# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


J. LIOUVILLE

**Théorème concernant les nombres premiers de la forme $40\mu + 3$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 6 (1861), p. 105-106.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__105_0>

# THÉORÈME

## CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $40\mu + 3$;

**Par M. J. LIOUVILLE.**

Soit $m$ un nombre premier donné, de la forme $40\mu + 3$. Posons de toutes les manières possibles l'équation

$$m = (10t + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

$t$ étant un entier indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif, tandis que $y$ et $p$ sont impairs et positifs, de plus $p$ premier et non diviseur de $y$ : nous admettons pour $l$ la valeur zéro. On demande une règle facile qui dise à priori si le nombre N des décompositions de $m$ ainsi obtenues est pair ou impair, zéro étant compté comme nombre pair.

Pour répondre à cette question, j'observe que le nombre premier $m$ étant de la forme $40\mu + 3$ est $\equiv 3 \pmod{8}$ et que par conséquent on peut poser, d'une seule manière, en nombres entiers,

$$m = a^2 + 2b^2.$$

Or tout dépend ici de la valeur de $a \pmod{5}$; car N est impair quand $a$ est divisible par 5, mais pair quand $a$ est premier à 5.

Les entiers fournis par la formule générale

$$(10t + 3)^2$$

en y faisant successivement $t = 0$, $t = \pm 1$, $t = \pm 2$,..., sont

$$3^2, \; 7^2, \; 13^2, \; 17^2, \; 23^2, \ldots;$$

vérifions, d'après cela, notre théorème en prenant pour $m$ les nombres premiers $40\mu + 3$ les plus petits, savoir

$$3,\ 43,\ 83,\ 163,\ 283.$$

Comme on a

$$\begin{aligned}
3 &= 1^2 + 2.1^2,\\
43 &= 5^2 + 2.3^2,\\
83 &= 9^2 + 2.1^2,\\
163 &= 1^2 + 2.9^2,\\
283 &= 11^2 + 2.9^2,
\end{aligned}$$

ce qui donne pour $a$ les valeurs respectives

$$1,\ 5,\ 9,\ 1,\ 11,$$

on voit que N doit être impair pour 43, mais pair pour 3, 83, 163 et 283. Or on trouve en effet $N = 1$ pour $m = 43$, en vertu de l'équation canonique

$$43 = 3^2 + 2.17.1^2,$$

tandis que l'on a $N = 0$ pour $m = 3$ et $m = 163$, et $N = 2$ pour $m = 83$ et $m = 283$, les équations canoniques étant, dans ces deux derniers exemples,

$$\begin{aligned}
83 &= 3^2 + 2.37.1^2,\\
83 &= 7^2 + 2.17.1^2,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
283 &= 3^2 + 2.137.1^2,\\
283 &= 7^2 + 2.13.3^2.
\end{aligned}$$

Le nombre premier $p$ qui figure au second membre de l'équation

$$m = (10t + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2$$

doit, dans les conditions où nous nous sommes placés, vérifier les deux congruences

$$p \equiv 1 \pmod{4}, \qquad p = \pm 3 \pmod{5}.$$

Il est donc toujours de l'une ou de l'autre des deux formes $20g + 13$, $20g + 17$.