 étant réduit à l'une de ses deux valeurs,

$$\left(1+\frac{X_1}{Y_1}\right)\operatorname{tang}\frac{x_1-y_1}{2}=-\frac{X'_1}{Y_1}+\frac{Y'_1}{Y_1},$$

c'est-à-dire

$$(Y_1+X_1)(e^{ix_1}-e^{iy_1})=i(Y'_1-X'_1)(e^{ix_1}+e^{iy_1}),$$

ou bien

$$(62)\qquad e^{ix_1}(Y_1+X_1-iY'_1+iX'_1)=e^{iy_1}(Y_1+X_1+iY'_1-iX'_1);$$

différentions par rapport à x_1, puis par rapport à y_1, il vient

$$e^{ix_1}(Y_1-iY'_1)'=e^{iy_1}(X_1-iX'_1)',$$

ce qui exige que

$$(Y_1-iY'_1)'=2ime^{iy_1},\quad (X_1-iX'_1)'=2ime^{ix_1},$$

m étant une constante réelle ou imaginaire, et par suite que

$$\begin{aligned}Y_1-iY'_1&=2me^{iy_1}+2\alpha,\\ X_1-iX'_1&=2me^{ix_1}+2\beta,\end{aligned}$$

α et β étant deux nouvelles constantes de même nature. Portant ces valeurs dans l'équation (62), on a

$$e^{ix_1}(X_1+iX'_1+2\alpha)=e^{iy_1}(Y_1+iY'_1+2\beta),$$

d'où

$$\begin{aligned}X_1+iX'_1&=2ne^{-ix_1}-2\alpha,\\ Y_1+iY'_1&=2ne^{-iy_1}-2\beta.\end{aligned}$$

Rapprochant ces deux égalités des précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}X_1&=me^{ix_1}+ne^{-ix_1}+\beta-\alpha,\\ iX'_1&=ne^{-ix_1}-me^{ix_1}-\alpha-\beta,\\ Y_1&=me^{iy_1}+ne^{-iy_1}+\alpha-\beta,\\ iY'_1&=ne^{-iy_1}-me^{iy_1}-\alpha-\beta,\end{aligned}$$

ce qui ne peut être qu'autant que l'on a

$$\alpha + \beta = 0,$$

et par suite

$$X_1 = me^{ix_1} + ne^{-ix_1} - 2\alpha,$$
$$Y_1 = me^{iy_1} + ne^{-iy_1} + 2\alpha.$$

Reste à déterminer les constantes m, n et α. Pour cela supposons que l'on ait choisi les axes des ξ, η et ζ de façon que l'une des génératrices rectilignes de la surface soit parallèle à l'axe des η, et qu'une seconde génératrice soit parallèle au plan des (ξ, η) et fasse un angle égal à $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec l'axe des ξ. Nous aurons pour la première génératrice

$$x = 0, \quad f(x+iy) + f_1(x-iy) = \text{const},$$

par suite

$$f(iy) + f_1(-iy) = \text{const},$$

d'où

$$f'(iy) = f_1'(-iy);$$

puis, pour la seconde

$$x = k\pi, \quad f(x+iy) + f_1(x-iy) = \text{const},$$

par suite

$$f(k\pi + iy) + f_1(k\pi - iy) = \text{const},$$

d'où

$$f'(k\pi + iy) = f_1'(k\pi - iy).$$

De là on déduit, en se rappelant les relations qui lient $f'(x_1)$ et $f_1'(y_1)$ à X_1 et Y_1,

$$(me^{-y} + ne^{y} - 2\alpha)^2 = (me^{y} + ne^{-y} + 2\alpha)^2,$$
$$(me^{ik\pi-y} + ne^{-ik\pi+y} - 2\alpha)^2 = (me^{ik\pi+y} + ne^{-ik\pi-y} + 2\alpha)^2;$$

la première condition donne

$$m^2 - n^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2\alpha(m+n) = 0,$$

et la seconde

$$m^2 e^{4ik\pi} - n^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(me^{2ik\pi} + n) = 0;$$

comme on peut toujours supposer k tel, que l'on n'ait pas $e^{4ik\pi} = 1$, on voit que les conditions précédentes ne peuvent être satisfaites que si $m = n = 0$. Ainsi on a

$$X_1 = -2\alpha, \quad Y_1 = 2\alpha,$$

par suite

$$f'(x_1) = \frac{1}{4\alpha^2}, \quad f'(y_1) = \frac{1}{4\alpha^2},$$

donc

$$\zeta = (a + ib)(x + iy) + (a + ib)(x - iy) + c + id,$$

a, b, c, d étant des constantes réelles, ou simplement

$$\zeta = 2ax.$$

Par conséquent la seule surface gauche d'étendue minimum est l'héli-coïde gauche à plan directeur.

Cherchons enfin les surfaces d'étendue minimum qui ont toutes leurs lignes de courbures planes.

On a pour ces surfaces

$$v[\tang^2 x + \tang^2 i(y - m)] + (u - w)\tang x . i\tang i(y - m) = 0$$

et

$$u + w = 0,$$

par conséquent

$$[\tang^2 x + \tang^2 i(y - m)]\frac{d\zeta}{dx} - 2\tang x . i\tang i(y - m)\frac{d\zeta}{dy} = 0$$

et

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0.$$

La première équation considérée isolément s'intègre sans difficulté.

En effet, en posant conformément à la méthode connue

$$\frac{dx}{\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 i(y-m)} = \frac{dy}{-2\operatorname{tang} x . i \operatorname{tang} i(y-n)} = \frac{d\zeta}{0},$$

on trouve d'abord

$$\zeta = C, \quad \cot[x + i(y-m)] = \cot[x - i(y-m)] + C',$$

et puis

$$\zeta = F\{\cot[x + i(y-m)] - \cot[x - i(y-m)]\},$$

pour l'intégrale cherchée.

Déterminons maintenant la fonction arbitraire F par la condition que la valeur de ζ satisfasse à la seconde équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0.$$

En différentiant deux fois par rapport à x et par rapport à y la valeur de ζ, on trouve

$$\frac{d\zeta}{dx} = F' . \left\{ \frac{-1}{\sin^2[x + i(y-m)]} + \frac{1}{\sin^2[x - i(y-m)]} \right\},$$

$$\frac{d\zeta}{dy} = F' . \left\{ \frac{-i}{\sin^2[x + i(y-m)]} - \frac{i}{\sin^2[x - i(y-m)]} \right\},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = F'' . \left\{ \frac{-1}{\sin^2[x + i(y-m)]} + \frac{1}{\sin^2[x - i(y-m)]} \right\}^2$$
$$+ 2F' . \left\{ \frac{\cos[x + i(y-m)]}{\sin^3[x + i(y-m)]} - \frac{\cos[x - i(y-m)]}{\sin^3[x - i(y-m)]} \right\}.$$

$$\frac{d^2\zeta}{dy^2} = F'' \left\{ \frac{i}{\sin^2[x + i(y-m)]} + \frac{i}{\sin^2[x - i(y-m)]} \right\}^2$$
$$+ 2F' \left\{ \frac{-\cos[x + i(y-m)]}{\sin^3[x + i(y-m)]} + \frac{\cos[x - i(y-m)]}{\sin^3[x - i(y-m)]} \right\},$$

F′ et F″ étant les dérivées première et seconde de la fonction F par rapport à la variable $\cot[x + i(y-m)] - \cot[x - i(y-m)]$ dont elle dépend. De là on tire

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = -4F'' \frac{1}{\sin^2[x + i(y-m)] \sin^2[x - i(y-m)]},$$

donc pour que

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\zeta}{dy^2}=0,$$

on doit avoir

$$F''=0,$$

d'où

$$\zeta=-\frac{ai}{2}\{\cot[x+i(y-m)]-\cot[x-i(y-m)]\},$$

a étant une constante réelle.

La valeur de ζ étant connue, nous avons encore à calculer z au moyen de la formule

$$z=\mathrm{C}\cos x+\mathrm{C}'\sin x+\int_0^x\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0}\sin(\alpha-x)d\alpha+\int_0^y\zeta\cos iy\,dy;$$

or on a d'abord

$$\int_0^y\zeta\cos iy\,dy=-\frac{ai}{2}\int_0^y\cos iy\left\{\frac{\cos[x+i(y-m)]}{\sin[x+i(y-m)]}-\frac{\cos[x-i(y-m)]}{\sin[x-i(y-m)]}\right\}dy$$
$$=-\frac{ai}{2}\int_0^y\frac{\cos iy\sin 2i(y-m)}{\cos^2x-\cos^2i(y-m)}dy,$$

donc, en posant

$$y=m+y_1,$$

il vient

$$\int_0^y\zeta\cos iy\,dy=-ai\int_{-m}^{y_1}\frac{(\cos im\cos iy_1-\sin im\sin iy_1)\sin iy_1\cos iy}{\cos^2x-\cos^2iy_1}dy_1$$
$$=a\cos im\int_{-m}^{y_1}\frac{\cos^2 iy_1\,d.\cos iy_1}{\cos^2x-\cos^2iy_1}-a\sin im\int_{-m}^{y_1}\frac{\sin^2iy_1 d\ \sin iy_1}{\sin^2x-\sin^2iy_1},$$

et, en observant que, en général,

$$\int\frac{t^2dt}{k^2-t^2}=-\int dt-ki\int\frac{d.\frac{it}{k}}{1+\left(\frac{it}{k}\right)^2}=-t-ki\,\mathrm{arc\,tang}\frac{it}{k}+\mathrm{C},$$

on trouve

$$\int_0^y \zeta \cos iy\, dy = -a\cos im.\cos iy_1 + a\cos^2 im + a\sin im.\sin iy_1 + a\sin^2 im$$

$$- a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\,\frac{i\cos iy_1}{\cos x} + a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\,\frac{i\cos im}{\cos x}$$

$$+ a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\,\frac{i\sin iy_1}{\sin x} + a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\,\frac{i\sin im}{\sin x}$$

$$= a - a\cos iy - a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\,\frac{i\cos i(y-m)}{\cos x}$$

$$+ a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\,\frac{i\cos im}{\cos x} + a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\,\frac{i\sin i(y-m)}{\sin x}$$

$$+ a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\,\frac{i\sin im}{\sin x}.$$

D'autre part

$$\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha$$

$$= -\frac{a}{2}\int_0^x \sin(\alpha - x)\left[\frac{1}{\sin^2(\alpha - im)} + \frac{1}{\sin^2(\alpha + im)}\right] d\alpha$$

$$= -a\int_0^x \frac{(\sin\alpha\cos x - \cos\alpha\sin x)(\sin^2\alpha\cos^2 im + \cos^2\alpha\sin^2 im)}{(\cos^2\alpha - \cos^2 im)^2}\, d\alpha$$

$$= a\cos x\int_0^x \frac{\cos^2 im - (\cos^2 im - \sin^2 im)\cos^2\alpha}{(\cos^2\alpha - \cos^2 im)^2}\, d.\cos\alpha$$

$$+ a\sin x\int_0^x \frac{\sin^2 im + (\cos^2 im - \sin^2 im)\sin^2\alpha}{(\sin^2\alpha - \sin^2 im)^2}\, d.\sin\alpha,$$

et, en effectuant les intégrations qui n'offrent aucune difficulté,

$$\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha$$

$$= -a\frac{\sin^2 im.\cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^2 im} - a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\,\frac{i\cos x}{\cos im}$$

$$- a\frac{\cos^2 im.\sin^2 x}{\sin^2 x - \sin^2 im} + a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\,\frac{\sin x}{i\sin im}$$

$$= -a - a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\,\frac{i\cos x}{\cos im} + a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\,\frac{\sin x}{i\sin im},$$

sans tenir compte des termes de la forme $C\cos x + C'\sin x$.

Réunissant la valeur de $\int_0^y \zeta \cos iy\,dy$ à celle de $\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha, 0} \sin(\alpha - x)\,d\alpha$, et observant que

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{i \sin im}{\sin x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin x}{i \sin im}$$

et

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{i \cos im}{\cos x} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{i \cos x}{\cos im},$$

on obtient

$$z = C\cos x + C'\sin x - a\cos iy - a\cos x.\cos im.i \operatorname{arc\,tang} \frac{i\cos i(y-m)}{\cos x}$$
$$+ a\sin x.i\sin im.\operatorname{arc\,tang} \frac{i\sin i(y-m)}{\sin x},$$

ou simplement

$$z = -a\cos iy - a\cos x.\cos im.i\operatorname{arc\,tang} \frac{i\cos i(y-m)}{\cos x}$$
$$+ a\sin x.i\sin im.\operatorname{arc\,tang} \frac{i\sin i(y-m)}{\sin x},$$

en négligeant les termes en $\cos x$ et en $\sin x$.

Pour avoir les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface, on pourrait se borner à substituer la valeur de z que l'on vient d'obtenir dans les égalités (4), mais on arrive plus rapidement au résultat de la manière suivante :

Exprimons d'abord z en fonction des variables α et β qui définissent les lignes de première et de seconde courbure de la surface. A cet effet, observons que, d'après des formules établies au paragraphe précédent, on a

$$\cos x = \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad \sin x = \frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\cos i(y-m) = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad i\sin i(y-m) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\cos iy = \frac{\cos im.\sqrt{1+\beta^2} + i\sin im.\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad i\sin iy = \frac{\cos im.\sqrt{1-\alpha^2} + i\sin im.\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$

donc,

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z = -\,a\cos im.\sqrt{1+\beta^2} - ai\sin im.\sqrt{1-\alpha^2}$$
$$-\,a\cos im.\alpha\sqrt{1+\beta^2}\,i\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{i}{\alpha} + ai\sin im.\beta\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{i}{\beta},$$

ou bien

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z = -\,a\cos im.\sqrt{1+\beta^2} - ai\sin im.\sqrt{1-\alpha^2}$$
$$-\,a\cos im.\alpha\sqrt{1+\beta^2}\,i\,\mathrm{arc\,tang}\,i\alpha - ai\sin im.\beta\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\beta,$$

en négligeant des termes de la forme $C\cos x + C'\sin x$ dans la valeur de z.

Maintenant l'équation du plan tangent, étant en général

$$X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = -z,$$

si nous substituons à $\cos x$, $\sin x$, $i\sin y$, z leurs valeurs en α et β, il vient

$$X\alpha\sqrt{1+\beta^2} + Y\beta\sqrt{1-\alpha^2} + Z\left(\cos im.\sqrt{1-\alpha^2} + i\sin im.\sqrt{1+\beta^2}\right)$$
$$= a\cos im.\sqrt{1+\beta^2} + ai\sin im.\sqrt{1-\alpha^2} + a\cos im.\alpha\sqrt{1+\beta^2}\,i\,\mathrm{arc\,tang}\,i\alpha$$
$$+\,ai\sin im.\beta\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\beta,$$

ou bien, en remplaçant $\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ par α et $\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$ par β,

$$\alpha X + \beta Y + \left(\cos im.\sqrt{1-\beta^2} + i\sin im.\sqrt{1+\alpha^2}\right)Z$$
$$= a\cos im.\sqrt{1+\alpha^2} + ai\sin im.\sqrt{1-\beta^2} + a\cos im.\alpha i\,\mathrm{arc\,sin}\,i\alpha$$
$$+\,ai\sin im.\beta\,\mathrm{arc\,sin}\,\beta.$$

Or, les coordonnées ξ, η, ζ doivent vérifier l'équation du plan tangent et ses dérivées partielles relatives à α et à β; on a donc les trois équations

$$\alpha\xi + \beta\eta + \left(\cos im.\sqrt{1-\beta^2} + i\sin im.\sqrt{1+\alpha^2}\right)\zeta$$
$$= a\cos im.\sqrt{1+\alpha^2} + ai\sin im.\sqrt{1-\beta^2} + a\cos im.\alpha i\,\mathrm{arc\,sin}\,i\alpha$$
$$+\,ai\sin im.\beta\,\mathrm{arc\,sin}\,\beta,$$

$$\xi + \frac{\alpha i \sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}\zeta = a\cos im.i \operatorname{arc}\sin i\alpha,$$

$$\eta - \frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\zeta = ai\sin im.\operatorname{arc}\sin\beta,$$

pour déterminer les coordonnées ξ, η, ζ. A la place de la première de ces équations, on peut prendre celle-ci :

$$\zeta = a\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2},$$

qui résulte de l'élimination de ξ et de η, et on a le système plus simple

$$\xi + \frac{\alpha i \sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}\zeta = a\cos im.i \operatorname{arc}\sin i\alpha,$$

$$\eta - \frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\zeta = ai\sin im.\operatorname{arc}\sin\beta,$$

$$\zeta = a\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2};$$

que l'on peut encore remplacer par le suivant :

$$\begin{aligned}
\xi - \zeta\sin im \operatorname{tang} i\alpha &= a\alpha\cos im,\\
\eta - \zeta\cos im \operatorname{tang}\beta &= a\beta i \sin im,\\
\zeta &= a\cos i\alpha.\cos\beta,
\end{aligned}$$

en substituant α à $i\operatorname{arc}\sin i\alpha$, et β à $\operatorname{arc}\sin\beta$; lequel donne enfin

$$\begin{aligned}
\xi &= a\alpha\cos im + a\sin im.\sin i\alpha.\cos\beta,\\
\eta &= a\beta i\sin im + a\cos im.\cos i\alpha.\sin\beta,\\
\zeta &= a\cos i\alpha.\cos\beta.
\end{aligned}$$

Nous allons, en dernier lieu, nous proposer de fixer les fonctions arbitraires f et f_1 qui entrent dans l'équation intégrale

$$\zeta = f(x+iy) + f_1(x-iy)$$

des surfaces d'étendue minimum, par la condition que ces surfaces passent par des lignes données. Ce problème, considéré dans toute sa généralité, est très-difficile à résoudre; nous nous bornerons ici à traiter quelques cas particuliers intéressants.

Proposons-nous d'abord de trouver les surfaces d'étendue minimum qui passent par deux droites données. Supposons que l'une des droites se confonde avec l'axe des η et que l'autre soit parallèle au plan de (ξ, η), rencontre l'axe des ζ au point dont le ζ est h et fasse un angle égal à $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec l'axe des ζ; nous aurons, quel que soit y,

$$\begin{aligned} \zeta &= 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \\ \zeta &= h \quad \text{pour} \quad x = k\pi; \end{aligned}$$

donc, en mettant la valeur générale de ζ sous la forme

$$\zeta = \frac{1}{2}[\varphi(y + ix) + \varphi(y - ix)] + \frac{i}{2}[\varphi_1(y + ix) - \varphi_1(y - ix)],$$

il faudra que

$$\varphi(y) = 0, \quad \frac{i}{2}[\varphi_1(y + ik\pi) - \varphi_1(y - ik\pi)] = h.$$

La première condition montre que la fonction φ ne doit pas figurer dans la valeur générale de ζ; quant à la seconde, si nous posons

$$\varphi_1(z) = -\frac{h}{k\pi}z + \varphi_2(z),$$

elle devient

$$\varphi_2(y + ik\pi) = \varphi_2(y - ik\pi)$$

et donne alors

$$\varphi_2(z) = \Sigma \mathrm{A}_p e^{\frac{pz}{k}},$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs entières de p. Cela posé, on a

$$\zeta = \frac{h}{k\pi}x + \Sigma \mathrm{A}_p e^{\frac{p}{k}y} \sin \frac{p}{k} x.$$

Si l'on voulait que la surface passât, en outre, par une troisième droite parallèle au plan des (ξ, η), et telle, que $\zeta = h'$, $x = k'\pi$, il faudrait que l'on eût pour toutes les valeurs de y

$$h' = \frac{hk'}{k} + \Sigma A_p e^{\frac{p}{k}y} \sin \frac{pk'}{k}\pi.$$

Il n'est pas possible de satisfaire à cette condition quand $\frac{k'}{k}$ est incommensurable, à moins de supposer $A_p = 0$, ce qui conduit à l'hélicoïde; mais si $\frac{k'}{k}$ est égal au rapport $\frac{n'}{n}$ de deux entiers, on la rend identique en prenant pour p des multiples de n; encore faut-il que la condition $\frac{h}{h'} = \frac{k}{k'}$ soit remplie. On arriverait à des conclusions analogues dans le cas où la surface devrait contenir plus de trois droites parallèles au plan des (ξ, η).

Il y a à faire sur la solution précédente une remarque essentielle : d'après la manière même dont nous avons opéré, nous avons seulement obtenu une surface qui passe par des droites parallèles aux droites données, de telle sorte que l'on a encore à fixer les constantes qui s'introduisent dans le calcul de z, de façon que les droites données aient chacune un point sur la surface. Comme il n'y a que deux constantes, on voit que lorsque le nombre des droites surpasse deux, on est conduit à des équations de condition.

Le problème précédent a été résolu avant nous, mais d'une manière moins simple, par M. J.-A. Serret (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL).

Cherchons, en second lieu la surface d'étendue minimum qui passe par l'axe des ξ et qui coupe à angle droit le plan parallèle au plan des (ξ, η) représenté par l'équation

$$\zeta = h.$$

La question revient à ceci : Trouver la valeur de ζ, c'est-à-dire l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0,$$

qui pour $x = \frac{1}{2}\pi$ se réduit à zéro et pour $y = 0$ se réduit à h. On reconnaît que cette valeur de ζ est celle qui exprime le système des températures permanentes dans une lame rectangulaire indéfinie dont l'extrémité est entretenue à la température h et les deux arêtes infinies à la température zéro; en empruntant le résultat obtenu par Fourier, on a donc

$$\zeta = \frac{2h}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tang} e^{i(x+iy)} + \operatorname{arc\,tang} e^{-i(x-iy)}\right\} = \frac{2h}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy}.$$

Calculons maintenant z au moyen de la formule

$$z = \mathrm{C}\cos x + \mathrm{C}'\sin x + \int_0^y \zeta\cos iy\,dy + \int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0}\sin(\alpha - x)\,d\alpha.$$

Or, dans le cas actuel,

$$\int_0^y \zeta\cos iy\,dy = \frac{2h}{\pi}\int_0^y \cos iy.\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy}\,dy$$

$$= -\frac{2h}{\pi}i\sin iy.\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy} - \frac{2h}{\pi}\cos x.\log\frac{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}}{\cos x},$$

puis

$$\int_0^y \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0}\sin(\alpha - x)\,d\alpha = \frac{2h}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(\alpha - x)}{\cos\alpha}\,d\alpha$$

$$= -\frac{2h}{\pi}\cos x.\log\cos x - \frac{2h}{\pi}x\sin x,$$

donc

$$z = -\frac{2h}{\pi}x\sin x - \frac{2h}{\pi}i\sin iy.\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy} - \frac{2h}{\pi}\cos x.\log\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy};$$

substituant cette valeur de z dans les relations (4), on a pour déterminer les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface, les trois équations

$$\xi\cos x + \eta\sin x = \frac{2h}{\pi}\left\{x\sin x + \cos x.\log\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}\right\},$$

$$\xi\sin x - \eta\cos x = \frac{2h}{\pi}\left\{\sin x.\log\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy} - x\cos x\right\},$$

$$\zeta = \frac{2h}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy} = \frac{2h}{\pi}\operatorname{arc\,sin}\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}}.$$

d'où l'on tire

$$\xi = \frac{2h}{\pi} \log \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}, \quad \eta = \frac{2h}{\pi} x, \quad \zeta = \frac{2h}{\pi} \operatorname{arc\,sin} \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}};$$

et enfin

$$\xi = \frac{2h}{\pi} \log \frac{\cos \frac{\pi}{2h} \eta}{\sin \frac{\pi}{2h} \zeta},$$

Cette surface, qui correspond, comme on l'a vu plus haut, à la première question résolue par Fourier dans sa théorie mathématique de la chaleur, a été indiquée depuis longtemps : on la trouve dans un Mémoire de M. Scherk, inséré dans le tome XIII du *Journal de Crelle*.

Proposons-nous encore de trouver la surface d'étendue minimum qui touche une surface donnée suivant une certaine courbe ou, ce qui revient au même, qui passe par une courbe le long de laquelle on connaît la direction de la normale.

Soit

$$y = \varphi(x),$$

ou mieux

$$y_1 = \varphi(x_1)$$

en introduisant les variables $x_1 = x + iy$, $y_1 = x - iy$, la relation connue qui définit la direction des normales à la surface cherchée, tout le long de la ligne donnée; supposons d'ailleurs que l'on ait exprimé en fonction de x_1, la coordonnée ζ et l'arc σ de la courbe donnée et que l'on ait

$$\zeta = \varphi_1(x_1), \quad \sigma = \varphi_2(x_1).$$

Si l'on observe que le carré de l'élément d'une courbe quelconque tracée sur une surface d'étendue minimum est

$$ds^2 = 4 \cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2} \frac{d\zeta}{dx_1} \frac{d\zeta}{dy_1} dx_1 dy_1,$$

on voit qu'il s'agira de déterminer les fonctions arbitraires f et f_1 qui entrent dans la valeur générale de ζ,

$$\zeta = f(x_1) + f_1(y_1),$$

par la condition que l'on ait

$$f(x_1)+f_1(y_1)=\varphi_1(x_1),$$
$$4\cos^2\frac{x_1-y_1}{2}f'(x_1)f'_1(y_1)dy_1=[\varphi'_2(x_1)]^2dx_1,$$

lorsque

$$y_1=\varphi(x_1);$$

ou, ce qui revient au même, de façon que

$$f'(x_1)+f'_1(y_1)\varphi'(x_1)=\varphi'_1(x_1)$$
$$4\cos^2\frac{x_1-y_1}{2}f'(x_1)f'_1(y_1)\varphi'(x_1)=[\varphi'_2(x_1)]^2$$

toujours pour

$$y_1=\varphi(x_1).$$

Or les deux dernières équations font connaître les dérivées $f'(x_1)$, $f'_1(y_1)$; d'ailleurs, au moyen de la relation $y_1=\varphi(x_1)$, ces dérivées peuvent s'exprimer la première en fonction de x_1 seulement, la seconde en fonction de y_1 seulement : on peut donc par des quadratures avoir aussi les fonctions $f(x_1)$, $f_1(y_1)$ elles-mêmes, et la surface est ainsi déterminée.

Observons toutefois que notre calcul introduit trois constantes arbitraires, ce qui ne doit pas surprendre, puisque nous avons seulement employé les dérivées des équations

$$\zeta=\varphi_1(x_1),\quad \sigma=\varphi_2(x_1);$$

nous aurons donc encore, dans chaque cas particulier, à fixer les trois constantes par la condition que la surface passe réellement par la courbe donnée.

La solution précédente conduit surtout à des résultats simples lorsqu'il s'agit de trouver la surface d'étendue minimum qui touche une sphère suivant une certaine courbe. En effet, en prenant le rayon de la sphère pour unité, nous avons alors pour la courbe donnée

$$\zeta=i\,\mathrm{tang}\,iy,\quad d\sigma^2=\frac{1}{\cos^2 iy}(dx^2+dy^2),$$

ou bien

$$\zeta = i \operatorname{tang} \frac{x_1 - y_1}{2}, \quad d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}} dx_1 dy_1;$$

donc les équations qui déterminent $f'(x_1)$ et $f_1'(y_1)$ se réduisent à

$$f'(x_1) + f'_1(y_1)\varphi'(x_1) = \frac{i}{2} \frac{1 - \varphi'(x_1)}{\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}},$$

$$f'(x_1) f'_1(y_1) = \frac{1}{4 \cos^4 \frac{x_1 - y_1}{2}};$$

d'où l'on tire

$$f'(x_1) = \frac{i}{2\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}},$$

$$f'(y_1) = \frac{-i}{2\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}},$$

ou bien

$$f'(x_1) = \frac{-i\varphi'(x_1)}{2\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}},$$

$$f'(y_1) = \frac{i}{2\varphi'(x_1)\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}}.$$

La seconde solution rentre dans la première, car elle donne pour $f(x_1)$ la valeur que la première fournit pour $f_1(y_1)$, et pour $f_1(y_1)$ la valeur que la première fournit pour $f(x_1)$; nous pouvons donc nous borner à la première solution ; ainsi en exprimaut

$$\frac{i}{2\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}}$$

en fonction de x_1 au moyen de la relation $y_1 = \varphi(x_1)$, et intégrant par rapport à x_1 nous aurons $f(x_1)$; de même, en exprimant

$$\frac{-i}{2\cos^2\frac{x_1-y_1}{2}}$$

en fonction de y_1 et intégrant par rapport à y_1, nous aurons $f_1(y_1)$.

Faisons une application simple : supposons que la courbe tracée sur la sphère soit la loxodromie représentée par l'équation $y=x$, laquelle équation donne

$$y_1=-ix_1 \quad \text{et} \quad x_1=iy_1.$$

En opérant comme il a été indiqué, on trouve sans difficulté

$$f(x_1)=\frac{1+i}{2}\operatorname{tang}\left[\frac{(1+i)x_1}{2}\right]+\text{const.},$$

$$f(y_1)=\frac{1-i}{2}\operatorname{tang}\left[\frac{(1-i)y_1}{2}\right]+\text{const.},$$

et, par suite,

$$\zeta=\frac{1+i}{2}\operatorname{tang}\left[\frac{1+i}{2}(x+iy)\right]+\frac{1-i}{2}\operatorname{tang}\left[\frac{1-i}{2}(x-iy)\right].$$

Le problème général que nous venons de résoudre permet de déterminer une surface d'étendue minimum d'après l'une des conditions suivantes :

1°. Connaissant une de ses lignes géodésiques;
2°. Connaissant une de ses lignes asymptotiques;
3°. Connaissant une de ses lignes de courbure;
4°. Connaissant une de ses lignes d'ombre;
5°. Connaissant une de ses lignes de perspective.

En effet, dans chacun de ces cas, on connaît la direction que doit avoir la normale à la surface tout le long de la ligne donnée. Dans le premier cas, les normales à la surface sont les normales principales de la ligne donnée; dans le second cas, les normales à la surface sont les bi-normales de la ligne donnée; dans le troisième cas, les normales à la surface sont l'un des systèmes de normales à la ligne donnée qui forment une surface développable, etc.

Faisons quelques applications.

Cherchons, en premier lieu, la surface d'étendue minimum qui admet pour ligne asymptotique une hélice donnée. Supposons le cylindre sur lequel l'hélice est tracée parallèle aux ζ; représentons sa base par l'équation

$$\sigma = \varphi(x),$$

où σ désigne l'arc de la courbe compté à partir d'une origine fixe, et x l'angle que la tangente prolongée du côté des σ négatifs fait avec l'axe des ξ; enfin appelons $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ l'angle que les tangentes à l'hélice font avec l'axe de ζ; nous trouverons sans difficulté pour la surface cherchée

$$\zeta = \frac{1}{2i\sin iy_0}\{\varphi[x + i(y - y_0)] + \varphi[x - i(y - y_0)]\},$$

y_0 dépendant de θ_0 par la relation $\tang\frac{1}{2}\theta_0 = e^{y_0}$

Cherchons, en second lieu, la surface d'étendue minimum qui admet pour ligne de courbure une ligne plane donnée.

Supposons la courbe donnée dans le plan des (ξ, η) et représentons-la par l'équation

$$\sigma = \varphi(x),$$

où σ désigne l'arc de la courbe compté à partir d'une origine fixe, et x l'angle que la normale à l'extrémité de σ fait avec l'axe des ξ, on aura pour l'équation de la surface cherchée

$$\zeta = \frac{i}{2\cos iy_0}\{\varphi[x + i(y - y_0)] - \varphi[x - i(y - y_0)]\},$$

y_0 étant une constante arbitraire.

IX. — Surfaces pour lesquelles la somme des deux rayons de courbure principaux est double de la normale.

L'équation (25) donne immédiatement

$$u + w + \frac{2\zeta}{i\sin iy} = 0, \tag{63}$$

ou

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} - 2i \cot iy \cdot \frac{dz}{dy} + z = 0, \tag{64}$$

pour l'équation aux différentielles partielles des surfaces cherchées.

Je pose

$$z = \int \omega i \sin iy dy\ ;$$

en substituant dans l'équation (64) et différentiant par rapport à y, il vient

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation de la chaleur, comme dans le cas des surfaces d'étendue minimum. On a donc

$$\omega = f(x + iy) + f_1(x - iy),$$

f et f_1 étant deux fonctions réelles ou imaginaires quelconques et par conséquent

$$z = \int \{f(x + iy) + f_1(x - iy)\}\, i \sin iy dy,$$

où la fonction de x qui accompagne l'intégrale doit encore être déterminée par la condition que l'équation (64) soit satisfaite.

Le calcul général de cette fonction de x n'offre aucune difficulté, il suffit de suivre la marche qui a déjà été indiquée à l'égard de l'intégrale des surfaces d'étendue minimum, et l'on trouve

$$z = \mathrm{C} \cos x + \mathrm{C}' \sin x + \int_0^y \omega i \sin iy dy + \int_0^x \omega_{\alpha,0} \sin(\alpha - x) d\alpha,$$

$\omega_{\alpha,0}$ étant la valeur que prend ω pour $x = \alpha$ et $y = 0$.

On reconnaît sans peine que

$$\zeta = i \operatorname{tang} iy \cdot \omega,$$

de telle sorte que, ω étant connu, on a ζ, par suite

$$v = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dx}, \quad w = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dy},$$

puis enfin u au moyen de l'équation (63). Ceci fait voir d'une seconde manière que la surface est complétement déterminée, du moins quant à la forme, lorsque à la valeur de ω, on joint la condition

$$u + w + \frac{2\zeta}{i \sin iy} = 0.$$

Nous aurions beaucoup de choses à dire sur les surfaces considérées; leur analogie, au point de vue analytique, avec les surfaces d'étendue minimum fait pressentir en effet que l'on peut résoudre pour ces surfaces les mêmes problèmes que pour les surfaces d'étendue minimum. Nous nous bornerons à indiquer une propriété assez curieuse relative aux lignes de courbure.

En calculant, comme on l'a indiqué plus haut, les valeurs de u, v, w, on trouve

$$v = i \sin iy \left\{ f'(x+iy) + f'_1(x-iy) \right\},$$

$$w = -\sin iy \left\{ f'(x+iy) - f'_1(x-iy) \right\} - \frac{1}{\cos iy} \left\{ f(x+iy) + f_1(x-iy) \right\},$$

$$u = \sin iy \left\{ f'(x+iy) - f'_1(x-iy) \right\} - \frac{1}{\cos iy} \left\{ f(x+iy) + f_1(x-iy) \right\}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (23), il vient

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2i \frac{f'(x+iy) - f'_1(x-iy)}{f'(x+iy) + f'_1(x-iy)} \frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

pour l'équation des lignes de courbure des surfaces considérées : or cette équation est aussi celle des lignes de courbure des surfaces d'étendue minimum; nous pouvons donc conclure qu'à chaque surface d'étendue minimum correspond une surface ayant en chaque point la somme des deux rayons de courbure principaux égale au double de la normale et dont les lignes de courbure sont respectivement parallèles à celles de la surface d'étendue minimum. Ainsi, au plan correspond la sphère, à la surface d'étendue minimum du genre hélicoïde correspond la surface dont les coordonnées ξ, η, ζ

vérifient les équations

$$\xi \sin x - \eta \cos x = - a \cos iy + a \cos x,$$

$$\xi \cos x + \eta \sin x = \frac{ax + by}{\cos iy} + bi \sin iy - a \sin x,$$

$$\zeta = (ax + by)\, i \operatorname{tang} iy.$$

Lorsque $a = 0$, cette dernière surface devient la surface de révolution qui a pour méridien la courbe définie par les deux équations

$$\xi = \frac{by}{\cos iy} + bi \sin iy,$$

$$\zeta = by i \operatorname{tang} iy.$$

Signalons encore une surface à lignes de courbures planes, que l'on obtient en posant

$$\omega = -\frac{ai}{2}\left\{ \cot[x + i(y - m)] - \cot[x - i(y - m)] \right\}.$$

En portant cette valeur de ω dans l'expression générale de z,

$$z = \mathrm{C} \cos x + \mathrm{C}' \sin x + \int_0^y \omega i \sin iy dy + \int_0^x \omega_{\alpha, 0} \sin(\alpha - x) d\alpha,$$

on trouve, par un calcul dont on a déjà indiqué les détails,

$$z = - ai \sin iy + a \sin im . \cos x . \operatorname{arc\,tang} \frac{i \cos i(y - m)}{\cos x}$$
$$+ a \cos im . \sin x . \operatorname{arc\,tang} \frac{i \sin i(y - m)}{\sin x},$$

puis on a, pour déterminer les trois coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface, les équations

$$\xi + \zeta \sin im . \operatorname{tang} i\alpha = - a\alpha i \sin im,$$

$$\eta - \zeta \cos im . \operatorname{tang} \beta = a\beta \cos im,$$

$$\zeta\left(\frac{i \sin im}{\cos i\alpha} + \frac{\cos im}{\cos \beta}\right) = ai \sin im . \cos i\alpha + a \cos im . \cos \beta.$$

X. — Surfaces applicables sur la sphère.

Les surfaces applicables sur la sphère ou plus généralement celles dont les rayons de courbure principaux ont un produit constant sont caractérisées par la condition

$$uw - v^2 = \frac{-a^2}{\cos^2 iy}, \tag{65}$$

a étant une constante réelle ou imaginaire.

En tirant de l'équation précédente la valeur de u et différentiant par rapport à y, il vient, à cause des relations (8),

$$q^2 r - 2pqs + \left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right) t + i \operatorname{tang} iy . q \left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right) = 0, \tag{66}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{d\zeta}{dx} = p, \quad \frac{d\zeta}{dy} = q, \quad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2\zeta}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2\zeta}{dy^2} = t.$$

L'intégration de l'équation (66) me paraît offrir de grandes difficultés: les nombreuses tentatives que j'ai faites à cet égard ont toujours été infructueuses; je n'ai pu jusqu'ici qu'opérer une certaine réduction, qui constitue toutefois, selon les idées généralement admises, un premier pas vers l'intégration définitive.

On sait que les équations aux différentielles partielles du second ordre dans lesquelles il n'entre que la dérivée ordinairement représentée par s, forment le type le plus simple, et que c'est d'abord à des équations de cette forme que l'on cherche à ramener les équations plus générales dont on se propose l'intégration. Ampère, dans le grand Mémoire qui fait partie du XVIII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* conseille toujours la réduction dont nous venons de parler, et indique le moyen de l'effectuer toutes les fois que les équations aux différentielles ordinaires de la caractéristique de Monge conduisent à deux combinaisons intégrables. L'équation (66) ne rentre pas dans le cas traité par Ampère, les équations de la caractéristique n'admettent en effet aucune combinaison intégrale; cependant il est possible d'en faire disparaître les termes en r et t. La méthode que j'emploie pour opérer cette réduction s'étend à un grand nombre d'autres équations;

je pense faire une chose utile en en présentant ici une première application.

Considérons, à l'exemple d'Ampère, x et par suite z, p et q, comme fonctions de y et d'une nouvelle variable α; désignons par les symboles $\frac{\partial .}{\partial y}$, $\frac{\partial .}{\partial \alpha}$ les dérivées relatives à ces nouvelles variables y et α, nous aurons

$$dz = p\left(\frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha\right) + q\,dy = \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial \alpha}d\alpha,$$

$$dp = r\left(\frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha\right) + s\,dy = \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial \alpha}d\alpha,$$

$$dq = s\left(\frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha\right) + t\,dy = \frac{\partial q}{\partial y}dy + \frac{\partial q}{\partial \alpha}d\alpha,$$

égalités qui ont lieu pour toutes les valeurs de dy et de $d\alpha$, et qui, par conséquent, entraînent les suivantes :

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} &p\frac{\partial x}{\partial y} + q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad p\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial \alpha};\\ &r\frac{\partial x}{\partial y} + s = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad r\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial p}{\partial \alpha};\\ &s\frac{\partial x}{\partial y} + t = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad s\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial \alpha}.\end{aligned}\right.$$

De la troisième et de la cinquième on tire

$$r = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - s}{\frac{\partial x}{\partial y}}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial y} - s\frac{\partial x}{\partial y};$$

en portant ces valeurs de r et de t dans l'équation (66), il vient

$$\frac{q^2\left(\frac{\partial p}{\partial y} - s\right)}{\frac{\partial x}{\partial y}} - 2pqs + \left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y} - s\frac{\partial x}{\partial y}\right)$$
$$+ i\,\mathrm{tang}\,iy.q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right) = 0;$$

or α étant entièrement arbitraire, on peut assujettir cette variable à la condition que le coefficient de s soit égal à zéro; nous obtenons alors

$$\left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 2pq\frac{\partial x}{\partial y} + q^2 = 0,$$

$$q^2\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\frac{\partial q}{\partial y} + i\operatorname{tang} iy.q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial y} = 0,$$

ou mieux

$$\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial x}{\partial y} + q = 0,$$

$$\left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\frac{\partial q}{\partial y} - q\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial p}{\partial y} + i\operatorname{tang} iy.q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right) = 0,$$

en réduisant le premier membre de la première équation à l'un des facteurs dans lesquels il se décompose; et si nous joignons à ces deux équations celles-ci :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = p\frac{\partial x}{\partial y} + q,$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \alpha},$$

qui sont comprises dans le groupe (67), nous avons quatre équations pour définir complétement les fonctions z, x, p, q de y et de α.

Je considère d'abord la seconde de ces équations

$$(68)\quad \left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\frac{\partial q}{\partial y} - q\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial p}{\partial y} + i\operatorname{tang} iy.q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right) = 0.$$

Comme elle ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, elle ne correspond pas à une relation en termes finis contenant p, q et y; toutefois elle permet d'exprimer p et q au moyen d'une fonction arbitraire de y et de α et de la dérivée de cette fonction par rapport à y. En effet, écrivons-la ainsi

$$\frac{\partial q^{-2}}{\partial y} + 2q^{-2}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(p - \frac{a}{\cos^2 iy}\right)}{p - \frac{a}{\cos^2 iy}} - i\operatorname{tang} iy\frac{p - \frac{a}{\cos^2 iy}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}}\right\} - \frac{2i\operatorname{tang} iy}{p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}} = 0,$$

puis posons

$$-i\operatorname{tang} iy\frac{p - \frac{a}{\cos^2 iy}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega}$$

et multiplions par $\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2$, il viendra

$$\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2\frac{\partial q^{-2}}{\partial y}+2q^{-2}\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)$$
$$+2q^{-2}\omega\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2\frac{\partial\omega}{\partial y}+2\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}=0,$$

d'où, en intégrant,

$$\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2 q^{-2}+\omega^2=\mathrm{C},$$

C étant une constante par rapport à y, c'est-à-dire une fonction arbitraire de α que l'on peut toujours supposer égale à 1, en remplaçant ω par $\omega\sqrt{\mathrm{C}}$ ce qui n'altère pas la valeur de p. On a donc les deux équations

$$\frac{p-\frac{a}{\cos^2 iy}}{p+\frac{a}{\cos^2 iy}}=-i\,\mathrm{tang}\, iy\,.\,\frac{\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\omega},$$

$$\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)q^{-2}+\omega^2=1,$$

qui font connaître des valeurs de p et de q satisfaisant à l'équation (68) quelle que soit la fonction ω.

Considérons maintenant l'équation

$$\left(p+\frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial x}{\partial y}+q=0;$$

si nous substituons à p et q leurs valeurs en fonction de ω, il vient

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\frac{\partial\omega}{\partial y}}{i\,\mathrm{tang}\, iy\sqrt{1-\omega^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$x=\int\frac{\frac{\partial\omega}{\partial y}dy}{i\,\mathrm{tang}\, iy\sqrt{1-\omega^2}}=\frac{\arcsin\omega}{i\,\mathrm{tang}\, iy}+\int\frac{\arcsin\omega\, dy}{\sin^2 iy}$$

ou

$$x = - i \sin iy . \cos iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \theta,$$

en posant

$$\arcsin \omega = \sin^2 iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

qui, en se rappelant la valeur de $\frac{\partial x}{\partial y}$, donne

$$\frac{q\frac{\partial p}{\partial \alpha} - \left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2} + \frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial y}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}} = 0,$$

puis

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{-q}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}}}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}} + \frac{\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2ai\sin iy}{\cos^3 iy}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}} = \frac{\frac{2ai\sin iy}{\cos^3 iy}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial y}}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}} + \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega} + i \operatorname{tang} iy.$$

Or, en intégrant, par rapport à y, on trouve

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right) = C\frac{\omega}{\cos iy},$$

C étant une fonction arbitraire de α, d'où, en introduisant la fonction θ,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - i \sin iy . \cos iy \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial y}$$

$$= \frac{C\cos^2 iy}{2ai\sin iy}\left\{\cos\left(\sin^2 iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\frac{\partial .}{\partial y}\left(\sin^2 iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + i \operatorname{tang} iy . \sin\left(\sin^2 iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\right\}$$

ou plus simplement

$$(69)\quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} - y_1\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1\partial y_1} = y_1^2\sqrt{y_1^2-1}\cos\left(\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right)\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial y_1^2} + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2-1}}\sin\left(\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right)$$

en posant

$$\frac{dy}{\sin^2 iy} = dy_1,\quad \frac{\mathrm{C}d\alpha}{2a} = d\alpha_1.$$

Toute la question est évidemment ramenée à intégrer cette dernière équation, car si on avait θ en fonction de α_1 et de y_1, et par conséquent en fonction de α et de y, on connaîtrait par cela même en fonctions des mêmes variables, x, puis p et q, puis z au moyen de la relation

$$dz = \left(p\frac{\partial x}{\partial y} + q\right)dy + p\frac{\partial x}{\partial\alpha}d\alpha$$

qui satisfait à la condition d'intégrabilité, à cause de l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial\alpha} + \frac{\partial q}{\partial\alpha} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial\alpha};$$

et en éliminant α de la valeur de z au moyen de la relation qui donne x, on aurait l'intégrale cherchée en z, x et y.

L'équation (69) ne contient pas la dérivée seconde $\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1^2}$, mais elle renferme $\frac{\partial^2\theta}{\partial y_1^2}$; nous avons donc encore à faire disparaître cette dernière dérivée. Pour ne pas trop multiplier les notations, nous changerons θ en z, α_1 en x, y_1 en y, $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}$ en $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{\partial\theta}{\partial y_1}$ en $\frac{dz}{dy}=q$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1\partial y_1}$ en $\frac{d^2z}{dxdy}=s$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial y_1^2}$ en $\frac{d^2z}{dy^2}=t$, ce qui donnera

$$(69\ bis)\qquad p - ys = y^2\sqrt{y^2-1}\cos q.t + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin q.$$

Considérons y et par suite z, p et q comme fonctions de x et d'une nouvelle variable α; désignons d'ailleurs par les symboles $\frac{\partial.}{\partial x}$, $\frac{\partial.}{\partial\alpha}$ les dérivées relatives à ces nouvelles variables x et α, nous aurons comme plus haut les égalités

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} &p+q\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\frac{\partial z}{\partial \alpha};\\ &r+s\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}, \quad s\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\frac{\partial p}{\partial \alpha};\\ &s+t\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial x}, \quad t\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\frac{\partial q}{\partial \alpha}.\end{aligned}\right.$$

De la cinquième, on tire

$$t=\frac{\frac{\partial q}{\partial x}-s}{\frac{\partial y}{\partial x}};$$

en portant cette valeur de t dans l'équation (69 *bis*), il vient

$$p-ys=y^2\sqrt{y^2-1}\cos q\cdot\frac{\frac{\partial q}{\partial x}-s}{\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin q.$$

Mais α étant tout à fait arbitraire, on peut assujettir cette variable à la condition que le coefficient de s soit nul, nous obtenons alors

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y\sqrt{y^2-1}\cos q,$$

$$p-y\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin q,$$

et si nous joignons à ces deux équations celles-ci

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p+q\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial \alpha}-\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

qui sont comprises dans le groupe (70), nous avons quatre équations pour définir complétement les fonctions z, y, p, q de x et de α.

Eliminons p et $\frac{\partial y}{\partial x}$ entre la première, la seconde et la quatrième équation, il vient

$$y\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial\alpha}+\frac{y^3}{\sqrt{y^2-1}}\cos q\cdot\frac{\partial q}{\partial\alpha}-\sin q\cdot\frac{\frac{\partial y}{\partial\alpha}}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

d'où, en multipliant par $\frac{2(y^2-1)}{y}\frac{\partial q}{\partial\alpha}$ et en rétablissant à la place de $\cos q$ sa valeur $\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{y\sqrt{y^2-1}}$,

$$2(y^2-1)\frac{\partial q}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial\alpha}+2y\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)^2+2\frac{\partial\,.}{\partial\alpha}\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{y\sqrt{y^2-1}}\right)\frac{\frac{\partial y}{\partial\alpha}}{y\sqrt{y^2-1}}=0,$$

ou bien

$$\frac{\partial\,.}{\partial x}\left[(y^2-1)\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)^2\right]+\frac{\partial\,.}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial y}{y\sqrt{y^2-1}}}{\partial\alpha}\right)^2=0,$$

et en intégrant par rapport à x

$$(y^2-1)\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\frac{\partial y}{y\sqrt{y^2-1}}}{\partial\alpha}\right)^2=C,$$

C étant une fonction arbitraire de α.

Pour simplifier ce résultat, je pose les deux égalités

$$\sqrt{C}\,d\alpha=d\alpha_1,\quad \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}=dy_1,$$

dont la seconde donne

$$\text{arc séc}\,y=y_1,\quad \cos q=\frac{\partial y_1}{\partial x}$$

et j'obtiens

$$\text{tang}^2 y_1\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x\partial\alpha}\right)^2=\left[1-\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}\right)^2\right],$$

ou bien, en employant les notations ordinaires,

$$s\,\text{tang}\,z=\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-q^2}.$$

Telle est, en définitive, l'équation qu'il faudrait intégrer pour avoir l'équation en termes finis des surfaces dont le produit des rayons de courbure pincipaux est constant.

Nous n'avons eu en vue dans ce qui précède que l'intégration générale de l'équation (66); si nous avions voulu obtenir des intégrales particulières, il nous aurait été bien facile de retrouver tout ce que l'on connaît à ce sujet. Ainsi cherchons les surfaces hélicoïdes qui satisfont à l'équation (65), on a (§ XII, 1re Partie)

$$u = \mathrm{Y}, \quad v = m\cos iy, \quad w = \frac{\mathrm{Y}'}{i\,\mathrm{tang}\,iy},$$

par suite

$$\frac{\mathrm{YY}'}{i\,\mathrm{tang}\,iy} - m^2\cos^2 iy = -\frac{a^2}{\cos^2 iy},$$

d'où

$$\mathrm{Y} = \sqrt{\mathrm{C} - m^2\cos^2 iy - \frac{a^2}{\cos^2 iy}}.$$

Y étant déterminé, on connaît par cela même u, v, w, par suite z et enfin les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface, en suivant la marche indiquée au § III de la première Partie. On retrouve ainsi d'une manière simple une classe de surfaces applicables sur la sphère que M. Minding a donnée dans le tome XIX du *Journal de Crelle*.

Cherchons encore les surfaces imaginaires que M. J.-A. Serret a fait connaître dans le tome XIII de ce journal. On a pour ces surfaces

$$w = i\left(v - \frac{a}{\cos iy}\right)$$

et par suite

$$u = -i\left(v + \frac{a}{\cos iy}\right);$$

en portant ces valeurs de u et de w dans les deux relations

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy \,.\, w,$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dv}{dy} + i\,\mathrm{tang}\,iy \,.\, v,$$

on trouve pour résultat unique

$$i\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} + i \operatorname{tang} iy \,.\, v,$$

d'où l'on tire

$$v = \cos iy f(x + iy),$$

ce qui donne

$$w = i\left[\cos iy f(x + iy) - \frac{a}{\cos iy}\right],$$

$$u = -i\left[\cos iy f(x + iy) + \frac{a}{\cos iy}\right]:$$

u, v, w étant connus la surface est déterminée.

Signalons la valeur de ζ qui, étant en général l'intégrale de

$$\frac{v}{\cos iy}\,dx + \frac{w}{\cos iy}\,dy,$$

devient ici

$$\zeta = \mathrm{F}(x + iy) + a \operatorname{tang} iy,$$

la fonction F représentant l'intégrale de la fonction f.

Toutes les propriétés que M. Serret a reconnues aux surfaces considérées deviennent pour ainsi dire évidentes au moyen de nos formules. Ainsi les valeurs de u, v, w donnent immédiatement

$$(u - w)^2 + 4v^2 = 0,$$

ce qui prouve que les surfaces ont leurs rayons de courbure principaux égaux entre eux. De même l'équation générale des lignes asymptotiques

$$u + 2v\frac{dy}{dx} + w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

étant vérifiée, dans le cas actuel, par $\frac{dy}{dx} = i$, on voit que les surfaces ont pour transformées sphériques des lignes asymptotiques de l'un des systèmes les grands cercles imaginaires

$$y = ix + \text{const.}$$

et sont par conséquent des surfaces réglées. Nous pourrions encore ajouter quelques autres propriétés relatives aux lignes de courbure, aux lignes isométriques, aux lignes géodésiques. Mais nous nous en tiendrons à ce qui précède.

XI. — Surfaces dont la courbure moyenne est constante.

Les surfaces pour lesquelles la somme des inverses des rayons de courbure principaux est la même en chaque point et qui sont définies par l'équation

$$\frac{a}{\cos iy}(u + w) = uw - v^2$$

se ramènent immédiatement à celles qui ont été étudiées dans le paragraphe précédent. En effet, si on change z en $z + a\cos iy$, v ne change pas, u et w augmentent l'un et l'autre de $\frac{a}{\cos iy}$, donc l'équation précédente devient

$$\frac{2a^2}{\cos^2 iy} = uw - v^2,$$

qui est bien celle des surfaces pour lesquelles le produit des rayons de courbure principaux est constant. Ce rapprochement entre les surfaces applicables sur la sphère et celles dont la courbure moyenne est constante, qu'il est d'ailleurs facile d'expliquer par des considérations géométriques, comme je l'ai fait voir, il y a plusieurs années, dans les *Nouvelles Annales*, t. XII, montre que les surfaces étudiées par M. Ernest Lamarle, dans le numéro d'octobre 1859 du *Journal de Mathématiques*, se ramènent immédiatement à celles que M. Minding a fait connaître depuis longtemps dans le *Journal de Crelle*.