JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Mémoire sur le développement en séries des coordonnées des planètes et de la fonction perturbatrice

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 65-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__65_0>

MÉMOIRE

SUR

LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES

DES

COORDONNÉES DES PLANÈTES ET DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

PAR M. PUISEUX.

On fait dans l'astronomie un usage fréquent des formules qui expriment les coordonnées d'une planète par des séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples de l'anomalie moyenne. Pour toutes les valeurs réelles de cet angle, les séries dont il s'agit restent convergentes; mais il n'en est plus de même quand on lui attribue des valeurs imaginaires : si l'on cherche alors les conditions de convergence, on est conduit à prendre pour variable, au lieu de l'anomalie moyenne elle-même, l'exponentielle imaginaire dont elle est l'argument. La considération de cette variable nouvelle permet, non-seulement d'assigner avec facilité les limites dans lesquelles les développements des coordonnées restent convergents, mais encore, comme l'a remarqué M. Cauchy, de calculer sans peine les termes généraux de ces développements; il y a plus : la même méthode appliquée à la fonction perturbatrice fournit le terme général de cette fonction développée suivant les sinus et cosinus d'arcs multiples des anomalies moyennes de deux planètes. Les coefficients du sinus et du cosinus d'un argument donné s'obtiennent ainsi directement sous la forme de séries procédant suivant les puissances entières des deux excentricités, du sinus de la demi-inclinaison mutuelle des orbites et du rapport des grands axes, c'est-à-dire sous la forme la plus appropriée à l'usage qu'on en fait dans la Mécanique céleste.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES COORDONNÉES D'UNE PLANÈTE.

Nommons X, Y, Z les coordonnées d'une planète rapportées à trois axes rectangulaires quelconques passant par le centre du Soleil, et soient ξ, η les coordonnées du même astre par rapport à deux axes rectangulaires situés dans le plan de l'orbite, le premier étant dirigé vers le périhélie; on aura

$$X = A\xi + A_1\eta, \quad Y = B\xi + B_1\eta, \quad Z = C\xi + C''\eta,$$

A, B, C, A_1, B_1, C_1 désignant des quantités qui restent constantes dans le mouvement elliptique.

Appelons ζ l'anomalie moyenne, u l'anomalie excentrique, r le rayon vecteur, a le demi grand axe de l'orbite, e l'excentricité; nous aurons les formules connues

$$u - e\sin u = \zeta, \quad r = a(1 - e\cos u), \quad \xi = a(\cos u - e),$$
$$\eta = a\sqrt{1-e^2}\sin u.$$

Si maintenant nous posons

$$E^{i\zeta} = z, \quad E^{iu} = s,$$

E désignant la base des logarithmes népériens, et i l'imaginaire $\sqrt{-1}$, l'équation

$$u - e\sin u = \zeta,$$

qu'on peut écrire

$$E^{iu - ie\sin u} = E^{i\zeta},$$

nous donnera

$$sE^{-\frac{e}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)} = z, \tag{1}$$

et nous aurons de plus

$$r = a\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right], \quad \xi = \frac{a}{2}\left(s + \frac{1}{s} - 2e\right), \quad \eta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{2i}\left(s - \frac{1}{s}\right).$$

Ainsi s etant une fonction transcendante de z assujettie à vérifier l'équation (1), r, ξ, η, et par suite X, Y, Z sont des fonctions rationnelles de s [*].

Ajoutons d'ailleurs qu'en vertu des formules

$$z^m = \cos m\zeta + i \sin m\zeta, \quad z^{-m} = \cos m\zeta - i \sin m\zeta,$$

la recherche du développement d'une fonction de X, Y, Z suivant les sinus et cosinus des multiples de ζ revient à celle du développement de la même fonction suivant les puissances entières, positives et négatives de z.

Avant de nous occuper de ce développement, il nous faut d'abord définir nettement la fonction de z désignée par s. On reconnaît aisément que pour chaque valeur de z l'équation (1) fournit une infinité de valeurs de s. En effet, soit

$$z = \mathrm{E}^{p+iq}, \quad s = \mathrm{E}^{x+iy},$$

p, q, x, y désignant des nombres réels; en représentant, pour abréger, par $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{C}(x)$ le sinus et le cosinus hyperboliques de x, c'est-à-dire les deux fonctions

$$\frac{\mathrm{E}^x - \mathrm{E}^{-x}}{2}, \quad \frac{\mathrm{E}^x + \mathrm{E}^{-x}}{2},$$

on partagera l'équation (1) dans les deux suivantes:

$$(2) \qquad x - e\,\mathrm{S}(x)\cos y = p, \quad (3)\ \ y - e\,\mathrm{C}(x)\sin y = q. \ [**]$$

Les valeurs de x et de y qui satisfont à ces deux équations peuvent être considérées comme les coordonnées des points communs aux deux courbes qu'elles représentent par rapport à deux axes rectangulaires.

[*] M. Cauchy a déjà remarqué et utilisé la propriété dont jouissent les coordonnées d'une planète d'être des fonctions rationnelles de la variable s (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIX et XX).

[**] On pourrait au second membre de l'équation (3) ajouter un multiple arbitraire de 2π : les valeurs de y qui satisfont aux équations (2) et (3) seraient alors augmentées du même multiple de 2π; mais les valeurs correspondantes de s resteraient les mêmes. La considération de ce multiple est donc inutile dans la recherche des racines de l'équation (1).

En construisant ces courbes, on reconnaît qu'elles ont une infinité de points d'intersection formant deux séries situées l'une d'un côté, l'autre de l'autre côté de l'axe des y. Dans chacune de ces séries, lorsqu'on s'éloigne suffisamment de l'axe des x, les ordonnées tendent à devenir égales aux termes de la suite $\pm\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$, k désignant un nombre entier positif; les valeurs numériques des abscisses croissent indéfiniment en même temps que celles des ordonnées, mais moins rapidement.

On arrive aux mêmes conclusions en cherchant les expressions approchées des coordonnées des points d'intersection très-éloignés de l'origine. L'équation (3) montre d'abord que pour x très-grand, y doit être très-grand, ou bien $\sin y$ très-petit; d'un autre côté, l'équation (2) donne alors pour $\cos y$ une valeur positive très-petite : ainsi l'hypothèse de $\sin y$ très-petit doit être rejetée, et il faut que y soit très-grand et de plus très-voisin d'un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Faisons donc

$$y = 2m\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right),$$

m désignant un très-grand nombre entier, positif ou négatif, et ε un très-petit angle positif.

Soit d'abord $m > 0$; l'équation (2) donnant pour $\sin y$ une valeur positive, il faudra dans l'expression précédente de y rejeter le signe inférieur et prendre

$$y = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi - \varepsilon;$$

il en résulte, en désignant par α, β, γ des nombres très-petits,

$$\mathrm{C}(x) = \frac{2m\pi}{e}(1+\alpha), \quad \mathrm{E}^{\pm x} = \frac{4m\pi}{e}(1+\beta), \quad x = \pm \log\frac{4m\pi}{e} + \gamma.$$

Soit en second lieu $m < 0$; il faut alors que $\sin y$ soit négatif : on prendra donc, en mettant le signe de m en évidence,

$$y = -\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon,$$

et on en conclura encore

$$x = \pm \log\frac{4m\pi}{e} + \gamma.$$

A de très-grandes valeurs de x répondent, suivant que x est positive ou négative, des valeurs de s dont le module est très-grand ou très-petit. On voit donc que les valeurs de s dont le module est très-grand sont les produits par un facteur très-voisin de 1 des valeurs de l'expression $\pm \frac{4m\pi}{e} i$, et que les valeurs de s dont le module est très-petit sont les produits par un facteur très-voisin de 1 des valeurs de l'expression $\pm \frac{e}{4m\pi} i$ [*]. Il s'ensuit que R étant supposé positif et très-grand, $\frac{e\mathrm{R}}{2\pi}$ est approximativement le nombre des valeurs de s dont le module est compris entre 1 et R, et que c'est aussi le nombre

---

[*] Si l'on désirait des expressions plus approchées des valeurs de s qui ont des modules très-grands ou très-petits, on les trouverait par les formules suivantes. L'entier m étant toujours supposé positif et très-grand, soit

$$\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi - q = a, \quad \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi + q = b,$$

et représentons par M un nombre tel, que le rapport $\frac{\mathrm{M}}{m^\alpha}$ soit infiniment petit pour m infiniment grand, quel que soit l'exposant positif α : les deux expressions

$$\frac{2a}{e} i + \frac{2}{e}\left(\log\frac{2a}{e} - p\right) - \left[\frac{2}{ae}\left(\log\frac{2a}{e} - p\right) + \frac{e}{2a}\right] i + \frac{\mathrm{M}}{a^2},$$

$$-\frac{2b}{e} i + \frac{2}{e}\left(\log\frac{2b}{e} - p\right) + \left[\frac{2}{be}\left(\log\frac{2b}{e} - p\right) + \frac{e}{2b}\right] i + \frac{\mathrm{M}}{b^2},$$

fourniront pour chaque valeur de m deux valeurs de s à modules très-grands, et de même les deux expressions

$$\frac{1}{-\frac{2a}{e} i + \frac{2}{e}\left(\log\frac{2a}{e} + p\right) + \left[\frac{2}{ae}\left(\log\frac{2a}{e} + p\right) + \frac{e}{2a}\right] i + \frac{\mathrm{M}}{a^2}},$$

$$\frac{1}{\frac{2b}{e} i + \frac{2}{e}\left(\log\frac{2b}{e} + p\right) - \left[\frac{2}{be}\left(\log\frac{2b}{e} + p\right) + \frac{e}{2b}\right] i + \frac{\mathrm{M}}{b^2}}$$

fourniront pour chaque valeur de m deux valeurs de s à modules très-petits.

approximatif des valeurs de s dont le module est compris entre 1 et $\frac{1}{R}$.

Pour chaque valeur de z l'équation (1) peut être considérée comme ayant un nombre infini de racines égales à zéro et aussi un nombre infini de racines égales à l'infini; mais les valeurs finies de s sont généralement inégales.

Cherchons maintenant pour quelles valeurs particulières de z deux des valeurs finies de s peuvent être égales entre elles. Chacune de ces valeurs de z, jointe à une valeur convenable de s, devra vérifier à la fois les deux équations

$$sE^{-\frac{e}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} - z = 0, \quad E^{-\frac{e}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1 - \frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right] = 0,$$

dont la seconde s'obtient en égalant à zéro la dérivée prise par rapport à s du premier membre de la première. On conclut de là, en excluant les valeurs nulles ou infinies de s,

$$1 - \frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right) = 0.$$

Si l'on appelle ψ l'angle aigu dont le sinus est égal à e, les deux racines de cette dernière équation seront

$$s_1 = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}, \quad s_2 = \cot\frac{\psi}{2},$$

et les valeurs correspondantes de z seront

$$z_1 = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\,E^{\cos\psi}, \quad z_2 = \cot\frac{\psi}{2}\,E^{-\cos\psi}.$$

Pour chacune de ces valeurs de z, deux des valeurs finies de s fournies par l'équation (1) sont égales entre elles : pour toute autre valenr finie de z, les racines finies de cette même équation sont toutes inégales. Observons d'ailleurs que z_1 et z_2 sont des nombres réels et positifs ainsi que s_1 et s_2 et qu'on a

$$z_1 z_2 = 1, \quad s_1 s_2 = 1, \quad s_1 < 1, \quad s_2 < 1 :$$

de plus la dérivée de z_1 par rapport à ψ, savoir $\dfrac{\mathrm{E}^{\cos\psi}\cos^2\psi}{2\cos^2\dfrac{\psi}{2}}$, étant essentiellement positive, on en conclut que z_1 augmente lorsque ψ croît de 0 à 90 degrés; mais pour $\psi = 90°$, on a $z_1 = 1$; donc pour une valeur quelconque de ψ inférieure à 90 degrés, on a $z_1 < 1$ et par suite $z_2 > 1$.

Imaginons à présent qu'à chaque valeur $z = a + ib$ du paramètre z on fasse répondre sur un plan le point Z qui a pour abscisse a et pour ordonnée b : soit z_0 une valeur particulière de z et nommons σ une des valeurs finies de s qui satisfont à l'équation

$$s\mathrm{E}^{-\frac{e}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} = z_0.$$

Cela posé, concevons que le point Z, partant de la position initiale Z_0 correspondante à z_0, décrive un chemin quelconque Z_0M, et prenons σ pour valeur initiale de s. Pour qu'on soit assuré que la fonction s, assujettie à varier d'une manière continue avec z, aura en chaque point du chemin Z_0M une valeur unique et parfaitement déterminée, il faudra : 1° que la ligne Z_0M ne passe par aucun des deux points Z_1, Z_2 correspondants aux valeurs z_1 et z_2 de z qui font acquérir à l'équation (1) des racines égales de valeurs finies; 2° que sur la même ligne Z_0M notre fonction s ne puisse se réduire à zéro ou grandir jusqu'à l'infini. Cette seconde condition n'est pas moins nécessaire que la première, puisque pour chaque valeur de z on peut regarder zéro ou l'infini comme des racines multiples de l'équation (1) : j'ajoute qu'elle sera remplie, si aucun point du chemin Z_0M n'est à une distance nulle ou infinie de l'origine des coordonnées.

En effet, le chemin Z_0M satisfaisant aux conditions qu'on vient d'énoncer, admettons, s'il est possible, que s y devienne infinie, et soit Q le point où cela arriverait pour la première fois : nommons P un point qui précède Q sur le chemin Z_0M et qui en soit très-voisin. De P en Q la valeur de s serait très-grande et dans l'équation différentielle

$$ds = \frac{s}{1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}\frac{dz}{z} = -\frac{dz}{\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{s}+\frac{e}{2}\cdot\frac{1}{s^2}\right)z},$$

on pourrait, à la place du facteur $\frac{e}{2} - \frac{1}{s} + \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{s^2}$, écrire $\frac{e}{2}(1 + \omega)$, ω étant très-petit; il viendrait ainsi

$$ds = -\frac{2dz}{(1+\omega)ez}.$$

D'un autre côté, en posant

$$z = \rho E^{i\theta},$$

où ρ et θ sont supposés réels et ρ positif, on a

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\rho}{\rho} + i\,d\theta,$$

d'où

$$\text{module de } \frac{dz}{z} = \sqrt{\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\theta^2},$$

ou encore

$$\text{module de } \frac{dz}{z} = \frac{d\lambda}{\rho},$$

$d\lambda$ désignant la différentielle de l'arc décrit par le point Z. On aurait donc, en appelant μ le minimum du module de $1 + \omega$ le long du chemin PQ, et ρ' le minimum de ρ ou la plus courte distance de l'origine à l'arc PQ,

$$\text{module de } ds < \frac{2d\lambda}{\mu\rho' e}.$$

On déduit de là que le module de l'accroissement de s, quand on passe du point P au point Q, serait moindre que la quantité finie $\frac{2}{\mu\rho' e}$, l étant la longueur de l'arc PQ. Il est donc impossible que la fonction s devienne infinie au point Q.

De là il est aisé de conclure que la fonction s ne peut pas non plus devenir nulle le long du chemin Z_0M; car soit

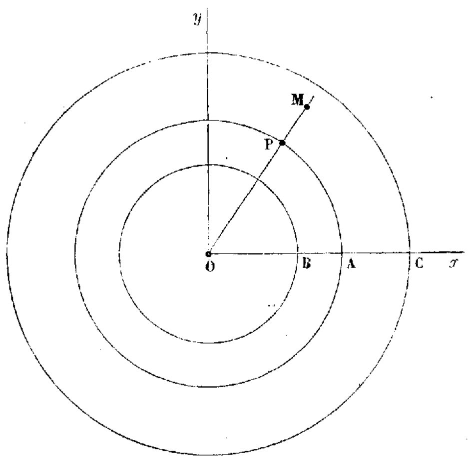
$$z = \frac{1}{z'}, \quad s = \frac{1}{s'}:$$

on aura entre z' et s' l'équation

$$s' E^{-\frac{c}{2}\left(s' - \frac{1}{s'}\right)} = z',$$

qui est toute pareille à l'équation (1). Au chemin $Z_0 M$ décrit par le point Z correspondra un chemin $Z'_0 M'$ décrit par le point Z', et si aucun point du premier chemin n'est à une distance nulle ou infinie de l'origine des coordonnées, il en sera de même sur le second. D'après ce qu'on vient de démontrer, la fonction s' ne pourra pas devenir infinie; la fonction s ne pourra donc pas devenir nulle.

Les conditions nécessaires pour que la fonction s ait une valeur unique et finie en chaque point du chemin Z_0 M se trouveront remplies



en particulier, si l'on suppose ce chemin entièrement renfermé dans l'espace G compris entre les deux circonférences décrites de l'origine O comme centre avec des rayons OB et OC égaux à z_1 et à z_2. On peut donc dire, en se limitant à cet espace, que l'équation (1) définit une infinité de fonctions de z qui ont pour valeurs initiales les diverses racines de l'équation

$$s E^{-\frac{c}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)} = z_0$$

et qui restent toujours distinctes les unes des autres, pendant que le point Z décrit le chemin quelconque Z_0 M.

Dans ce qui va suivre, non-seulement nous admettrons que le point Z ne sorte pas de l'espace G, mais encore nous prendrons $z_0 = 1$ pour la valeur initiale de z et nous considérerons spécialement celle des fonctions s dont la valeur initiale est elle-même égale à 1. Cette fonction particulière, que nous désignerons seule dorénavant par la lettre s, jouit seule aussi de la propriété de reprendre toujours la même valeur, quand le point Z repasse par une position qu'il a déjà occupée.

Pour le démontrer, supposons d'abord que le point Z reste sur la circonférence AP décrite de l'origine comme centre avec un rayon égal à 1 : on pourra poser alors $z = E^{i\zeta}$, ζ désignant un angle réel ; et si l'on fait en même temps $s = E^{iu}$, on voit qu'on satisfera à l'équation (1) en prenant pour u l'angle réel donné par l'équation $u - e \sin u = \zeta$, c'est-à-dire l'anomalie excentrique correspondante à l'anomalie moyenne ζ. Il existe donc une fonction s qui a pour expression E^{iu} tant que le point Z reste sur la circonférence AP, et comme elle se réduit à l'unité quand le point Z occupe la position A pour laquelle $z = 1$, cette fonction est bien celle que nous sommes convenu de désigner exclusivement par la lettre s.

Nous voyons de plus que la fonction s reprend la même valeur toutes les fois que le point Z, se déplaçant sur la circonférence AP, vient à repasser par un même point quelconque P de cette ligne : car les valeurs correspondantes de l'angle u ne peuvent différer que de multiples de 2π, et lorsque u varie de 2π, l'exponentielle E^{iu} ne change pas. Considérons maintenant un point quelconque M de l'espace G, et soit P le point où la circonférence de rayon 1 coupe la droite OM du même côté du centre que le point M : quel que soit, dans ce même espace G, le chemin par lequel le point Z va de A en M, on pourra toujours, sans changer la valeur finale de s, remplacer le chemin dont il s'agit par un autre chemin dans lequel le point Z, après avoir décrit l'arc de cercle AP, effectue un certain nombre de révolutions complètes sur la circonférence AP et trace enfin la droite PM [*]. Or, quel

[*] Cette proposition résulte des principes que j'ai établis dans un précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, t. XV, p. 370). Bien que dans ce Mémoire j'aie eu plus spécialement en vue les équations algébriques, les principes dont il s'agit s'appliquent également aux équations transcendantes du genre de l'équation (1).

que soit le nombre des révolutions effectuées, la valeur de s sera toujours la même au moment où le point Z partira de la position P pour décrire la droite PM. La fonction s obtiendra donc toujours la même valeur quand le point Z arrivera en M.

Il suit de là et d'un théorème dû à M. Cauchy et complété par M. Laurent [*] que pour toutes les valeurs de z qui répondent à l'espace G, ou dont le module est compris entre z_1 et z_2, on pourra exprimer par une série convergente ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives de z, non-seulement la fonction s, mais encore toute fonction S de s qui reste finie et continue dans tout l'espace G et qui reprend toujours la même valeur en chaque point de cet espace. Telle est, par exemple, une fonction entière des coordonnées X, Y, Z; car ces coordonnées sont des fonctions rationnelles de s et ne deviennent infinies que pour s nulle ou infinie : telle est encore la fonction

$$r^{\pm p} = \left\{ a\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]\right\}^{\pm p},$$

p désignant un nombre entier : car r ne s'annule que pour les valeurs $s = s_1$, $s = s_2$ qui répondent à $z = z_1$, $z = z_2$ et par conséquent ne se réduit pas à zéro dans l'intérieur de l'espace G. Une puissance fractionnaire $r^{\pm \frac{p}{q}}$ du rayon vecteur remplirait également les conditions imposées à la fonction S. Il suffirait, pour le prouver, de démontrer que $r^{\pm \frac{p}{q}}$, une fois définie par sa valeur initiale, ne peut acquérir qu'une seule valeur en chaque point de l'espace G; c'est ce qu'on établira aisément en montrant d'abord qu'une révolution complète sur le cercle de rayon 1 n'altère pas cette fonction. Ajoutons enfin qu'on pourrait prendre encore pour s le produit d'une puissance du rayon vecteur par un polynôme entier en X, Y, Z, ce qui est le type de la plupart des fonctions qu'on peut avoir à développer dans la théorie du mouvement elliptique d'une planète.

---

[*] *Voir* divers Mémoires de M. Cauchy ou bien la *Théorie des fonctions doublement périodiques,* par MM. Briot et Bouquet, p. 31.

Pour calculer effectivement les coefficients des diverses puissances de z dans le développement de la fonction S, nous observerons qu'en vertu du théorème déjà cité on a

$$2i\pi S = \int S z^{-1}\,dz + z\int S z^{-2}\,dz + z^2\int S z^{-3}\,dz + \ldots$$
$$+ z^{-1}\int S dz + z^{-2}\int S z dz + z^{-3}\int S z^2\,dz + \ldots;$$

les intégrales définies du second membre étant prises tout le long d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon plus grand que z_1 et plus petit que z_2, mais d'ailleurs arbitraire. Nous ferons le rayon de ce cercle égal à 1, de sorte qu'on ait $z = E^{i\zeta}$; il en résultera $s = E^{iu}$, et pendant que le point Z décrira le cercle dont il s'agit, le point qui répond à la valeur de s fera aussi une révolution complète sur le même cercle. Si donc dans les intégrales définies de la formule précédente on remplace z par sa valeur en s tirée de l'équation (1), les intégrations devront encore se faire, par rapport à la nouvelle variable s, le long d'un cercle de rayon 1. On trouvera ainsi pour le coefficient de z^m dans le développement de $2i\pi S$ l'expression

$$\int S E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]s^{-m}\cdot\frac{ds}{s}.$$

La quantité $E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]$ se développe aisément suivant les puissances entières de s; concevons qu'on ait développé de la même manière la fonction S, ce qui sera facile dans les cas cités tout à l'heure comme exemple, et nommons P_m le coefficient de s^m dans le produit

$$S E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]:$$

si l'on observe que l'intégrale définie $\int s^p\cdot\frac{ds}{s}$, prise le long d'un cercle qui renferme l'origine, se réduit à $2i\pi$ ou à zéro, suivant que l'entier p est nul ou ne l'est pas, on verra que le coefficient de z^m dans le développement de $2i\pi S$ se réduit à $2i\pi P_m$. On a donc

$$S = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + P_3 z^3 + \ldots$$
$$+ P_{-1} z^{-1} + P_{-2} z^{-2} + P_{-3} z^{-3} + \ldots.$$

En d'autres termes : *Le nombre entier m étant positif ou négatif, le coefficient de* z^m *dans le développement de* S *suivant les puissances de* z *est égal à celui de* s^m *dans le développement du produit*

$$SE^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]$$

suivant les puissances de s.

Cette proposition a été énoncée par M. Cauchy dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XII, p. 88; mais l'illustre géomètre ne paraît pas s'être préoccupé des conditions de convergence de la série, lorsque le module de z est différent de l'unité.

On peut, comme l'a encore remarqué M. Cauchy, donner une autre forme à ce coefficient. On a en effet, en intégrant par partie et considérant d'abord les intégrales indéfinies,

$$\int S z^{-m-1}\,dz = -\frac{Sz^{-m}}{m} + \frac{1}{m}\int z^{-m}\frac{dS}{ds}\,ds;$$

prenant ensuite les intégrales le long du cercle de rayon 1 et supposant m différent de zéro, on aura

$$\int S z^{-m-1}\,dz = \frac{1}{m}\int z^{-m}\frac{dS}{ds}\,ds = \frac{1}{m}\int \frac{dS}{ds}\,E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\,s^{-m+1}\,\frac{ds}{s}.$$

On conclut de là que *le coefficient de* z^m *dans le développement de* S *suivant les puissances de* z *est égal à celui de* s^{m-1} *dans le développement du produit*

$$\frac{1}{m}\frac{dS}{ds}E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}$$

suivant les puissances de s. Mais cette seconde expression ne s'applique pas au cas de $m = 0$.

Comme première application, posons $S = s$, ce qui nous fera retrouver les développements connus de l'anomalie excentrique et du rayon vecteur. D'abord le terme indépendant de z dans le développement de s suivant les puissances de z sera le terme indépendant de s dans le produit

$$s\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right].$$

Ce terme se réduit donc à $-\frac{e}{2}$. Quant au coefficient de z^m, on voit, en employant la seconde expression, qu'il est égal au coefficient de s^{m-1} dans la quantité

$$\frac{1}{m}E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} = \frac{1}{m}\left[1 + \frac{m\frac{e}{2}}{1}\left(s - \frac{1}{s}\right) + \frac{m^2\left(\frac{e}{2}\right)^2}{1.2}\left(s - \frac{1}{s}\right)^2 + \dots\right].$$

Soit d'abord $m > 0$; on trouvera pour ce coefficient la valeur

$$\begin{aligned}Q_m = \frac{1}{m}\Bigg[&\frac{m^{m-1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m-1}}{1.2\dots(m-1)} - \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m^{m+1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+1}}{1.2\dots(m+1)} + \dots \\ &+ (-1)^p\frac{(m+2p-1)(m+2p-2)\dots(m+p)}{1.2\dots p}\cdot\frac{m^{m+2p-1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2p-1}}{1.2\dots(m+2p-1)} + \dots\Bigg].\end{aligned}$$

Soit ensuite $m < 0$; mettant le signe de m en évidence et désignant par R_m le coefficient de z^{-m}, on aura de la même manière

$$\begin{aligned}R_m = -\frac{1}{m}\Bigg[&\frac{m^{m+1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+1}}{1.2\dots(m+1)} - \frac{m+3}{1}\cdot\frac{m^{m+3}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+3}}{1.2\dots(m+3)} + \dots \\ &+ (-1)^p\frac{(m+2p+1)(m+2p)\dots(m+p+2)}{1.2\dots p}\cdot\frac{m^{m+2p+1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2p+1}}{1.2\dots(m+2p+1)} + \dots\Bigg].\end{aligned}$$

Le développement de s suivant les puissances de z sera donc

$$\begin{aligned}s = -\frac{e}{2} &+ Q_1 z + Q_2 z^2 + Q_3 z^3 + \dots \\ &+ R_1 z^{-1} + R_2 z^{-2} + R_3 z^{-3} + \dots.\end{aligned}$$

On a déjà remarqué ci-dessus que s se change en $\frac{1}{s}$ quand on change z en $\frac{1}{z}$; on a donc aussi

$$\frac{1}{s} = -\frac{e}{2} + R_1 z + R_2 z^2 + R_3 z^3 + \ldots + Q_1 z^{-1} + Q_2 z^{-2} + Q_3 z^{-3} + \ldots.$$

Il suit de là

$$\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right) = -\frac{e}{2} + (Q_1+R_1)\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) + (Q_2+R_2)\cdot\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) + \ldots,$$

$$\frac{1}{2i}\left(s-\frac{1}{s}\right) = (Q_1-R_1)\cdot\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) + (Q_2-R_2)\cdot\frac{1}{2i}\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right) + \ldots.$$

Faisons maintenant $z = E^{i\zeta}$, $s = E^{iu}$ et les deux équations précédentes deviendront

$$\cos u = -\frac{e}{2} + (Q_1+R_1)\cos\zeta + (Q_2+R_2)\cos 2\zeta + \ldots,$$

$$\sin u = (Q_1-R_1)\sin\zeta + (Q_2-R_2)\sin 2\zeta + \ldots,$$

ou bien

$$\cos u = -\frac{e}{2} + K_1\cos\zeta + K_2\cos 2\zeta + \ldots,$$

$$\sin u = L_1 \sin\zeta + L_2 \sin 2\zeta + \ldots,$$

en posant

$$K_m = \frac{1}{m}\left[\frac{m^{m-1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} - \frac{m+2}{1}\cdot\frac{m^{m+1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^p\frac{(m+2p)(m+2p-1)\ldots(m+p+1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^{m+2p-1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2p-1}}{1.2\ldots(m+2p-1)} + \ldots\right],$$

$$L_m = \frac{1}{m}\left[\frac{m^{m-1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m^{m+1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^p\frac{m}{p}\cdot\frac{(m+2p-1)(m+2p-2)\ldots(m+p+1)}{1.2\ldots(p-1)}\cdot\frac{m^{m+2p-1}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2p-1}}{1.2\ldots(m+2p-1)} + \ldots\right].$$

On aura par suite

$$u = \zeta + e\sin u = \zeta + L_1 e\sin\zeta + L_2 e \sin 2\zeta + \ldots,$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u = 1 + \frac{e^2}{2} - K_1 e\cos\zeta - K_2 e\cos 2\zeta - \ldots$$

Il suit de notre analyse que ces divers développements subsistent non-seulement pour les valeurs de z dont le module est 1, ou, ce qui est la même chose, pour les valeurs réelles de ζ, mais aussi pour toutes les valeurs de z dont le module est compris entre z_1 et z_2, c'est-à-dire pour toutes les valeurs imaginaires de ζ de la forme $a + ib$ dans lesquelles la valeur numérique de b est inférieure à la limite

$$\log\cot\frac{\psi}{2} - \cos\psi.$$

Seulement alors l'angle u n'est plus réel et il faut le regarder comme déterminé par les équations

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right), \quad \sin u = \frac{1}{2i}\left(s - \frac{1}{s}\right),$$

s étant la fonction de z définie ci-dessus.

Comme seconde application, nous ferons encore

$$S = \frac{a^n}{r^n} = \left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]^{-n},$$

n désignant un nombre entier positif. La fonction S ne changeant pas quand on change s en $\frac{1}{s}$ et par suite z en $\frac{1}{z}$, on aura ici $P_{-m} = P_m$ et la valeur commune de ces deux coefficients sera égale au coefficient de s^m dans la quantité

$$E^{\frac{me}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)}\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]^{-n+1}.$$

Or on a

$$\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]^{-n+1} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}\left(\frac{e}{2}\right)^p\left(s + \frac{1}{s}\right)^p,$$

et

$$E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{m^q \left(\frac{e}{2}\right)^q}{1.2\ldots q}\left(s-\frac{1}{s}\right)^q;$$

il suit de là que P_m est le coefficient de s^m dans l'expression

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^q}{1.2\ldots q}\left(\frac{e}{2}\right)^{p+q}\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s-\frac{1}{s}\right)^q,$$

Le produit $\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s-\frac{1}{s}\right)^q$ ne peut contenir s^m que si $p+q$ est au moins égal à m; il faut de plus que $p+q-m$ soit un nombre pair. Posons

$$p+q = m+2l,$$

l étant entier et positif; pour une valeur donnée de l, p pourra prendre les valeurs $0, 1, 2,\ldots, m+2l$, q recevant les valeurs correspondantes $m+2l$, $m+2l-1$, $m+2l-2,\ldots, 0$. Parmi les parties de la somme précédente qui pourront nous fournir des termes en s^m, se trouvera donc celle-ci

$$\frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^{m+2l-p}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l}}{1.2\ldots(m+2l-p)}\cdot\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s-\frac{1}{s}\right)^{m+2l-p}.$$

Pour avoir le coefficient de s^m dans cette partie, il suffira de développer $\left(s+\frac{1}{s}\right)^p$ et $\left(s-\frac{1}{s}\right)^{m+2l-p}$ par la formule du binôme; on trouvera ainsi pour ce coefficient

$$\frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^{m+2l-p}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l}}{1.2\ldots(m+2l-p)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} \dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+1)}{1.2\ldots l} - \dfrac{m+2l-p}{1}\cdot\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+2)}{1.2\ldots(l-1)} + \ldots \\ + (-1)^h \dfrac{(m+2l-p)(m+2l-p-1)\ldots(m+2l-p-h+1)}{1.2\ldots h}\cdot\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+h+1)}{1.2\ldots(l-h)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Il faudra ensuite ajouter toutes les valeurs que prend cette expression pour $p = 0, 1, 2, \ldots, m + 2l$, valeurs dans lesquelles $\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l}$ sera facteur commun. Enfin pour avoir P_m, on devra ajouter toutes les valeurs que prend la somme ainsi obtenue quand on y met pour l tous les nombres entiers de zéro à l'infini. Il viendra ainsi

$$P_m = \sum_{l=0}^{l=\infty} \left(\frac{c}{2}\right)^{m+2l} \sum_{p=0}^{p=m+2l} \frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p} \cdot \frac{m^{m+2l-p}}{1.2\ldots(m+2l-p)}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+1)}{1.2\ldots l} - \dfrac{m+2l-p}{1} \cdot \dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+2)}{1.2\ldots(l-1)} + \ldots \\ + (-1)^h \dfrac{(m+2l-p)(m+2l-p-1)\ldots(m+2l-p-h+1)}{1.2\ldots h} \cdot \dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+h+1)}{1.2\ldots(l-h)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Cette formule donne P_m sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de e. Si l'on y fait en particulier $m = 0$, on trouvera

$$P_0 = \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(n-1)n\ldots(n+2l-2)}{(1.2\ldots l)^2} \left(\frac{e}{2}\right)^{2l}.$$

L'équation

$$\frac{a^n}{r^n} = P_0 + P_1(z + z^{-1}) + P_2(z + z^{-2}) + \ldots$$

peut s'écrire encore

$$\frac{a^n}{r^n} = P_0 + 2P_1 \cos\zeta + 2P_2 \cos 2\zeta + \ldots.$$

Désignons par $\mathfrak{P}_m$ ce que devient P_m, quand on donne à n la valeur particulière $n = 2$; nous aurons

$$\frac{a^2}{r^2} = \mathfrak{P}_0 + 2\mathfrak{P}_1 \cos\zeta + 2\mathfrak{P}_2 \cos 2\zeta + \ldots..$$

La valeur de $\mathfrak{P}_m$ se déduira de celle de P_m en y remplaçant le facteur $\frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}$ par l'unité, et l'on aura en particulier

$$\mathfrak{P}_0 = \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{1.3\ldots(2l-1)}{2.4\ldots(2l)} e^{2l} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Mais en désignant par V l'anomalie vraie, on a l'équation connue

$$r^2\,dV = a^2\sqrt{1-e^2}\,d\zeta,$$

d'où

$$dV = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\,d\zeta;$$

remplaçons $\frac{a^2}{r^2}$ par son développement, et il viendra

$$dV = \left[1 + 2\sqrt{1-e^2}\,(\mathfrak{P}_1\cos\zeta + \mathfrak{P}_2\cos 2\zeta + \ldots)\right]d\zeta,$$

d'où, en intégrant,

$$V = \zeta + 2\sqrt{1-e^2}\left(\mathfrak{P}_1\sin\zeta + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_2\sin 2\zeta + \frac{1}{3}\mathfrak{P}_3\sin 3\zeta + \ldots\right).$$

Si donc on pose

$$C_m = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{m}\mathfrak{P}_m,$$

on aura, pour l'équation du centre $V-\zeta$, l'expression

$$V - \zeta = C_1\sin\zeta + C_2\sin 2\zeta + C_3\sin 3\zeta + \ldots,$$

où le coefficient du terme général sera donné par la formule [*]

$$C_m = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{m}\sum_{l=0}^{l=\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l}\sum_{p=0}^{p=m+2l}\frac{m^{m+2l-p}}{1.2\ldots(m+2l-p)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}
\quad\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+1)}{1.2\ldots l}\\[2mm]
\quad-\dfrac{m+2l-p}{1}\cdot\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+2)}{1.2\ldots(l-1)}+\ldots\\[2mm]
+(-1)^h\dfrac{(m+2l-p)(m+2l-p-1)\ldots(m+2l-p-h+1)}{1.2\ldots h}\cdot\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+h+1)}{1.2\ldots(l-h)}\\[2mm]
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}.$$

---

[*] Cette expression de l'équation du centre ne diffère de celle que M. Bourget a donnée, il y a plusieurs années (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVIII, p. 807), qu'en ce que le radical $\sqrt{1-e^2}$ n'y est pas développé suivant les puissances de e. Je n'ai eu connaissance du travail de M. Bourget qu'après avoir écrit ce qui précède.

DEUXIÈME PARTIE.

Le développement de la fonction perturbatrice en série a été l'objet des travaux d'un grand nombre de géomètres. M. Cauchy, qui s'en est occupé à diverses reprises, a fait connaître plusieurs méthodes par lesquelles on peut former le coefficient du terme correspondant à un argument donné, et l'une de ces méthodes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 84) est fondée sur le théorème énoncé à la page 77 du présent Mémoire. Toutefois l'illustre géomètre n'a pas donné, sous forme explicite, le coefficient du terme général. Je me propose, dans ce qui va suivre, de montrer qu'on peut en obtenir aisément l'expression : les formules auxquelles nous allons parvenir ne contiendront d'ailleurs aucune transcendante particulière et permettront d'apprécier immédiatement soit le degré de grandeur de chaque partie du coefficient, soit la manière dont elle dépend des éléments elliptiques des deux planètes.

Les lettres a, e, ψ, ζ, z, z_1, z_2, s, r, ξ, η, X, Y, Z ayant toujours la même signification que ci-dessus, désignons par a', e', ψ', ζ', z', z'_1, z'_2, s', r', ξ', η', X', Y', Z' ce que deviennent ces quantités pour une seconde planète : nommons $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ les masses de ces deux astres, Δ leur distance mutuelle, f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. La fonction perturbatrice qu'il y a lieu de considérer, quand on veut déterminer les perturbations produites dans le mouvement de $\mathfrak{M}$ par l'attraction de $\mathfrak{M}'$, est la suivante :

$$R = f\mathfrak{M}'\left(\frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3} - \frac{1}{\Delta}\right).$$

On a besoin, pour le calcul des perturbations, d'exprimer cette fonction par une somme de sinus et de cosinus d'arcs de la forme $m\zeta + m'\zeta'$, m et m' étant des entiers positifs ou négatifs. En vertu de la formule

$$z^m z'^{m'} = \cos(m\zeta + m'\zeta') + i\sin(m\zeta + m'\zeta'),$$

cela revient à développer R suivant les puissances entières, positives et négatives de z et de z'.

Nous savons déjà que la partie $f\mathfrak{M}'\dfrac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$ est développable sous cette forme à la condition que le module de z soit renfermé entre les limites z_1, z_2, et celui de z' entre les limites z'_1, z'_2, ce qui comprend le cas où ces modules seraient l'un et l'autre égaux à l'unité. D'un autre côté, lorsqu'on suppose les modules de z et de z' égaux à 1, la quantité

$$\Delta^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2$$

devient une quantité réelle et positive exprimant le carré de la distance de deux points réels pris sur les deux orbites. Si donc on fait mouvoir les points Z et Z′ correspondants à z et à z' sur le cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre, Δ^2 restera toujours positive et ne s'annulera pas, les deux orbites étant supposées n'avoir aucun point commun; la quantité Δ, considérée comme une fonction continue de z et de z', reste donc réelle, ne change pas de signe, et par conséquent reprend toujours la même valeur, lorsque les points Z et Z′ ont accompli des révolutions en nombre quelconque sur le cercle qu'ils décrivent. De là il suit que $-\dfrac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$ est développable suivant les puissances de z et de z', lorsque les modules de ces variables sont compris l'un et l'autre entre des limites suffisamment voisines de l'unité, et qui pour chaque module sont l'une inférieure et l'autre supérieure à 1 [*]; la seule condition nécessaire pour que ce développement existe est que les deux orbites ne se coupent pas.

La fonction perturbatrice R étant développable suivant les puissances entières de z et de z', lorsque les modules de ces variables sont

---

[*] On peut assigner aisément des limites précises de ces modules dans le cas particulier où l'on suppose les deux excentricités nulles ainsi que l'inclinaison mutuelle des orbites. Soit alors $\dfrac{a}{a'} = \alpha$; soit de plus β un nombre compris entre α et 1. Si l'on assujettit le module de z à rester compris entre les limites β et $\dfrac{1}{\beta}$, celui de z' devra rester compris entre $\dfrac{\alpha}{\beta}$ et $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

suffisamment voisins de 1, nous nous proposerons d'en effectuer le développement, en supposant les deux modules égaux précisément à l'unité; ce qui est le cas de la Mécanique céleste. Nous admettrons d'abord que l'on a $a < a'$, ou que la planète perturbatrice $\mathfrak{M}'$ est la plus éloignée du Soleil; nous verrons ensuite comment les formules doivent être modifiées lorsque le contraire a lieu.

Conformément aux principes établis dans la première Partie, nous commencerons par exprimer R en fonction des variables auxiliaires s et s'.

Nous avons

$$\Delta^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2 = r^2 + r'^2 - 2(XX' + YY' + ZZ');$$

remplaçons X, Y, Z, X', Y', Z' par leurs valeurs

$$X = A\,\xi + A_1\eta, \quad Y = B\,\xi + B_1\eta, \quad Z = C\,\xi + C_1\eta,$$
$$X' = A'\xi' + A'_1\eta', \quad Y' = B'\xi' + B'_1\eta', \quad Z' = C'\xi' + C'_1\eta',$$

et ayons égard aux relations

$$A\,A' + B\,B' + C\,C' = \cos(\xi, \xi'), \qquad A_1 A'_1 + B_1 B'_1 + C_1 C'_1 = \cos(\eta, \eta'),$$
$$A' A_1 + B' B_1 + C' C_1 = \cos(\xi', \eta), \qquad A\,A'_1 + B\,B'_1 + C\,C'_1 = \cos(\xi, \eta');$$

nous trouverons

$$XX' + YY' + ZZ' = \xi\xi' \cos(\xi, \xi') + \eta\eta' \cos(\eta, \eta') + \xi'\eta \cos(\xi', \eta) + \xi\eta' \cos(\xi, \eta').$$

Représentons par I l'inclinaison mutuelle des deux orbites, et par τ, τ' les angles que les directions $O\xi$, $O\xi'$ des périhélies font avec l'intersection des plans des orbites, nous aurons, par la trigonométrie sphérique,

$$\begin{aligned}
\cos(\xi, \xi') &= \quad \cos\tau \cos\tau' + \sin\tau \sin\tau' \cos I,\\
\cos(\eta, \eta') &= \quad \sin\tau \sin\tau' + \cos\tau \cos\tau' \cos I,\\
\cos(\xi', \eta) &= - \sin\tau \cos\tau' + \cos\tau \sin\tau' \cos I,\\
\cos(\xi, \eta') &= - \cos\tau \sin\tau' + \sin\tau \cos\tau' \cos I.
\end{aligned}$$

Faisons

$$\tau - \tau' = \sigma;$$

ces formules pourront s'écrire

$$\begin{aligned}
\cos(\xi, \xi') &= \quad \cos\sigma - 2\sin^2\frac{I}{2}\sin\tau\sin\tau',\\
\cos(\eta, \eta') &= \quad \cos\sigma - 2\sin^2\frac{I}{2}\cos\tau\cos\tau',\\
\cos(\xi', \eta) &= -\sin\sigma - 2\sin^2\frac{I}{2}\cos\tau\sin\tau',\\
\cos(\xi, \eta') &= \quad \sin\sigma - 2\sin^2\frac{I}{2}\sin\tau\cos\tau'.
\end{aligned}$$

Il en résultera

$$\begin{aligned}
XX' + YY' + ZZ' = (\xi\xi' + \eta\eta')\cos\sigma - (\xi'\eta - \xi\eta')\sin\sigma\\
- 2\sin^2\frac{I}{2}\cdot(\xi\sin\tau + \eta\cos\tau)(\xi'\sin\tau' + \eta'\cos\tau').
\end{aligned}$$

Mais on a, V et V' désignant les anomalies vraies,

$$\xi = r\cos V, \quad \eta = r\sin V, \quad \xi' = r'\cos V', \quad \eta' = r'\sin V';$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}
XX' + YY' + ZZ' = rr'\cos(V - V' + \sigma)\\
- 2\sin^2\frac{I}{2}\cdot r\sin(V + \tau).r'\sin(V' + \tau'),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\Delta^2 = P + Q,$$

en faisant

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
P &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(V - V' + \sigma),\\
Q &= 4\sin^2\frac{I}{2}\cdot r\sin(V + \tau).r'\sin(V' + \tau').
\end{aligned}\right.$$

La quantité P est le carré de la distance de deux points pris sur les deux orbites, en supposant que le plan de l'une ait été rabattu sur le plan de l'autre par une rotation autour de l'intersection mutuelle. Nous admettrons que même après ce rabattement les deux orbites n'ont aucun point commun; et nous appellerons δ ce que devient alors leur plus courte distance. Par exemple, si les deux orbites étaient circulaires, δ serait la différence de leurs rayons. Dans tous les cas, P ne pourra devenir inférieur à δ^2.

Dans la quantité Q, le facteur $r\sin(\mathrm{V}+\tau)$ exprime la distance d'un point de l'orbite de $\mathfrak{M}$ à l'intersection mutuelle, distance qui a pour maximum

$$a\left(\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}+e\sqrt{1-\cos^2\tau}\right):$$

pareillement le maximum du facteur $r'\sin(\mathrm{V}'+\tau')$ est

$$a'\left(\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}+e'\sqrt{1-\cos^2\tau'}\right),$$

et par suite le maximum de Q est

$$4aa'\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}$$
$$\times\left(\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}+e\sqrt{1-\cos^2\tau}\right)\left(\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}+e'\sqrt{1-\cos^2\tau'}\right).$$

La quantité $\frac{1}{\Delta}=(\mathrm{P}+\mathrm{Q})^{-\frac{1}{2}}$ sera donc développable en série suivant les puissances croissantes de Q ou, si l'on veut, de $\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}$, quand on aura

$$4aa'\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}$$
$$\times\left(\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}+e\sqrt{1-\cos^2\tau}\right)\left(\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}+e'\sqrt{1-\cos^2\tau}\right)<\delta^2.$$

Nous supposerons l'inclinaison mutuelle I assez petite pour que cette inégalité soit vérifiée [*]. Alors on aura

$$\frac{1}{\Delta}=\mathrm{P}^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\mathrm{P}^{-\frac{3}{2}}\mathrm{Q}+\frac{1.3}{2.4}\mathrm{P}^{-\frac{5}{2}}\mathrm{Q}^2-\ldots,$$

---

[*] Dans le cas de deux orbites circulaires, $\sin\frac{\mathrm{I}}{2}$ devrait être moindre que $\frac{a'-a}{2\sqrt{aa'}}$.

ou bien

$$\frac{1}{\Delta}=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{1.3.\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}}\mathrm{Q}^k.$$

Introduisons à présent les variables s et s' : la première des équations (4) nous donnera d'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{P}&=\left[r'-r\mathrm{E}^{i(\mathrm{V}-\mathrm{V}'+\sigma)}\right]\left[r'-r\mathrm{E}^{-i(\mathrm{V}-\mathrm{V}'+\sigma)}\right]\\&=r'^2\left(1-\frac{r\mathrm{E}^{i\mathrm{V}}}{r'\mathrm{E}^{i\mathrm{V}'}}\mathrm{E}^{i\sigma}\right)\left(1-\frac{r\mathrm{E}^{-i\mathrm{V}}}{r'\mathrm{E}^{-i\mathrm{V}'}}\mathrm{E}^{-i\sigma}\right).\end{aligned}$$

Faisons, pour abréger l'écriture,

$$\tang\frac{\psi}{2}=\omega,\qquad \tang\frac{\psi'}{2}=\omega',$$

$$\cos^2\frac{\psi}{2}=\varepsilon,\qquad \cos^2\frac{\psi'}{2}=\varepsilon',\qquad \frac{a}{a'}=\alpha$$

de sorte que ω, ω' seront généralement de petites fractions et ε, ε' des nombres voisins de 1 : on aura d'ailleurs $\alpha<1$, d'après l'hypothèse déjà faite que des deux planètes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ la seconde est la plus éloignée du Soleil. Il viendra

$$\begin{aligned}r\mathrm{E}^{i\mathrm{V}}=\xi+i\eta&=\frac{a}{2}\left[s+\frac{1}{s}-2e+\sqrt{1-e^2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right]\\&=as\cos^2\frac{\psi}{2}\left(1-\frac{1}{s}\tang\frac{\psi}{2}\right)^2=a\varepsilon s\left(1-\frac{\omega}{s}\right)^2,\end{aligned}$$

et de même

$$r'\mathrm{E}^{i\mathrm{V}'}=a'\varepsilon's'\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^2;$$

il suit de là

$$\frac{r\mathrm{E}^{i\mathrm{V}}}{r'\mathrm{E}^{i\mathrm{V}'}}=\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s}{s'}\left(\frac{1-\frac{\omega}{s}}{1-\frac{\omega'}{s'}}\right)^2.$$

On trouvera pareillement

$$r\mathrm{E}^{-i\mathrm{V}} = \frac{a\varepsilon}{s}(1 - \omega s)^2,$$

$$r'\mathrm{E}^{-i\mathrm{V}'} = \frac{a'\varepsilon'}{s'}(1 - \omega' s')^2,$$

$$\frac{r\mathrm{E}^{-i\mathrm{V}}}{r'\mathrm{E}^{-i\mathrm{V}'}} = \alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s'}{s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2,$$

et aussi

$$r'^2 = r'\mathrm{E}^{i\mathrm{V}'}.r'\mathrm{E}^{-i\mathrm{V}'} = a'^2\varepsilon'^2\left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^2(1 - \omega' s')^2.$$

Il en résulte

$$\mathrm{P} = a'^2\varepsilon'^2\left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^2(1 - \omega' s')^2\left[1 - \alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s}{s'}\left(\frac{1-\frac{\omega}{s}}{1-\frac{\omega'}{s'}}\right)^2\mathrm{E}^{i\sigma}\right]$$

$$\times\left[1 - \alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s'}{s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2\mathrm{E}^{-i\sigma}\right],$$

$$\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}} = a'^{-(2k+1)}\varepsilon'^{-(2k+1)}\left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-(2k+1)}(1 - \omega' s')^{-(2k+1)}\left[1 - \alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s}{s'}\left(\frac{1-\frac{\omega}{s}}{1-\frac{\omega'}{s'}}\right)^2\mathrm{E}^{i\sigma}\right]^{-\frac{2\ +1}{2}}$$

$$\times\left[1 - \alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s'}{s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2\mathrm{E}^{-i\sigma}\right]^{-\frac{2k+1}{2}}.$$

Les modules de s et de s' étant égaux à l'unité, ceux des deux quantités

$$\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s}{s'}\left(\frac{1-\frac{\omega}{s}}{1-\frac{\omega'}{s'}}\right)^2\mathrm{E}^{i\sigma}, \quad \alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s'}{s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2\mathrm{E}^{-i\sigma}$$

sont l'un et l'autre inférieurs à la limite

$$\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\left(\frac{1+\omega}{1-\omega'}\right)^2 = \frac{a}{a'}\cdot\frac{1+e}{1-e'}.$$

Si donc on a

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{1+e}{1-e'} < 1,$$

et il en sera ordinairement ainsi, puisqu'on a déjà supposé $a < a'$, on pourra développer les facteurs

$$\left[1 - \alpha \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \frac{s}{s'} \left(\frac{1 - \frac{\omega}{s}}{1 - \frac{\omega'}{s'}}\right)^2 E^{i\sigma}\right]^{-\frac{2k+1}{2}}, \quad \left[1 - \alpha \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \frac{s'}{s} \left(\frac{1 - \omega s}{1 - \omega' s'}\right)^2 E^{-i\sigma}\right]^{-\frac{2k+1}{2}}$$

suivant les puissances de α. On trouvera de cette manière

$$(5) \quad \frac{1}{\Delta} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^k \cdot \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)} \\ \times \frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)} \\ \times a'^{-(2k+1)} \varepsilon^{p+q} \varepsilon'^{-(2k+p+q+1)} \alpha^{p+q} s^{p-q} s'^{-p+q} \\ \times \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^{2p} (1 - \omega s)^{2q} \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-(2k+2p+1)} \\ \times (1 - \omega' s')^{-(2k+2q+1)} E^{i(p-q)\sigma} \cdot Q^k \end{array} \right\}.$$

Avant d'aller plus loin, observons que si dans le second membre de l'équation précédente on se borne à attribuer aux entiers k, p, q les trois systèmes de valeurs

$$(6) \qquad k = 0, \quad p = 1, \quad q = 0,$$

$$(7) \qquad k = 0, \quad p = 0, \quad q = 1,$$

$$(8) \qquad k = 1, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

la somme des trois parties de $\frac{1}{\Delta}$ qu'on obtient ainsi est précisément égale à $\frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3}$.

En effet, la valeur trouvée plus haut de $XX' + YY' + ZZ'$ peut s'écrire

$$XX' + YY' + ZZ' = \frac{1}{2} r E^{iV} \cdot r' E^{-iV'} \cdot E^{i\sigma} + \frac{1}{2} r E^{-iV} \cdot r' E^{iV'} \cdot E^{-i\sigma} - \frac{1}{2} Q:$$

mais on a

$$r'^3 = a'^3 \varepsilon'^3 \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^3 (1 - \omega' s')^3.$$

Divisons ces deux équations membre à membre, après avoir remplacé dans la première rE^{iV}, rE^{-iV}, $r'E^{iV'}$, $r'E^{-iV'}$ par leurs valeurs données ci-dessus : il viendra

$$\frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} a'^{-1} \varepsilon\varepsilon'^{-2} \alpha s s'^{-1} \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-3} (1 - \omega' s')^{-1} E^{i\sigma} \\ + \frac{1}{2} a'^{-1} \varepsilon\varepsilon'^{-2} \alpha s^{-1} s' (1 - \omega s)^2 \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-1} (1 - \omega' s')^{-3} E^{-i\sigma} \\ - \frac{1}{2} a'^{-3} \varepsilon'^{-3} \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-3} (1 - \omega' s')^{-3} Q \end{array} \right\}.$$

Or les trois parties dont ce second membre se compose sont précisément les trois valeurs que prend le terme général de $\frac{1}{\Delta}$, quand on y met successivement pour k, p, q les trois systèmes de valeurs (6), (7) et (8).

Si donc nous convenons d'exclure de la somme triple $\sum\limits_{k=0}^{k=\infty} \sum\limits_{p=0}^{p=\infty} \sum\limits_{q=0}^{q=\infty}$ les parties correspondantes à ces trois systèmes de valeurs de k, p, q, nous pourrons regarder le second membre de la formule (5) comme exprimant la valeur, non plus de $\frac{1}{\Delta}$, mais de la différence

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3} = \frac{R}{-f\mathfrak{M}'}.$$

Nous avons encore à exprimer la quantité Q en fonction de s et de s'. On a d'abord

$$r \sin(V + \tau) = \xi \sin\tau + \eta \cos\tau = \frac{a}{2}\left[\left(s + \frac{1}{s} - 2e\right)\sin\tau - i\sqrt{1 - e^2}\cos\tau\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[(\sin\tau - i\sqrt{1 - e^2}\cos\tau) s - 2e\sin\tau + (\sin\tau + i\sqrt{1 - e^2}\cos\tau)\frac{1}{s}\right];$$

mais on peut toujours déterminer un angle φ qui satisfasse aux deux équations

$$\sin\varphi = \frac{\sin\tau}{\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos\tau}{\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}},$$

desquelles on déduit

$$\sin\tau - i\sqrt{1-e^2}\cos\tau = -i\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\,\mathrm{E}^{i\varphi},$$

$$\sin\tau + i\sqrt{1-e^2}\cos\tau = i\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\,\mathrm{E}^{-i\varphi},$$

$$2\sin\tau = i\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\,(\mathrm{E}^{-i\varphi}-\mathrm{E}^{i\varphi});$$

il en résulte

$$r\sin(\mathrm{V}+\tau) = \frac{1}{2}ia\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\left[\frac{1}{s}(1-es)\mathrm{E}^{-i\varphi} - s\left(1-\frac{e}{s}\right)\mathrm{E}^{i\varphi}\right].$$

On aura de même

$$r'\sin(\mathrm{V}'+\tau') = \frac{1}{2}ia'\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}\left[\frac{1}{s'}(1-e's')\mathrm{E}^{-i\varphi'} - s'\left(1-\frac{e'}{s'}\right)\mathrm{E}^{i\varphi'}\right],$$

l'angle φ' étant défini par les deux équations

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\tau'}{\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}}, \qquad \cos\varphi' = \frac{\sqrt{1-e'^2}\cos\tau'}{\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}}.$$

Si donc on pose, pour abréger,

$$\sin^2\frac{1}{2}\sqrt{(1-e^2\cos^2\tau)(1-e'^2\cos^2\tau')} = c,$$

on trouvera

$$\mathrm{Q} = -aa'c\left[\frac{1}{s}(1-es)\mathrm{E}^{-i\varphi} - s\left(1-\frac{e}{s}\right)\mathrm{E}^{i\varphi}\right]$$
$$\times\left[\frac{1}{s'}(1-e's')\mathrm{E}^{-i\varphi'} - s'\left(1-\frac{e'}{s'}\right)\mathrm{E}^{i\varphi'}\right].$$

Élevons les deux membres à la puissance k, nous aurons

$$Q^k = a^k a'^k c^k \sum_{n=0}^{n=k} \sum_{n'=0}^{n'=k} (-1)^{k+n+n'}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \cdot \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} \cdot s^{2n-k} s'^{2n'-k} \\ \times \left(1-\dfrac{e}{s}\right)^n (1-es)^{k-n} \left(1-\dfrac{e'}{s'}\right)^{n'} (1-e's')^{k-n'} E^{i[(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']} \end{array} \right\},$$

et si nous substituons cette valeur dans l'expression déjà obtenue de $\dfrac{R}{-f\mathfrak{M}'}$, il nous viendra

$$(9) \qquad R = -\frac{f\mathfrak{M}'}{a} \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{n=0}^{n=k} \sum_{n'=0}^{n'=k} (-1)^{n+n'}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)} \\ \times \dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)} \cdot \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \\ \times \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} \varepsilon^{p+q} \varepsilon'^{-(2k+p+q+1)} \alpha^{k+p+q+1} c^k s^{p-q+2n-k} s'^{-p+q+2n'-k} \\ \times \left(1-\dfrac{\omega}{s}\right)^{2p} (1-\omega s)^{2q} \left(1-\dfrac{\omega'}{s'}\right)^{-(2k+2p+1)} (1-\omega' s')^{-(2k+2q+1)} \\ \times \left(1-\dfrac{e}{s}\right)^n (1-es)^{k-n} \left(1-\dfrac{e'}{s'}\right)^{n'} (1-e's')^{k-n'} E^{i[(p-q)\tau+(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']} \end{array} \right\},$$

où l'on doit se souvenir de supprimer dans le second membre les parties correspondantes aux systèmes de valeurs (6), (7) et (8) des entiers k, p, q.

Pour passer maintenant cette expression de R en s et s' au développement de la même fonction suivant les puissances de z et de z', il suffit d'observer que, d'après les principes établis dans la première Partie, le coefficient $A_{m,m'}$ de $z^m z'^{m'}$ dans ce développement est égal au coefficient de $s^m s'^{m'}$ dans le produit de l'expression précédente de R par la quantité

$$
\begin{aligned}
\Pi &= \mathrm{E}^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]\cdot \mathrm{E}^{\frac{m'e'}{2}\left(s'-\frac{1}{s'}\right)}\left[1-\frac{e'}{2}\left(s'+\frac{1}{s'}\right)\right] \\
&= \left(1-\frac{\omega}{s}\right)(1-\omega s)\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)(1-\omega' s')\sum_{g=0}^{g=\infty}\sum_{g'=0}^{g'=\infty}\frac{m^g}{1.2\ldots g}\cdot\frac{m'^{g'}}{1.2\ldots g'} \\
&\quad\times \varepsilon^{g+1}\,\varepsilon'^{g'+1}\,\omega^g\,\omega'^{g'}\left(s-\frac{1}{s}\right)^g\left(s'-\frac{1}{s'}\right)^{g'}.
\end{aligned}
$$

Il ne reste plus qu'à développer les puissances de binômes qui figurent dans le produit $\Pi\mathrm{R}$, et l'on arrive ainsi à la proposition suivante :

Si l'on pose

$$
(10)\quad \mathrm{C} = -\frac{f\mathfrak{M}'}{a}\times\left\{
\begin{aligned}
&(-1)^{n+n'+\lambda+\mu+\iota+\vartheta+\iota'+\vartheta'+\nu+\nu'}\,\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \\
&\times\frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\cdot\frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)} \\
&\times\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} \\
&\times\frac{(2p+1)(2p)\ldots(2p-\lambda+2)}{1.2\ldots\lambda}\cdot\frac{(2q+1)(2q)\ldots(2q-\mu+2)}{1.2\ldots\mu} \\
&\times\frac{(2k+2p)(2k+2p+1)\ldots(2k+2p+\lambda'-1)}{1.2\ldots\lambda'} \\
&\times\frac{(2k+2q)(2k+2q+1)\ldots(2k+2q+\mu'-1)}{1.2\ldots\mu'} \\
&\times\frac{n(n-1)\ldots(n-\iota+1)}{1.2\ldots\iota}\cdot\frac{(k-n)(k-n-1)\ldots(k-n-\vartheta+1)}{1.2\ldots\vartheta} \\
&\times\frac{n'(n'-1)\ldots(n'-\iota'+1)}{1.2\ldots\iota'}\cdot\frac{(k-n')(k-n'-1)\ldots(k-n'-\vartheta'+1)}{1.2\ldots\vartheta'} \\
&\times\frac{m^g}{1.2\ldots\nu\times 1.2\ldots(g-\nu)}\cdot\frac{m'^{g'}}{1.2\ldots\nu'\times 1.2\ldots(g'-\nu')} \\
&\times 2^{\iota+\vartheta+\iota'+\vartheta'}\,\varepsilon^{p+q+\iota+\vartheta+g+1}\,\varepsilon'^{-(2k+p+q-\iota'-\vartheta'-g')}\,\alpha^{k+p+q+1} \\
&\times c^k\,\omega^{\lambda+\mu+\iota+\vartheta+g}\,\omega'^{\lambda'+\mu'+\iota'+\vartheta'+g'}
\end{aligned}
\right\},
$$

$$
(11)\quad z = (p-q)\sigma + (2n-k)\varphi + (2n'-k)\varphi',
$$

le coefficient $\mathrm{A}_{m,m'}$ *de* $z^m z'^{m'}$ *dans la valeur de* R *est égal à la somme* *des valeurs que prend le produit* $\mathrm{CE}^{i\varkappa}$, *quand on attribue aux entiers*

$$k,\ p,\ q,\ n,\ n',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \iota,\ ȣ,\ \iota',\ ȣ',\ g,\ g',\ \nu,\ \nu'$$

toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier les deux équations

$$(12)\qquad \begin{cases} 2n - k + p - q - \lambda + \mu - \iota + ȣ + g - 2\nu = m, \\ 2n' - k - p + q - \lambda' + \mu' - \iota' + ȣ' + g' - 2\nu' = m', \end{cases}$$

et les inégalités

$$(13)\qquad \begin{cases} n < k,\quad n' < k,\quad \lambda < 2p+1,\quad \mu < 2q+1,\quad \iota < n,\quad ȣ < k-n, \\ \qquad \iota' < n',\quad ȣ' < k-n',\quad \nu < g,\quad \nu' < g' \quad [^*], \end{cases}$$

en excluant toutefois les combinaisons dans lesquelles on aurait, soit $k = 0$, $p = 1$, $q = 0$; *soit* $k = 0$, $p = 0$, $q = 1$; *soit encore* $k = 1$, $p = 0$, $q = 0$ [**].

Ce théorème donne directement l'expression analytique du coefficient d'un terme quelconque de la fonction perturbatrice, dans le cas, auquel nous nous sommes borné jusqu'à présent, d'une planète perturbatrice plus éloignée du Soleil que la planète troublée. Nous allons y ajouter quelques remarques propres à en faciliter l'application.

Supposons qu'ayant d'abord attribué aux entiers k, p, q, ..., de certaines valeurs, on remplace ensuite respectivement

$$p,\ q,\ n,\ n',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \iota,\ ȣ,\ \iota',\ ȣ',\ \nu,\ \nu'$$

par les valeurs

$$q,\ p,\ k-n,\ k-n',\ \mu,\ \lambda,\ \mu',\ \lambda',\ ȣ,\ \iota,\ ȣ',\ \iota',\ g-\nu,\ g'-\nu',$$

en laissant d'ailleurs à k, g et g' leurs valeurs primitives. Le coefficient

---

[*] Le signe $<$ n'exclut pas l'égalité.

[**] J'ai donné dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. L, p. 155, d'autres formules qu'on obtient par la décomposition de la quantité Q en facteurs du premier degré; mais elles sont moins commodes dans l'application. Je ferai observer à cette occasion qu'à la page citée des *Comptes rendus*, le signe — a été omis par erreur devant la valeur de C.

C ne changera pas; mais l'angle $\varkappa$ et les premiers membres des équations (12) changeront de signes sans changer de valeurs numériques. Il suit de là qu'au terme

$$\mathrm{CE}^{i\varkappa} z^m z'^{m'} = \mathrm{CE}^{i(m\zeta + m'\zeta' + \varkappa)}$$

de R, correspond toujours cet autre [*]

$$\mathrm{CE}^{-i\varkappa} z^{-m} z'^{-m'} = \mathrm{CE}^{-i(m\zeta + m'\zeta' + \varkappa)}.$$

La somme de ces deux termes se réduit à la quantité réelle

$$2\,\mathrm{C}\cos(m\zeta + m'\zeta' + \varkappa);$$

ainsi à l'aide des valeurs données ci-dessus de C et de $\varkappa$, on obtient immédiatement l'expression de la fonction perturbatrice sous la forme d'une somme de termes proportionnels à des cosinus d'arcs tels que $m\zeta + m'\zeta' + \varkappa$, c'est-à-dire sous la forme la mieux appropriée au calcul des perturbations.

On regarde ordinairement les excentricités et l'inclinaison mutuelle des orbites comme de petites quantités du premier ordre; alors ω et ω' sont aussi du premier ordre, et c est du second. L'ordre N du coefficient C est donc donné par la formule

$$\mathrm{N} = 2k + \lambda + \mu + \lambda' + \mu' + \iota + \upsilon + \iota' + \upsilon' + g + g'.$$

On conclut de là et des équations (12)

$$(14)\left\{\begin{aligned} &\mathrm{N} + (m + m') = 2[n + n' + \mu + \mu' + \upsilon + \upsilon' + (g - \nu) + (g' - \nu')],\\ &\mathrm{N} - (m + m') = 2[(k - n) + (k - n') + \lambda + \lambda' + \iota + \iota' + \nu + \nu'];\end{aligned}\right.$$

---

[*] Cette conclusion ne serait en défaut que si l'on avait à la fois

$$p = q,\quad n = n' = \frac{k}{2},\quad \lambda = \mu,\quad \lambda' = \mu',\quad \iota = \upsilon,\quad \iota' = \upsilon',\quad \nu = \frac{g}{2},\quad \nu' = \frac{g'}{2}:$$

dans ce cas les nouvelles valeurs de k, p, q, etc., ne différeraient pas des premières, et au lieu de deux termes correspondants on n'en aurait qu'un seul. On aurait alors $m = 0$, $m' = 0$, $\varkappa = 0$, et le terme unique de R, répondant à ces valeurs de k, p, q, etc., se réduirait à la constante réelle C.

d'ailleurs, en vertu des inégalités (13), les différences $k-n$, $k-n'$, $g-\nu$, $g'-\nu'$ sont positives. On voit donc que si l'on désigne par h la valeur numérique de la somme $m+m'$, l'ordre N du coefficient C ne peut être inférieur à h, et que la différence $\mathrm{N}-h$ est nécessairement un nombre pair.

Pour appliquer les formules (10) et (11) au calcul de la partie de la fonction perturbatrice qui répond à un argument donné $m\zeta+m'\zeta'$, il faudra d'abord former le tableau des systèmes de valeurs de k, p, q,..., qui, pour les valeurs données de m et de m', satisfont aux conditions (12) et (13). Le nombre de ces systèmes est illimité; mais comme l'ordre N augmente indéfiniment avec chacun des nombres k, λ, μ, λ', μ', ι, $\varkappa$, ι', $\varkappa'$, g, g', et que de plus l'exposant de α dans C croît lui-même indéfiniment avec chacun des nombres p et q, on voit que si l'on a fixé d'avance le degré de petitesse des termes qu'on regarde comme négligeables, on trouvera aisément des limites que les nombres k, p, q, λ, μ, λ', μ', ι, $\varkappa$, ι', $\varkappa'$, g, g' ne devront pas dépasser, et alors les autres entiers n, n', ν, ν', en vertu des inégalités (13), se trouveront eux-mêmes limités. Je pourrai, dans une autre occasion, à propos d'une application particulière, expliquer avec plus de détails la marche pratique qu'il convient de suivre pour former rapidement le tableau dont il s'agit.

Une fois ce tableau obtenu, le calcul numérique de C et de $\varkappa$ se fera très-aisément, surtout si l'on a construit à l'avance des tables donnant les multiples successifs des logarithmes de α, c, ω, ω', ε, ε', et aussi des tables contenant les logarithmes des quotients de factorielles et des expressions $\dfrac{m^g}{1.2\ldots\nu\times1.2\ldots(g-\nu)}$, $\dfrac{m'^{g'}}{1.2\ldots\nu'\times1.2\ldots(g'-\nu')}$, qui peuvent figurer dans C.

Ainsi qu'on l'a déjà dit, les termes qui répondent à des valeurs données de m et de m' sont d'un ordre au moins égal à la valeur numérique h de la somme $m+m'$, et si l'on se borne à ceux qui sont précisément de l'ordre h, les quantités négligées seront au moins de l'ordre $h+2$. Lorsqu'on pourra se contenter de cette approximation, et il en sera souvent ainsi, les formules précédentes se simplifieront beaucoup. En effet supposons, pour fixer les idées, la somme $m+m'$ positive; l'ordre N des termes conservés devant être égal à $m+m'$, il suit de la seconde des équations (14), qu'on a

$$n = n' = k, \quad \lambda = \lambda' = \iota = \iota' = \nu = \nu' = 0,$$

et aussi, en vertu des inégalités (13),

$$\vartheta = \vartheta' = 0.$$

On arrive donc à la conclusion suivante : *Si l'on pose*

$$C = -\frac{f\mathfrak{M}'}{a} \times \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\mu} \dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)} \\ \times \dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)} \cdot \dfrac{(2q+1)(2q)\ldots(2q-\mu+2)}{1.2\ldots\mu} \\ \times \dfrac{(2k+2q)(2k+2q+1)\ldots(2k+2q+\mu'-1)}{1.2\ldots\mu'} \cdot \dfrac{m^g}{1.2\ldots g} \cdot \dfrac{m'^{g'}}{1.2\ldots g'} \\ \times \varepsilon^{p+q+g+1}\, \varepsilon'^{-(2k+p+q-g')}\, \alpha^{k+p+q+1}\, c^k\, \omega^{\mu+g}\, \omega'^{\mu'+g'} \end{array} \right\},$$

$$\varkappa = (p-q)\sigma + k(\varphi + \varphi'),$$

la partie de $A_{m,m'}$ *qui est de l'ordre* $m + m'$, *s'obtiendra en faisant la somme des valeurs que prend l'expression* $CE^{i\varkappa}$, *quand on attribue aux entiers* $k, p, q, \mu, \mu', g, g'$, *toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier les équations*

$$k + p - q + \mu + g = m, \quad k - p + q + \mu' + g' = m',$$

et l'inégalité

$$\mu < 2q + 1,$$

mais en excluant toujours les combinaisons

$$1^\circ\ k=0,\ p=1,\ q=0; \quad 2^\circ\ k=0,\ p=0,\ q=1; \quad 3^\circ\ k=1,\ p=0,\ q=0.$$

Nous avons encore à indiquer les modifications qu'il faut faire subir à nos formules, lorsque la planète perturbatrice $\mathfrak{M}'$ est plus rapprochée du Soleil que la planète troublée $\mathfrak{M}$. On aura alors $a' < a$, et il conviendra dans ce cas de faire

$$\frac{a'}{a} = \alpha,$$

α étant moindre que 1. Les autres notations restant les mêmes, ainsi que la limite donnée plus haut de $\sin^2\frac{I}{2}$, et l'inégalité $\frac{a'}{a} \cdot \frac{1+e'}{1-e} < 1$

étant supposée vérifiée, on trouvera pour $\frac{1}{\Delta}$ une expression qui peut se déduire de l'équation (5) en y remplaçant respectivement les lettres a', ε, ε', s, s', σ par a, ε', ε, s', s, $-\sigma$. Mais il n'arrivera plus que les termes de cette expression répondant aux systèmes de valeurs (6), (7) et (8) de k, p, q composent la quantité $\frac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$; il conviendra donc ici de développer séparément les deux parties

$$-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta},\quad f\mathfrak{M}'\,\frac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$$

de la fonction R. En nommant $\mathcal{A}_{m,m'}$ le coefficient de $z^m z'^{m'}$ dans la première et suivant la même marche que précédemment, on trouvera, pour déterminer $\mathcal{A}_{m,m'}$, la règle suivante :

Si l'on pose

$$C = -\frac{f\mathfrak{M}'}{a}\times\left\{\begin{array}{l}
(-1)^{n+n'+\lambda'+\mu'+\iota+\vartheta+\iota'+\vartheta'}\,\dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}\\[1ex]
\times\dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\cdot\dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)}\\[1ex]
\times\dfrac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}\cdot\dfrac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'}\\[1ex]
\times\dfrac{(2k+2p)(2k+2p+1)\ldots(2k+2p+\lambda-1)}{1.2\ldots\lambda}\\[1ex]
\times\dfrac{(2k+2q)(2k+2q+1)\ldots(2k+2q+\mu-1)}{1.2\ldots\mu}\\[1ex]
\times\dfrac{(2p+1)(2p)\ldots(2p-\lambda'+2)}{1.2\ldots\lambda'}\cdot\dfrac{(2q+1)(2q)\ldots(2q-\mu'+2)}{1.2\ldots\mu'}\\[1ex]
\times\dfrac{n(n-1)\ldots(n-\iota+1)}{1.2\ldots\iota}\cdot\dfrac{(k-n)(k-n-1)\ldots(k-n-\vartheta+1)}{1.2\ldots\vartheta}\\[1ex]
\times\dfrac{n'(n'-1)\ldots(n'-\iota'+1)}{1.2\ldots\iota'}\cdot\dfrac{(k-n')(k-n'-1)\ldots(k-n'-\vartheta'+1)}{1.2\ldots\vartheta'}\\[1ex]
\times\dfrac{m^g}{1.2\ldots\nu\times1.2\ldots(g-\nu)}\cdot\dfrac{m'^{g'}}{1.2\ldots\nu'\times1.2\ldots(g'-\nu')}\\[1ex]
\times 2^{\iota+\vartheta+\iota'+\vartheta'}\,\varepsilon^{-(2k+p+q-\iota-\vartheta-g)}\,\varepsilon'^{p+q+\iota'+\vartheta'+g'+1}\,\alpha^{k+p+q}\\[1ex]
\times c^k\,\omega^{\lambda+\mu+\iota+\vartheta+g}\,\omega'^{\lambda'+\mu'+\iota'+\vartheta'+g'}
\end{array}\right\}.$$

$$\varkappa = (q-p)\sigma + (2n-k)\varphi + (2n'-k)\varphi',$$

le coefficient $\mathcal{A}_{m,m'}$ *est la somme des valeurs que prend le produit* CE^{ix}, *quand on attribue aux entiers*

$$k, p, q, n, n', \lambda, \mu, \lambda', \mu', \iota, \varepsilon, \iota', \varepsilon', g, g', \nu, \nu'$$

toutes les valeurs positives ou nulles, sans exception, propres à vérifier les deux équations

$$\begin{gathered} 2n - k - p + q - \lambda + \mu - \iota + \varepsilon + g - 2\nu = m, \\ 2n' - k + p - q - \lambda' + \mu' - \iota' + \varepsilon' + g' - 2\nu' = m', \end{gathered}$$

et les inégalités

$$\begin{gathered} n < k, \quad n' < k, \quad \lambda' < 2p + 1, \quad \mu' < 2q + 1, \quad \iota < n, \quad \varepsilon < k - n, \\ \iota' < n', \quad \varepsilon' < k - n', \quad \nu < g, \quad \nu' < g'. \end{gathered}$$

Il nous reste à développer $f\mathfrak{M}'\dfrac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$ suivant les puissances de z et de z'. Il suffira pour cela, d'après ce qu'on a vu plus haut, de remplacer dans les formules (10) et (11) α par $\frac{1}{\alpha}$, puis d'y donner successivement aux trois entiers k, p, q les trois systèmes de valeurs (6), (7) et (8), en même temps que les autres entiers n, n',..., y recevront tous les systèmes de valeurs positives ou nulles propres à vérifier les conditions (12) et (13). La somme des valeurs ainsi obtenues pour CE^{ix}, prise avec un signe contraire, sera le coefficient $\mathcal{B}_{m,m'}$ de $z^m z'^{m'}$ dans le développement de $f\mathfrak{M}'\dfrac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$.

Ayant obtenu $\mathcal{A}_{m,m'}$ et $\mathcal{B}_{m,m'}$, on aura pour le coefficient de $z^m z'^{m'}$ dans la fonction R

$$A_{m,m'} = \mathcal{A}_{m,m'} + \mathcal{B}_{m,m'}.$$

Je ferai remarquer, en terminant, l'utilité des formules établies dans ce Mémoire pour le calcul des inégalités d'un ordre élevé qui deviennent sensibles par les petits diviseurs que l'intégration y introduit. On peut bien, lorsque la valeur numérique de la somme $m + m'$ est considérable, calculer le coefficient correspondant par une interpolation, comme l'a fait M. Le Verrier pour une grande inégalité de Pallas, ou en obtenir une valeur approchée par une méthode remarquable que M. Cauchy a publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (*voir* les t. XIX et XX, et particulièrement les Notes écrites à l'occasion du travail de M. Le Verrier, t. XX, p. 769). Mais de l'une ou de l'autre manière on ne trouve que la valeur numérique du coefficient inconnu et non son expression analytique. Or cette dernière, que nos formules donnent immédiatement, est nécessaire quand on veut déterminer, non-seulement l'inégalité de la longitude moyenne, mais encore les diverses inégalités des éléments correspondantes au terme considéré de la fonction perturbatrice; car il faut pouvoir prendre les dérivées partielles du coefficient par rapport aux éléments, ce qu'il est impossible de faire sur un simple nombre. J'ajoute que même pour les termes d'un ordre peu élevé, dont l'expression s'obtient sans trop de difficulté par la voie de développement successif ordinairement suivie, les formules de ce Mémoire fournissent un contrôle utile, en permettant de calculer séparément chaque partie du développement sur l'exactitude de laquelle il pourrait rester quelque doute.