JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur le produit de deux nombres premiers, l'un de la forme $8\kappa + 3$ et l'autre de la forme $8h + 5$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 303-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__303_0>

SUR

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS, L'UN DE LA FORME $8k+3$ ET L'AUTRE DE LA FORME $8h+5$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Cette Note est liée en quelque sorte à la précédente. On y verra (ce qui semble curieux) que les nombres résultant du produit d'un nombre premier $8k+3$ par un nombre premier $8h+5$ jouissent de propriétés analogues à celles que nous venons d'indiquer pour les nombres premiers $16k+7$.

Prenons en effet

$$m = (8k+3)(8h+5),$$

les deux facteurs au second membre étant, nous le répétons, des nombres premiers; et nous aurons, au sujet du produit m, les trois théorèmes que voici :

1°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 2x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier $8\mu+5$, qui ne divise pas y.

2°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = x^2 + q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et q un nombre premier $8\mu+3$ qui ne divise pas

3°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 4x^2 + q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et q un nombre premier $8\mu + 3$, qui ne divise pas y. Partout on admet pour l la valeur zéro.

Soit comme exemple, $m = 3.5$, c'est-à-dire

$$m = 15,$$

et nos trois théorèmes se vérifieront; car on a non-seulement l'équation

$$15 = 2.1^2 + 13.1^2,$$

mais encore les deux suivantes :

$$15 = 3^2 + 2.3.1^2,$$

et

$$15 = 4.1^2 + 11.1^2,$$

Quant à l'équation

$$15 = 1^2 + 2.7.1^2,$$

elle ne doit pas être comptée ici : elle ne rentre pas dans l'équation générale

$$m = x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

parce que le nombre premier 7 n'est pas de la forme $8\mu + 3$.

Nous venons de parler de nombres composés, tandis que jusqu'à présent nous n'avions considéré que des nombres premiers. C'est qu'en effet nos théorèmes s'étendent *mutatis mutandis* aux diverses classes de nombres composés. Mais les nombres premiers offrent un intérêt spécial, et nous leur consacrerons encore plus d'un article avant de donner à nos recherches toute la généralité qu'elles comportent.