

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BESGE

Somme d'une série

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 5 (1860), p. 367-368.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5_367_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SOMME D'UNE SÉRIE;

PAR M. BESGE.

La série dont je veux parler, savoir

$$1 + \frac{1}{1} \frac{1}{2 \cdot 3^3} + \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2} \frac{1}{2^2 5^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{2^3 7^3} + \dots,$$

a pour terme général

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{1}{2^n (2n+1)^3}$$

J'ignore si l'on a déjà remarqué la valeur simple que voici de la somme S de cette série :

$$S = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4} (\log 2)^2.$$

En tout cas cette valeur résulte immédiatement de l'équation suivante, que je trouve dans un Mémoire de M. Vinckler :

$$\int_0^\infty \frac{t^2 dt}{\sqrt{e^{2t}-1}} = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2} (\log 2)^2.$$

Observez, en effet, que

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}} = e^{-t} (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}},$$

puis développez

$$(1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}}$$

en série par la formule du binôme, effectuez ensuite les intégrations

et divisez par 2. Vous arriverez précisément à l'équation écrite plus haut :

$$S = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4} (\log 2)^2.$$

On me pardonnera, j'espère, ces quelques lignes au sujet d'une série dont la forme est élégante. Au reste, mon but est surtout d'attirer l'attention des géomètres sur les travaux de M. Vinckler, où l'on trouvera plusieurs résultats curieux.
