JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

# Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; troisième partie. De la marche des valeurs d'une fonction implicite définie par une équation algébrique

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 5 (1860), p. 43-64.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__43_0>

NOUVELLE THÉORIE

DES

# FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN **MARIE**,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

## TROISIÈME PARTIE.

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.

### CHAPITRE VI.

*De la marche des valeurs d'une fonction d'une seule variable.*

**68.** Une fonction qui peut prendre plusieurs valeurs pour une même valeur de la variable, dont elle dépend, n'est pas déterminée par la valeur de cette variable.

Cependant, si à chaque couple de valeurs de la variable et de la fonction il ne correspond qu'une seule valeur du rapport de leurs accroissements infiniment petits, la fonction sera tellement liée à sa variable, que dès qu'on aura fait choix pour l'une et l'autre de valeurs initiales, se correspondant, et réglé la marche de la variable, la fonction, assujettie à varier d'une manière continue, ne pourra plus prendre qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable.

Il convient toutefois, provisoirement, d'excepter le cas où la variable et la fonction prenant à un moment donné des valeurs auxquelles correspondît une valeur infinie ou multiple de la dérivée de la fonction, on n'aurait d'ailleurs aucun moyen de lever l'indétermination qui pèserait dès lors sur la marche ultérieure de cette fonction.

Ce cas étant excepté, si l'on a attribué à la fonction $y$ une valeur initiale $y_0$, choisie parmi celles qui correspondent à la valeur initiale $x_0$ de la variable $x$, et qu'on ait fixé la marche de cette variable en établissant entre ses parties réelle et imaginaire une relation, soit arbitraire, soit imposée par la question qu'on voulait traiter, on pourra demander ce que sera devenue la fonction, lorsque la variable aura atteint une valeur quelconque $x_1$, prise parmi celles qu'elle peut recevoir.

Cette importante question a été posée d'abord par M. Cauchy; M. Puiseux depuis, MM. Briot et Bouquet ensuite, s'en sont occupés, et ont soit donné plus de certitude aux démonstrations, soit obtenu des résultats nouveaux, mais sans s'écarter de la méthode proposée par l'illustre maître.

**69.** Cette méthode est fondée sur la remarque suivante :

La variable $x$ étant représentée par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, si pour définir sa marche, d'une valeur $x_0$ à une valeur $x_1$, on établit successivement, entre ses parties réelle et imaginaire, deux relations distinctes $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ et $\psi(\alpha, \beta) = 0$; que $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, ni $\psi(\alpha, \beta) = 0$ n'admettent comme solution aucun des couples $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., de valeurs de $\alpha$ et $\beta$ correspondantes aux valeurs de $x$, pour lesquelles $\frac{dy}{dx}$ peut être infini ou indéterminé, et qu'enfin la relation $\psi(\alpha, \beta) = 0$ puisse se transformer insensiblement en $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ sans que dans aucun état intermédiaire elle admette comme solution l'un des systèmes de valeurs exceptionnelles $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., de $\alpha$ et $\beta$ :

$y$, partant dans les deux cas de la même valeur initiale $y_0$, arrivera à la même valeur finale $y_1$.

Pour rendre cette idée plus claire et simplifier le langage, M. Cauchy figure le chemin qu'il fait suivre à $x$, par une courbe dont l'abscisse serait $\alpha$ et l'ordonnée $\beta$, il marque sur le même plan les points dangereux $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., par où le chemin ne doit pas passer, et il peut dès lors énoncer la proposition précédente en disant que si les chemins $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, $\psi(\alpha, \beta) = 0$ peuvent se réduire l'un à l'autre sans rencontrer un des points dangereux, $y$ partant, dans les deux cas, de la même valeur initiale, arrivera à la même valeur finale.

Le principe que nous venons d'énoncer fournit immédiatement les conséquences suivantes :

1°. Si la variable $x$ doit passer de la valeur $x_0$ à la valeur $x_1$, par un certain chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, on pourra substituer à un arc de ce chemin un autre arc quelconque ayant les mêmes extrémités, pourvu qu'aucun des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., ne soit compris entre les deux.

2°. Si le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ est fermé, les deux extrémités $x_0$, $x_1$ se confondant, et qu'il ne comprenne dans son intérieur aucun des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc.; la fonction $y$ reviendra à son état primitif lorsque la variable $x$ reprendra elle-même sa valeur initiale.

3°. Au contraire, si le chemin fermé $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ne peut se réduire à un point, sans rencontrer l'un des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., en général, $y$ ne reprendra pas sa valeur initiale en même temps que $x$.

4°. Si le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, non fermé, ne peut pas se réduire à un chemin convenu, la ligne droite par exemple, sans rencontrer quelques-uns des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., la valeur finale $y_1$ de $y$, correspondante à la valeur finale $x_1$ de $x$, changera selon que ce sera tel ou tel des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., qui se trouvera enclavé; selon qu'il y en aura un seul, ou deux, trois qui se trouveront enclavés.

**70.** La question analytique à laquelle se trouve ramenée, dans cette théorie, la question concrète proposée, consiste donc à découvrir les permutations qui pourraient s'être produites entre les valeurs initiales de $y$, lorsque les fonctions continues, simultanément définies par cette lettre, auraient achevé leur évolution en même temps que $x$.

Cette manière d'envisager la question, quoique singulière, n'offre en réalité rien de choquant, mais nous ne croyons pas qu'il eût fallu s'y arrêter.

Les points singuliers autour desquels tout tourne, dans la théorie de M. Cauchy, se distinguent des autres par un caractère analytique saillant, à la vérité, mais actuel et subjectif. Par eux-mêmes ils n'ont rien de remarquable, ils correspondent seulement à quelques états du phénomène étudié qui, en raison de la position du point où l'on s'est placé pour voir, appartiennent au contour apparent du spectacle.

Le point de vue venant à changer, ces points si remarquables à l'instant même, autour desquels tout allait pivoter, viendront se confondre dans la masse des autres, il n'en sera plus question, et d'autres points viendront se substituer à eux dans toutes leurs prérogatives.

La théorie d'une fonction n'est cependant que la théorie d'un phénomène; si le point de vue change, les lois du phénomène étudié peuvent bien changer de forme, mais le fond en reste le même.

L'équation d'une ellipse change lorsqu'on change l'origine et la direction des axes, mais elle jouit toujours des mêmes propriétés caractéristiques; l'ordonnée n'est plus la même fonction de l'abscisse, mais les deux fonctions ne diffèrent pas à ce point que, dans la théorie de l'une, le point de contact de la courbe avec la tangente qui y serait menée parallèlement à l'axe des $y$, ait, naturellement, une importance capitale, qu'il va perdre entièrement dans la théorie de l'autre.

Le système des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., forme le contour apparent du phénomène étudié, par rapport au point de vue placé à l'infini sur la ligne des $y$; mais il change, le phénomène étudié restant le même, chaque fois que le point de vue change; comment donc ces points seraient-ils tour à tour et d'une importance si capitale, et d'une oisiveté si complète?

La question au reste, à proprement parler, n'a été résolue que pour le cas d'un chemin fermé, enveloppant un ou plusieurs points dangereux, car la méthode adoptée pour ce cas exceptionnel ne pouvant plus être d'aucune ressource dans tout autre, et défiant l'imitation, par sa singularité même, on n'a proposé du cas général qu'une solution où l'arbitraire et le tâtonnement sont à peu pres les seules règles.

La singularité de la méthode adoptée a fait regarder la question comme beaucoup plus difficile qu'elle n'est en réalité; c'est là ce qui explique comment, ayant obtenu la solution du problème dans le cas le plus simple, on s'est contenté, pensant ne pouvoir aller au delà, d'entrevoir la possibilité d'appliquer au cas général une méthode de tâtonnements, qui eût aussi bien convenu au cas particulier, mais qu'on n'y avait pas appliquée, parce qu'elle fournit bien moins une solution qu'un expédient pour supprimer la question elle-même.

Cette méthode de tâtonnements se reduit à l'emploi de la série de Taylor pour le calcul de proche en proche de la fonction, en ménageant les écarts successifs de la variable, de manière que la série reste toujours convergente. Ce procédé convenant également bien à tous les cas, il est clair qu'admettre la solution qu'il fournit revenait à supprimer la question elle-même.

Mais, au reste, la solution de la question proposée, quel que soit l'intérêt particulier qu'elle reçoit de la théorie des intégrales, devait aussi pouvoir servir à déterminer, d'une manière certaine, les conditions de convergence de la série de Taylor, qu'on ne connaissait pas encore exactement; par cette raison il importait de la traiter par une méthode directe.

L'étude de la série de Taylor dépendait évidemment de celle de la marche et des permutations des valeurs de la fonction, et non pas l'inverse.

**71.** Nous aurons à revenir sur la condition que le chemin parcouru par $x$ ne passe par aucun des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc. : sans entamer encore aucune discussion à cet égard, nous observerons toutefois que le contraire pourrait arriver, sans que la moindre indétermination pesât sur la marche ultérieure de $y$, si, au moment où $x$ atteindrait une des valeurs $a + b\sqrt{-1}$, $a_1 + b_1\sqrt{-1}$, etc., $y$ était venu prendre la valeur de l'une des racines finies et simples de l'équation qui définit cette fonction.

Nous remarquerons encore que la méthode de M. Cauchy, propre au cas où la marche de $x$ est définie par une équation entre ses deux parties réelle et imaginaire, ne conviendrait plus, sans du moins exiger une élimination, la plupart du temps impossible à faire, au cas où la loi de progression serait donnée par une équation entre les parties réelles et imaginaires de $x$ et de $y$, ou par deux ou trois équations entre ces mêmes parties et une ou deux variables intermédiaires.

Cette remarque n'est pas sans importance, car si l'on pouvait choisir à volonté la forme sous laquelle sera posée la condition nécessaire pour fixer la marche de $x$ et de $y$, on pourrait, la plupart du temps, singulièrement simplifier la question. Nous avons habituellement conservé à la condition la forme que lui donne M. Cauchy, mais notre méthode s'appliquerait, sans modifications, à tous les autres cas.

**72.** La question qui nous occupe, lorsque la fonction n'entre qu'au second degré dans l'équation qui la définit, est d'une simplicité telle, que nous croyons devoir traiter ce cas à part. Les équations du second degré se présentent d'ailleurs si fréquemment dans la pratique, qu'il y a lieu d'en faire l'objet d'une étude spéciale.

L'équation

$$f(x, y) = 0$$

étant du second degré par rapport à $y$, et d'ailleurs algébrique, donnera

$$y = P \pm \sqrt{Q},$$

P et Q étant deux fonctions rationnelles de $x$ qui n'auront chacune qu'une valeur pour chaque valeur de $x$.

$x$ variant d'une manière continue de $x_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}$ à $x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}$, en suivant un chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, $y$ partira de l'une de ses valeurs, qui correspondent à $x = x_0$, valeur que nous désignerons par $y_0$, et qui pourra être

$$P_0 + \sqrt{Q_0}$$

ou

$$P_0 - \sqrt{Q_0},$$

et la question sera de savoir ce que $y$, assujetti à varier d'une manière continue, sera devenu lorsque $x$ aura atteint la valeur $x_1$.

Or la valeur finale de $y$ se composera de la valeur finale de P, sur laquelle il ne s'élève aucun doute, et de la valeur finale de $y - P$ : on pourra donc simplifier la question en prenant $y - P$ pour variable au lieu de $y$.

En désignant par $z$ cette nouvelle variable, on n'aura plus à s'occuper que de l'équation

$$z^2 = Q$$

ou

$$z = \pm \sqrt{Q}.$$

Les deux valeurs de $z$ correspondantes à une même valeur de $x$ seront toujours différentes, et cependant une des difficultés de la question est précisément de les distinguer l'une de l'autre, de fixer le langage de manière à n'y laisser subsister aucune ambiguïté.

Notre méthode nous en donne immédiatement les moyens, car les deux solutions, qui correspondront à une même valeur de $x$, auront toujours leurs caractéristiques de signes contraires.

En conséquence, il suffira toujours de rechercher ce que sera devenue la caractéristique C de la solution mobile pour savoir ce que sera devenue cette solution elle-même.

Si $z$ est parti, par exemple, de la valeur initiale

$$z_0 = \alpha'_0 + \beta_0 C_0 \sqrt{-1},$$

$C_0$ étant positif, sa valeur finale sera

$$z_1 = \alpha'_1 + \beta_1 C_1 \sqrt{-1},$$

ou

$$z_1 = -\alpha'_1 - \beta_1 C_1 \sqrt{-1},$$

suivant que C aura changé de signe un nombre pair ou un nombre impair de fois. Or il ne sera jamais difficile de savoir combien de fois C changera de signe pendant que $x$ passera, par le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, de la valeur $x_0$ à la valeur $x_1$, puisqu'on aura deux équations entre C, $\alpha$ et $\beta$.

Voilà tout ce à quoi se réduirait la méthode que nous proposerions pour les équations du second degré. Il suffira de l'appliquer à quelques exemples pour montrer que la pratique en est aussi simple que la théorie.

**73.** La méthode que nous appliquerons aux équations de degré supérieur au second ne sera guère plus compliquée dans ses moyens, quoiqu'elle doive exiger souvent des calculs délicats; elle ne sera au reste qu'un simple prolongement de celle que nous venons d'indiquer pour les équations du second degré.

La question se réduira toujours à savoir, à chaque instant, sur quelle conjuguée de la courbe proposée le point $[xy]$ sera venu se placer et sur quelle branche de cette conjuguée il se trouvera, car alors on pourra déterminer la valeur qu'aura prise la fonction $y$.

Nous observerons avant tout que s'il n'est pas impossible qu'à une même valeur imaginaire de $x$ il corresponde deux valeurs, ou plus, de $y$ fournissant des points d'une même conjuguée, cela du moins n'arrivera qu'exceptionnellement.

Car si entre les deux relations que fournira l'équation de la courbe et $\beta' = \beta C$, on élimine $\alpha'$ et $\beta'$, il restera une équation entre $\alpha$, $\beta$ et C d'où l'on ne tirerait pour C des valeurs égales qu'autant que $\alpha$ et $\beta$ satisferaient à une condition particulière qui, encore même exprimée, pourrait bien soit ne pas être réalisable, soit déterminer $\alpha$ et $\beta$ [*].

**74.** Cela posé, les conjuguées d'une courbe $f(x, y) = 0$ se divisent en deux catégories distinctes, la première comprenant les conjuguées

---

[*] Si à

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

correspondaient à la fois

$$y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}$$

et

$$y = \alpha'_1 + \beta C\sqrt{-1},$$

on pourrait, en dirigeant convenablement l'axe des $x$, rendre en même temps réelles les deux valeurs considérées de $y$, sans qu'elles cessassent de correspondre à une même valeur de $x$. Les deux solutions deviendraient donc

$$\begin{cases} x' = \gamma + \delta\sqrt{-1}, \\ y' = \gamma', \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x' = \gamma + \delta\sqrt{-1}, \\ y' = \gamma''; \end{cases}$$

ainsi les points correspondants appartiendraient à la conjuguée $C = 0$ dans le nouveau système d'axes.

Or pour qu'à une valeur de $x$, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, il corresponde une valeur réelle de $y$, il faut déjà que $\alpha$ et $\beta$ satisfassent à une certaine condition précise; et si l'on demande qu'à la valeur $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ il corresponde deux valeurs réelles de $y$, en général, si cette condition peut être remplie, elle déterminera $\alpha$ et $\beta$.

qui touchent la courbe réelle, la seconde celles qui ne la touchent pas.

Or le passage du point $[xy]$ d'une conjuguée d'une catégorie sur une conjuguée de l'autre, ne peut avoir lieu qu'au moment où ce point passe sur une conjuguée, limite commune des deux catégories, qui touche à la fois les deux enveloppes : ces passages devront être relevés avec soin, et comme d'ailleurs la conjuguée servant de lien entre les deux catégories aura généralement sa caractéristique comprise entre les caractéristiques des conjuguées de l'une et de l'autre catégorie qui la comprennent elle-même, le signe de la dérivée de C, prise par rapport à la variable indépendante, au moment où le point $[xy]$ passera sur la conjuguée limite, suffira pour décider si ce point va changer de catégorie de conjuguées ou s'il rebroussera chemin.

Les conjuguées limites, dont nous venons de parler, peuvent être en nombre quelconque; ce sont habituellement celles qui touchent la courbe réelle en ses points d'inflexion ou de rebroussement ou en ses points situés à l'infini.

2°. Si la courbe réelle a plusieurs branches [*], les conjuguées qui la touchent devront être divisées en autant de classes.

Le point $[xy]$ ne pourra se transporter d'une conjuguée appartenant à une classe sur une conjuguée appartenant à la classe voisine, qu'en traversant celle qui sert de lien entre les deux classes; d'ailleurs la caractéristique de cette dernière conjuguée sera encore habituellement comprise entre les caractéristiques des deux conjuguées de l'une et de l'autre classe qui l'avoisinent immédiatement; de sorte que si l'on a déterminé le signe de la dérivée de C par rapport à la variable indépendante, au moment du passage du point $[xy]$ sur la conjuguée limite, on pourra encore dire si le point $[xy]$ a ou non changé de classe.

Les conjuguées qui séparent les différentes classes les unes des autres sont celles qui ont pour caractéristiques o ou $\infty$ et quelques-unes de celles qui touchent la courbe réelle en ses points singuliers; la discussion préalable de la courbe les fait suffisamment connaître.

---

[*] J'entends par branches de la courbe réelle les portions fournies par les différentes valeurs de $y$ que donne l'équation.

Les conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle se divisent de la même manière en plusieurs classes, lorsque leur enveloppe imaginaire se compose de plusieurs branches ou comporte des points singuliers.

3°. Chaque conjuguée peut être composée de parties distinctes et séparées. Dans ce cas, le point $[xy]$ ne saurait se transporter de l'une sur une autre, qui en est éloignée d'une quantité finie, qu'en prenant, avant tout, son passage sur une conjuguée particulière où les deux parties en question se confondent ou aient au moins un point commun : ces passages peuvent être relevés comme tous les précédents, parce qu'ils sont toujours signalés par un caractère analytique plus ou moins saillant.

4°. Enfin chaque arc d'une conjuguée quelconque tangent à l'enveloppe réelle ou à l'enveloppe imaginaire se trouve naturellement décomposé en deux branches par le point où il touche l'une des deux enveloppes. Le point $[xy]$ ne peut passer d'une des branches sur l'autre qu'en passant sur cette enveloppe; nous donnons les moyens de savoir s'il change alors de branche.

**75.** Nous n'aurons pas à revenir dans nos explications générales sur les passages du point $[xy]$ par une conjuguée servant de lien entre les deux catégories ou entre deux classes appartenant à une même catégorie; nous regardons comme suffisamment traitées, dans ce qui précède, les questions que pourrait soulever l'analyse des circonstances qui accompagnent ces passages.

On verra au reste, par les exemples que nous traiterons, qu'on peut toujours lever toutes les difficultés, peu considérables d'ailleurs, que présente, dans ces différents cas, l'analyse des faits.

Nous passons de suite à l'examen des questions de détail qui nécessitent des explications spéciales.

**76.** Quoique les solutions d'une équation

$$f(x, y) = 0$$

puissent toujours toutes se permuter les unes dans les autres, ce qui au premier abord semblerait interdire toute distinction entre elles, nous les étudierons cependant dans trois états principaux, très différents à certains égards.

Lorsque $x$ et $y$ partant de valeurs réelles $a$, $b$ prennent des accroissements imaginaires très-petits, le point $[xy]$ se transporte, à une très-petite distance de la courbe réelle, sur une conjuguée tangente à cette courbe en un point voisin du point $[a, b]$, dont la caractéristique diffère par conséquent très-peu du coefficient angulaire de la tangente à la courbe réelle au point $[a, b]$.

Dans ce cas, si $x$ redevient réel sans avoir dépassé de certaines limites $y$, redevient en même temps réel, le point $[xy]$ repasse sur la courbe réelle, et si la partie imaginaire de $x$ change de signe, la même chose arrive à la partie imaginaire de $y$; le point $[xy]$ se transporte donc sur la nouvelle conjuguée qui le contient du côté opposé à celui où il se trouvait d'abord par rapport au point de contact de la courbe réelle avec la conjuguée qui le contenait.

Lorsque $x$ part d'une valeur réelle à laquelle correspond une valeur imaginaire de $y$ et que les deux variables prennent des accroissements imaginaires très-petits, le point $[xy]$ se transporte sur une conjuguée dont la caractéristique diffère peu de l'infini positif ou négatif.

Dans ce cas si $x$ redevient réel, sans avoir dépassé de certaines limites, $y$ reste imaginaire, et si la partie imaginaire de $x$ change de signe, la partie imaginaire de $y$ conserve le sien, d'où il résulte que la caractéristique du point $[xy]$ en change.

Les mêmes faits se passent dans un autre ordre, quand le point $[xy]$ passe sur la conjuguée $C = 0$ : la caractéristique change alors de signe en même temps que la partie imaginaire de $y$.

Enfin le troisième cas que nous considérons est celui où le point $[xy]$ prend des positions voisines de l'enveloppe imaginaire : au moment où il passe sur cette enveloppe, on doit chercher à savoir à quelles conditions il changerait de branche sur sa conjuguée divisée par le point où elle touche l'enveloppe.

**77.** Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une solution où les parties imaginaires de $y$ et de $x$ soient en même temps aussi petites qu'on le voudra, à laquelle par conséquent corresponde un point infiniment peu éloigné de la courbe réelle et appartenant à une conjuguée tangente à cette courbe.

$x$ variant d'une manière continue, le point $[xy]$ ou bien restera sur la même conjuguée, ou se transportera sur une conjuguée voisine appartenant à la même catégorie; il ne pourra d'ailleurs passer d'une branche supérieure sur une branche inférieure, ou réciproquement, sans passer sur la courbe réelle; il restera donc sur la même suite de branches tant que la partie imaginaire de $x$ ne passera pas par zéro; mais si la partie imaginaire de $x$ passe par zéro et change de signe, en général la partie imaginaire de $y$ changera aussi de signe, et le point $[xy]$ passera d'une branche supérieure sur une branche inférieure, ou inversement.

En effet, représentons toujours $x$ par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y$ par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$; soient en conséquence $\alpha$ et $\alpha'$ les valeurs que prennent $x$ et $y$ au moment où $\beta$ et $\beta'$ s'annulent : pour obtenir les coordonnées d'un point infiniment voisin du point $[\alpha, \alpha']$, on pourrait faire varier à la fois $\alpha$ et $\alpha'$, $\beta$ et $\beta'$; mais comme en faisant varier $\alpha$ et $\alpha'$ on ne ferait que déplacer le point de départ sur la courbe réelle, ce qui ne peut avoir d'utilité, il suffira de faire varier $\beta$ et $\beta'$ : or C désignant la dérivée de $y$ par rapport à $x$ au point $x = \alpha, y = \alpha'$, ou la caractéristique de la conjuguée qui toucherait la courbe réelle en ce point; si $x$ prend la valeur $\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, $y$ deviendra $\alpha' + \mathrm{C}d\beta\sqrt{-1}$, le point

$$[\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \mathrm{C}d\beta\sqrt{-1}]$$

restera donc sur la conjuguée C; mais, suivant que $d\beta$ sera positif ou négatif, le point

$$[\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \mathrm{C}d\beta\sqrt{-1}]$$

se trouvera d'un côté ou de l'autre du point $[\alpha, \alpha']$.

**78.** Passons aux solutions du second groupe.

Les valeurs imaginaires de $y$, tirées d'une équation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

sont conjuguées deux à deux lorsque $x$ est réel, et elles conservent une certaine trace de ce caractère initial lorsque $x$ varie ensuite par valeurs imaginaires dans de certaines limites; c'est-à-dire que lorsque $x$ prend des valeurs imaginaires voisines de sa valeur réelle initiale, les valeurs imaginaires de $y$ qui dérivent de celles qui étaient conjuguées deux à deux, restent d'abord à peu près conjuguées, ou telles, qu'en les rangeant deux à deux convenablement, on en trouverait les parties réelles peu différentes et les parties imaginaires à peu près égales et de signes contraires.

Or de deux points ayant ainsi leurs abscisses à peu près égales et presque réelles et leurs ordonnées à peu près conjuguées, l'un appartiendra évidemment à une branche supérieure d'une conjuguée et l'autre à une branche inférieure d'une conjuguée infiniment voisine.

Au reste, les caractéristiques de ces deux conjuguées seront évidemment de signes contraires.

Car si $x$ passe de la valeur $\alpha$ à la valeur $\alpha + d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, dans les deux valeurs correspondantes de $y$, $\alpha' \pm \beta'\sqrt{-1}$, les parties imaginaires qui étaient finies resteront d'abord de signes contraires.

Cela posé, il est clair qu'un point

$$x = \alpha + d\beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + (\beta' + d\beta')\sqrt{-1},$$

s'il se trouve sur une branche supérieure de la conjuguée à laquelle il appartient, ne pourra passer sur une branche inférieure d'une conjuguée voisine, qu'en passant sur la courbe réelle ou son enveloppe imaginaire, suivant que la branche de la conjuguée $C = \infty$, qui contiendrait le point voisin

$$x = \alpha,$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

toucherait l'une ou l'autre enveloppe; il est de même évident que la caractéristique du point mobile ne pourra changer de signe pour de très-petits écarts de $x$, qu'au moment où ce point repasserait sur la conjuguée $C = \infty$, c'est-à-dire quand $x$ reprendrait une valeur réelle.

**79.** Nous arrivons maintenant aux solutions du troisième groupe.

Lorsque $\frac{dy}{dx}$ passe par une valeur réelle, le point $[xy]$ se trouve momentanément sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, et il s'agit de savoir s'il va passer du côté opposé à celui où il se trouvait d'abord, par rapport au point de contact de sa conjuguée avec l'enveloppe.

La solution de cette question se préjuge aisément : tant que $\frac{dy}{dx}$ reste imaginaire, le point $[xy]$ reste, sur la conjuguée à laquelle il appartient, du même côté du point où cette conjuguée touche l'enveloppe imaginaire ; lorsque $\frac{dy}{dx}$ passe par une valeur réelle, le point $[xy]$ vient se placer sur l'enveloppe ; et si la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ reparaît, mais affectée du signe contraire, il y a lieu de penser que le point $[xy]$, ayant poursuivi son chemin, est venu se placer sur une nouvelle conjuguée, de l'autre côté du point où cette conjuguée touche l'enveloppe.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

les coordonnées d'un point de l'enveloppe imaginaire ; $\frac{dy}{dx}$ en ce point sera réel et égal à $p$ ; $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera généralement imaginaire et égal à $r + s\sqrt{-1}$ ; si $x$ prend un accroissement $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, l'accroissement correspondant de $y$ sera

$$(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})\,p,$$

et celui de $\frac{dy}{dx}$

$$(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})(r + s\sqrt{-1});$$

notons en passant que pour rester sur l'enveloppe, il faudrait faire

$$s\,d\alpha + r\,d\beta = 0;$$

mais supposons que nous voulions rester sur la même conjuguée ; pour cela, il faudrait que la caractéristique ne variât pas, c'est-à-dire que le rapport des parties imaginaires de $dy$ et de $dx$ fût aussi égal à C; mais, avant tout, il doit être égal à $p$; or $p$ et C diffèrent généralement l'un de l'autre, de sorte que pour remplir en même temps les deux conditions, il faut faire $d\beta$ et, par suite, $d\beta'$ nuls.

Alors l'accroissement de $\frac{dy}{dx}$ se réduit à

$$(r + s\sqrt{-1})\,d\alpha,$$

et l'on voit que le signe de sa partie imaginaire change avec le signe de $d\alpha$.

Ainsi trois points infiniment voisins d'une même conjuguée, pour lesquels la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ est positive, nulle, négative, ou négative, nulle, positive, sont tels que

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1} - d\alpha, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} - p\,d\alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + d\alpha, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} + p\,d\alpha. \end{cases}$$

On voit que le point situé sur l'enveloppe est entre les deux autres.

*De l'indétermination qu'on a laissé peser sur la marche ultérieure de la fonction, à partir du moment où elle prenait une valeur infinie ou multiple.*

**80.** Nous avons déjà fait remarquer que si la fonction $y$, partant d'une valeur $y_0$ correspondante à la valeur initiale $x_0$ de la variable $x$, doit prendre une valeur $y_1$ qui ne soit ni multiple ni infinie, au moment où $x$ atteint une de ses valeurs singulières $a + b\sqrt{-1}$, $a_1 + b_1\sqrt{-1}$, etc., le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ peut parfaitement passer par le point correspondant $[a, b]$ ou $[a_1, b_1]$, etc., sans qu'il en résulte pour $y$ la moindre indétermination.

Nous n'apercevons pas davantage cette prétendue indétermination, lorsque $y$ prend une valeur multiple ou infinie.

Au reste, il est de notion commune en mathématiques que l'indétermination n'affecte jamais que les questions mal posées : on peut toujours la faire disparaître en précisant davantage.

**81**. Le cas le plus simple est celui où les valeurs singulières de $x$ et de $y$ sont les coordonnées d'un point multiple de la courbe dont on étudie l'équation ; nous le traiterons le premier.

Remarquons d'abord que si l'on a assujetti $x$ et $y$ à la condition de continuité, c'est parce que la solution de la question abstraite qu'on se proposait devait fournir celle d'une question concrète correspondante : or croit-on que, dans l'accomplissement d'un phénomène naturel, les variables expressément dénommées soient seules assujetties à croître d'une manière continue? Assurément toutes celles qui en dépendent et qu'on n'a pas introduites dans le calcul, leurs dérivées partielles, par exemple, de quelque ordre qu'elles soient, sont soumises à la même loi. Ainsi, les trois coordonnées d'un mobile ne sauraient évidemment varier que d'une manière continue, mais pour que le mouvement de ce mobile satisfasse vraiment aux conditions de continuité, il faudra encore que la vitesse, l'accélération, etc., à l'infini, varient elles-mêmes d'une manière continue.

Si donc $y$ prend $n$ valeurs égales à $y_1$ pour une même valeur $x_1$ de $x$, et que les $n$ valeurs correspondantes de $\frac{dy}{dx}$ soient différentes, pourquoi, puisqu'on avait assujetti expressément $y$ et implicitement jusque-là $\frac{dy}{dx}$ à la loi de continuité, pourquoi n'avoir pas déterminé la question en stipulant que $\frac{dy}{dx}$, qui n'avait pu varier que d'une manière continue, serait encore, au moment du passage de $x$ par le point dangereux, assujetti à continuer d'obéir à la même loi?

Le point $[xy]$, au moment où il parvient en un point multiple

$$[a + b\sqrt{-1},\ a' + b'\sqrt{-1}]$$

du lieu $f(x, y) = 0$, vient de décrire un élément curviligne tangent à l'une des droites représentées dans le système $C = \frac{b'}{b}$ par les équations

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 (x - x_1),$$
$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 (x - x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_n (x - x_1):$$

or ces droites étant supposées différentes, pourquoi ne pas assujettir l'élément suivant du chemin décrit par le point $[xy]$ à rester tangent à la même droite?

Si quelques-unes des droites

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 (x - x_1),$$
$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 (x - x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_n (x - x_1),$$

se trouvaient confondues, pourquoi ne pas lever la nouvelle indétermination qui se présenterait, en assujettissant à la loi de continuité $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$, jusqu'à ce que la séparation s'opérât d'elle-même?

**82.** L'indétermination est un peu plus difficile à lever lorsque les valeurs singulières de $x$ et de $y$ sont les coordonnées d'un des points du contour apparent, par rapport à l'axe des $x$, du lieu proposé, mais il est en quelque sorte plus important encore de la faire disparaître dans ce cas que dans le précédent, car la laisser subsister alors reviendrait pour ainsi dire à l'introduire partout; puisque, pour la faire naître, il suffirait, si $\frac{dy}{dx}$ devenait une seule fois réel, de placer d'avance le point de vue sur une parallèle à la tangente menée au point correspondant du lieu, de diriger l'axe des $y$ parallèlement à cette tangente. Il arriverait de là qu'une question qu'on aurait traitée, dont on aurait la solution, aurait été indéterminée si l'on avait placé autrement le point de vue! Cela répugne évidemment.

L'inconnue de la question conserve la même valeur, quelque part qu'on mette le point de vue, tant que l'indétermination ne se présente pas; si donc elle se présente, parce qu'on a mal dirigé l'axe des $y$, la seule chose à faire est de le diriger autrement et de recommencer le calcul.

Soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1},$$
$$y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1},$$

les valeurs initiales de la variable et de la fonction;

$$x = \alpha + \beta \sqrt{-1},$$

et

$$y = \alpha' + \beta' \sqrt{-1},$$

des valeurs quelconques que prennent en même temps $x$ et $y$, $x$ ayant varié d'une manière continue à partir de $x = x_0$, en suivant le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, et $y$ ayant aussi varié d'une manière continue à partir de $y = y_0$.

Soient enfin

$$x = m x_1 + n y_1,$$
$$y = m' x_1 + n' y_1,$$

les formules de transformations correspondantes au changement qu'on voudra faire subir aux axes, et

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1},$$
$$y_1 = \alpha'_1 + \beta'_1 \sqrt{-1},$$

les valeurs de $x_1$ et de $y_1$ correspondantes à

$$x = \alpha + \beta \sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta' \sqrt{-1}.$$

On aura entre $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha'_1$, $\beta'_1$ les cinq équations

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

$$\alpha + \beta \sqrt{-1} = m(\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}) + n(\alpha'_1 + \beta'_1 \sqrt{-1}),$$

$$\alpha' + \beta' \sqrt{-1} = m'(\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}) + n'(\alpha'_1 + \beta'_1 \sqrt{-1}),$$

auxquelles il faudra adjoindre l'équation nouvelle de la courbe, ce qui fera en tout sept équations, de sorte qu'une seule des variables $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha'_1$, $\beta'_1$ sera arbitraire.

Ces sept équations définiront explicitement ou implicitement un chemin

$$\psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$$

parfaitement équivalent à $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; de telle sorte que le point $[x_1 y_1]$ assujetti à partir de la même position initiale que le point $[xy]$ suivra exactement le même chemin que lui. Mais alors quand la nouvelle abscisse $x_1$ prendra la valeur correspondante à la valeur singulière $a + b\sqrt{-1}$ de l'ancienne, la nouvelle ordonnée habituellement ne prendra plus des valeurs égales, ou il faudrait qu'on eût encore mal placé le point de vue.

A la vérité, le point du chemin $\psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$ qui correspondra au point dangereux $[a, b]$ sera toujours multiple, et autant de branches du lieu $\psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$ y passeront, que $y$ prenait de valeurs égales pour $x = a + b\sqrt{-1}$, parce que le chemin $\psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$ conduisant chacun des points $[x_1 y_1]$ par la même route qu'il aurait suivie dans l'ancien système d'axes, comme plusieurs des points $[xy]$ venaient occuper une même position, il faudra bien que les routes des points $[x_1 y_1]$ passent aussi par cette position. Mais tandis que quelques-uns des points $[xy]$ venaient *en même temps* occuper une même place, les points $[x_1 y_1]$ correspondants n'y passeront plus que *séparément*.

Le changement d'axes le plus simple consistera habituellement dans une substitution de l'axe des $x$ à l'axe des $y$, et réciproquement.

Nous prendrons pour exemple l'équation

$$y^2 = 2px,$$

et nous supposerons le chemin défini par l'équation

$$\beta = \alpha.$$

Si nous faisons tourner les axes de 90 degrés, les formules de transformation seront

$$x = -y_1,$$
$$y = x_1;$$

de sorte que $x$ et $y$ étant représentés respectivement par

$$\alpha + \alpha\sqrt{-1},$$

et

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

$x_1$ et $y_1$ le seront par

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

et

$$-\alpha - \alpha\sqrt{-1};$$

on aura d'ailleurs entre $\alpha$, $\alpha'$, $\beta'$ les deux équations tirées de $y^2 = 2px$:

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = 2p\alpha,$$
$$2\alpha'\beta' = 2p\alpha,$$

d'où l'on conclura, pour définir le nouveau chemin,

$$\beta'^2 + 2\alpha'\beta' - \alpha'^2 = 0$$

ou

$$\beta' = \alpha'(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Cela posé, soit par exemple

$$x_0 = p(1 + \sqrt{-1})$$

la valeur initiale de $x$, et

$$y_0 = p\sqrt{1 + \sqrt{2}} + p\sqrt{-1 + \sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

la valeur initiale de $y$.

Les valeurs initiales de $x_1$ et de $y_1$ seront donc

$$x_{1,0} = p\sqrt{1+\sqrt{2}} + p\sqrt{-1+\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

et

$$y_{1,0} = -\left(1+\sqrt{-1}\right);$$

or c'est la partie

$$\beta' = \alpha'\left(-1+\sqrt{2}\right)$$

du nouveau chemin qui comporte ces valeurs initiales; par conséquent, il faudra dans l'équation

$$x_1^2 = -2py_1,$$

ou

$$y_1 = -\frac{x_1^2}{2p}$$

assujettir $x_1$, représenté par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, à suivre le chemin

$$\beta' = \alpha'\left(-1+\sqrt{2}\right),$$

pour que le point $[x_1 y_1]$ décrive la même route que le point $[xy]$, et si $\frac{dy_1}{dx_1}$ reste continu quand $x_1$ et $y_1$ passeront en même temps par zéro, le chemin ne pourra pas se changer en

$$\beta' = \alpha'\left(-1-\sqrt{2}\right);$$

par conséquent, quelle que soit la valeur finale de $x$, il faudra parmi les deux valeurs correspondantes de $y$ choisir celle qui satisfera à la condition

$$\beta' = \alpha'\left(-1+\sqrt{2}\right).$$

**83**. Le cas où $y$ prend une valeur infinie n'est pas plus difficile à traiter que les deux précédents.

Lorsqu'une question concrète aura donné lieu à considérer une des variables dénommées, dans un état de grandeur depassant toute limite, cette même question, si elle est bien posée, fournira toujours un moyen de savoir comment la variable considérée revient de l'infini.

L'infini n'est encore que relatif, il ne se présente que quand on ne veut pas l'éviter : à telle variable qui devient infinie dans les équations qu'on a posées pour traiter la question, il en correspond des milliers d'autres qui auraient pris des valeurs correspondantes finies ; c'est à l'opérateur à substituer à propos l'une d'elles à celle qui tombe dans un cas singulier.

Par exemple, quand le point $[xy]$ passait sur la conjuguée dont les abscisses sont réelles, aurais-je été bien venu à prétendre que C devenant infini, sa marche ultérieure allait être affectée d'indétermination ?

Si $y$ devient infini, on étudiera la marche d'une autre variable qui ne devienne pas infinie en même temps que $y$ : par exemple, on étudiera la marche de $\frac{1}{y}$, les variations de $\frac{1}{y}$ fourniront sans difficulté celles de $y$.

**84**. L'analyse que nous venons de présenter nous paraît établir clairement que la question ne comporte jamais de difficultés d'un autre ordre que celles qu'on rencontre généralement dans la discussion des courbes ; toute la différence consiste en ce qu'au lieu d'une seule courbe, la question, par sa nature même, en embrasse une infinité. Mais elle ne sort pas pour cela des bornes de la géométrie analytique élémentaire.

D'un autre côté, les moyens que nous avons fournis nous paraissent suffisants pour lever toutes les difficultés ; nous ne chercherons donc pas à prévoir tous les cas qui pourraient se présenter, à les classer et à obtenir des formules donnant d'avance des résultats tout calculés.

Nous nous bornerons à discuter quelques exemples simples : chacun reconnaîtra qu'il pourrait aisément en traiter d'autres.