JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le triple d'un nombre premier de la forme $8\mu+3$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 475-476.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__475_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

THÉORÈME

CONCERNANT LE TRIPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $8\mu + 3$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier $8\mu + 3$, et considérons son triple $3m$. Le théorème que nous voulons donner ici, au sujet du produit $3m$, consiste en ce que l'on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$3m = 4x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier $(8\nu + 5)$ qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si du triple $(3m)$ d'un nombre premier m de la forme $8\mu + 3$, on retranche, tant que faire se peut, les carrés 4, 36, 100, etc., des nombres impairement pairs, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier $(8\nu + 5)$ qui ne divise pas y.

Soit comme exemple $m = 3$, d'où $3m = 9$. On aura

$$9 = 4.1^2 + 5.1^2.$$

Soit ensuite $m = 11$, d'où $3m = 33$. On aura de même

$$33 = 4.1^2 + 29.1^2,$$

où 29 est un nombre premier de la forme $8\nu + 5$.

Soit en troisième lieu $m = 19$, d'où $3m = 57$. On pourra de 57 retrancher 4 et 36, d'où les deux restes 53 et 21 dont le premier seul est de la forme voulue; car $21 = 3 \times 7$, tandis que 53 (qui est un nombre premier $8\nu + 5$) donne lieu à l'équation canonique

$$57 = 4.1^2 + 53.1^2.$$

Soit encore $m = 43$, d'où $3m = 129$. En retranchant 4, 36 et 100 de 129, on aura ces trois restes 125, 93 et 29, dont le dernier est de la forme exigée. Notre théorème est donc vérifié. On le trouve exact aussi pour $m = 59$, et cette fois encore on n'a qu'une seule équation canonique, savoir

$$3.59 = 4.1^2 + 173.1^2.$$

Mais pour $m = 67$, on en a trois :

$$3.67 = 4.1^2 + 197.1^2,$$
$$3.67 = 4.5^2 + 101.1^2,$$
$$3.67 = 4.7^2 + 5.1^2.$$

Il serait inutile d'ajouter d'autres exemples.

FIN DU TOME CINQUIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.