JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. LUCAS

Étude sur les transformations homographiques planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 137-146.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__137_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

ÉTUDE
SUR LES
TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES PLANES;

PAR M. F. LUCAS,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Nice.

---

§ I. — *Définitions et notations.*

1. Lorsqu'on transforme une figure, par voie homographique, il y a généralement des points que la transformation ne déplace pas et qu'on peut, pour cette raison, appeler *points doubles*.

Deux points doubles étant réunis par une droite, cette ligne n'est pas déplacée par la transformation, et l'on est ainsi conduit à considérer des *droites doubles*.

Soient :

m le nombre des points doubles;
n celui des droites doubles.

Comme les points doubles résultent des intersections mutuelles des droites doubles, on a

$$m = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{1}$$

et comme les droites doubles résultent de la jonction des points doubles pris deux à deux, on a

$$n = \frac{m(m-1)}{2}. \tag{2}$$

Des équations (1) et (2), on tire

$$m = n = 3.$$

Il y a donc trois points doubles, parmi lesquels peut se trouver un couple de points imaginaires, et trois droites doubles qui peuvent présenter un couple de droites imaginaires.

Dans tous les cas, nous appellerons *triangle invariable* la figure formée par les points et les droites doubles, tant réels qu'imaginaires.

2. Étant définie, soit par des données géométriques, soit au moyen d'équations, une transformation homographique en vertu de laquelle on passe d'un *premier* à un *second* système de figures, ou réciproquement, une figure F du plan, considérée tour à tour, comme appartenant à chacun des deux systèmes, donnera naissance à deux homologues que nous désignerons respectivement par F' et F''.

On voit que la transition de F à F' se fait de la même manière que celle de F'' à F, que les trois figures F, F', F'' sont deux à deux homographiques entre elles et que le triangle invariable est le même dans les trois systèmes correspondants (F, F'), (F', F''), (F'', F).

3. Un point m du plan donne naissance à deux homologues m', m'', que l'on peut réunir par une droite M.

Cette droite m donne naissance à deux homologues M' et M'' qui se coupent en m.

Le point m et la droite M ont donc entre eux une dépendance qui permet de passer du point à la droite ou de la droite au point, sans ambiguïté et d'une façon fort simple. Nous leur donnerons les noms de *foyer* et *directrice*.

§ II. — *Corrélation des points du plan et des coniques circonscrites au triangle invariable.*

4. Supposons que la droite M tourne autour d'un point a, M' et M'' pivoteront respectivement autour de a' et de a'', et leur intersection m, foyer de M, décrira une conique passant par a' et a'' (*Géométrie supérieure*, n° 543) et aussi par les trois points doubles; en sorte que cette conique est déterminée par cinq points donnés. On voit par là comment un point a détermine une conique C_a circonscrite au triangle invariable.

On reconnaît aisément que les homologues $(C_a)'$ et $(C_a)''$ de la conique C_a se coupent au point a; donc une conique circonscrite au triangle invariable correspond toujours à un point du plan par la liaison précédemment définie; cette correspondance est simple et sans ambiguïté.

Pour exprimer cette correspondance, nous dirons que le point et la conique sont *conjugués*.

5. Remarquons en passant que les coniques $(C_a)'$ et $(C_a)''$, homographiques entre elles, sont respectivement engendrées par les homologues m' et m'' du point m; or ces deux points sont situés sur la droite M qui pivote autour de l'intersection a des deux coniques. De là ce théorème :

Quand deux coniques homographiques sont circonscrites au triangle invariable de la transformation, chaque couple de points homologues, pris sur ces courbes, est en ligne droite avec le quatrième point d'intersection des deux coniques.

6. Faisons mouvoir le point a sur une droite X, la conique conjuguée C_a de ce point pivotera, en se déformant, autour des sommets du triangle invariable et en outre autour du foyer x de la droite X.

En effet, pour une position quelconque du point a sur X, la droite pivotante M, qui tourne autour de a et dont le foyer m engendre C_a, coïncidera à un moment donné avec la droite X, et par conséquent C_a passera par x. Par conséquent :

Lorsqu'un point décrit une droite, sa conique conjuguée pivote autour d'un point, foyer de cette droite.

Réciproquement le faisceau des coniques circonscrites au triangle invariable et passant par le point x pourra être regardé comme l'ensemble des coniques conjuguées des différents points de la directrice X de ce point. Donc

Lorsqu'une conique circonscrite au triangle invariable pivote autour d'un point, le point conjugué de cette conique engendre une droite directrice du pivot.

7. Considérons maintenant le faisceau de coniques circonscrites au

triangle invariable déterminé par le foyer x ou par la directrice X, et prenons relativement à ces coniques les polaires d'un point quelconque du plan. Toutes ces polaires passeront par un même point (*Géométrie supérieure*, n° 478, étendu aux coniques) et correspondront respectivement, sans ambiguïté, aux différents points de la droite X; elles formeront donc un faisceau en correspondance anharmonique avec la division conçue sur X. On peut dire par conséquent que :

Les différents points d'une droite forment une série homographique avec la série de leurs coniques conjuguées.

8. L'ensemble des observations que nous venons d'exposer dans ce paragraphe, nous conduit à énoncer le théorème suivant, qui résume tout ce qui précède :

La correspondance entre les points et leurs coniques conjuguées présente tous les caractères essentiels de la correspondance dite corrélative.

§ III. — *Nouvelle méthode de transformation des figures.*

9. De même que la correspondance corrélative des points et des droites conduit à une méthode de transformation des figures, de même la correspondance corrélative des points et des coniques conduit à une méthode de transformation, dont nous allons nous occuper.

Que le point a se meuve suivant une loi continue quelconque, de manière à décrire une courbe Σ, et la conique conjuguée C_a pivotera, en changeant de forme, autour des sommets du triangle invariable, de manière à envelopper une courbe Σ_1 correspondante à Σ.

Au lieu de définir la génération de Σ_1 par ses tangentes, on peut en définir une génération par points. En effet, lorsque a décrit un élément de Σ, on peut regarder ce point comme se mouvant sur la tangente X en cet élément; pendant ce temps la conique C_a pivote autour du foyer x de cette tangente, en sorte que ce point x appartient à Σ_1.

Ainsi :

La transformée d'une ligne est l'enveloppe des coniques conjuguées *des points de cette ligne, ou, ce qui revient au même, le lieu géométrique des foyers des tangentes à cette ligne.*

10. L'esprit général de cette méthode de transformation est donc de transformer les points en sections coniques circonscrites au triangle invariable et les droites en points.

Un polygone rectiligne de n côtés donnera naissance à un polygone de même nombre de côtés, dont les côtés seront des arcs de sections coniques circonscrites au triangle invariable; on peut lui donner le nom de *polygone conique*.

11. Il est évident que toute droite qui passe par un point double a pour foyer ce point lui-même, et par conséquent se transforme en ce point. Donc autant on pourra mener, par un point double, de tangentes à la courbe Σ, autant de fois Σ_1 passera par ce point double.

Ainsi, lorsque Σ est du degré m, Σ_1 passe $m(m-1)$ fois par chacun des points doubles, en sorte que les points doubles sont généralement des points multiples des transformées.

Désignons par m le degré de la transformée. Par un point quelconque a du plan, on pourra mener à Σ, $m(m-1)$ tangentes à chacune desquelles correspondra son foyer, point de la transformée Σ_1 situé sur C_a. Donc une conique circonscrite au triangle invariable rencontre Σ_1 en $m(m-1)$ points, indépendamment des points doubles; et le nombre total des points de rencontre de cette conique avec Σ_1 est égal à $4m(m-1)$. D'ailleurs ce nombre de points est représenté par $2m_1$, on a donc

$$2m_1 = 4m(m-1),$$

d'où

$$m_1 = 2m(m-1).$$

Telle est la relation qui existe entre le degré d'une courbe et celui de sa transformée.

12. Le foyer d'une droite double étant indéterminé et situé en un point quelconque de cette droite, il est clair que lorsque Σ touchera une droite double, cette droite appartiendra tout entière à la transformée Σ_1.

Ainsi un contact de Σ avec une droite double introduit cette droite dans la transformée, qui se compose alors de cette droite double et d'une courbe compagne du degré $2m(m-1)-1$ lorsque Σ est du degré m. Cette courbe compagne passe $m(m-1)$ fois par le point double opposé à la droite double que l'on considère et $m(m-1)-1$ fois par chacun des deux autres sommets du triangle invariable.

Abstraction faite des droites doubles introduites dans la transformée, le degré de cette courbe est réduit d'une unité par chaque contact de Σ avec un côté du triangle invariable, en sorte qu'une conique inscrite dans le triangle invariable se transforme en une droite.

§ IV. — *Application de cette méthode à la transformation des sections coniques.*

13. Lorsque le degré de Σ est égal à 2, celui de Σ_1 est en général égal à 4. Les coniques se transforment ainsi en lignes du quatrième degré, passant deux fois par chacun des sommets du triangle invariable, en sorte que ces lignes ont nécessairement trois points multiples dont deux peuvent être imaginaires.

Supposons qu'il s'agisse d'un point double réel, et voyons de quelle nature sera le point multiple correspondant.

Si ce point est extérieur à la conique Σ, on pourra mener par ce point deux tangentes à cette ligne ; ces deux lignes ont le même foyer, le point double lui-même, et c'est ainsi que ce point se trouve appartenir à la fois à deux branches distinctes de la transformée ; on aura un *point multiple ordinaire*.

Si le point double est sur la conique, les deux tangentes sont réelles, mais non plus distinctes : aussi les deux branches de courbe qui viennent concourir au point double se raccordent, et l'on obtient un *point de rebroussement*.

Enfin, lorsque le point double est intérieur à la conique, les deux tangentes sont imaginaires, les deux branches de courbe le sont aussi, et l'on obtient un *point isolé*.

14. Il y aurait plusieurs observations à faire sur les constructions géométriques au moyen desquelles on pourrait passer de Σ à Σ_1 ; mais le but des méthodes de transformation du genre de celle qui nous occupe étant surtout de découvrir des extensions de théorèmes et non des procédés de tracés graphiques, nous n'insisterons pas sur ce point. Nous allons examiner quelles conséquences on peut tirer des théorèmes de Brianchon et de Pascal.

Pour donner à nos phrases plus de clarté et de concision, nous adopterons la dénomination de *conique génératrice*, pour désigner une conique circonscrite au triangle invariable, et nous ferons usage de l'expression *polygone conique*, dans le sens que nous lui avons attribué précédemment (n° **10**).

15. Cela posé, considérons une conique Σ et un hexagone inscrit quelconque H; les points de concours des côtés opposés de cet hexagone, au nombre de trois, sont sur une ligne droite X.

Par la transformation, Σ devient une courbe du quatrième ordre Σ_1 dont chacun des points doubles est un point singulier; l'hexagone inscrit H devient un hexagone conique H_1 circonscrit à Σ_1, les points de concours des côtés opposés de H deviennent les diagonales coniques de H_1, et la droite X, sur laquelle sont les trois points de concours, devient un point x par lequel passent les trois diagonales coniques.

Ainsi la courbe Σ_1 et un hexagone circonscrit conique H_1 forment une figure telle, que les trois diagonales coniques de l'hexagone passent par un même point x.

16. Si nous prenons maintenant une conique Σ et un hexagone circonscrit quelconque K, les diagonales de cet hexagone, au nombre de trois, concourront en un point y.

Par une transformation analogue à la précédente, on trouve que la courbe Σ_1 et un hexagone inscrit conique K_1 forment une figure telle, que les trois points de concours des côtés coniques opposés de cet hexagone sont sur une même conique génératrice C_y.

17. Les deux propriétés hexagonales de la courbe Σ_1, qui viennent d'être ainsi établies, peuvent servir à la construction de cette courbe, de la même façon que les propriétés hexagonales des coniques, établies par les théorèmes de Brianchon et de Pascal servent à la construction de ces lignes.

Mais pour que ces propriétés offrent un intérêt réel, il faut faire voir que la transformée Σ_1 d'une conique Σ est une courbe que l'on peut définir indépendamment de toute considération transformatrice. C'est ce qu'on peut aisément établir comme il suit.

Une courbe du quatrième degré est déterminée par quatorze points, et un point multiple à deux branches doit être regardé comme équivalent à trois points. Si donc on veut déterminer une courbe du quatrième ordre ayant trois points multiples donnés, il faut prendre arbitrairement cinq points a, b, c, d, e de cette ligne.

Cela posé, établissons un système de transformation homographique assujetti seulement à la condition que les trois points multiples forment les sommets de son triangle invariable. (Ce système peut être choisi d'une infinité de manières.)

Prenons au moyen de ce système, d'après ce qui a été dit au § I[er], les directrices A, B, C, D, E des cinq points donnés, et construisons la conique Σ tangente à ces cinq droites.

Il est facile de voir que la transformée Σ_1 de cette conique sera précisément la courbe du quatrième degré cherchée.

Par conséquent :

Toute courbe du quatrième degré à trois points singuliers peut être regardée comme une transformée de conique.

Une pareille courbe jouit donc des propriétés hexagonales ci-dessus énoncées.

§ V. — *Propriétés de certaines courbes des degrés* 1, 2, 3 *ou* 4.

18. Il résulte du paragraphe précédent que lorsqu'une courbe du quatrième degré possède trois points singuliers, le triangle formé par ces trois points (dont un couple peut être imaginaire), peut être employé très-élégamment pour la construction de cette courbe ; nous donnerons à ce triangle le nom de *triangle générateur*.

Une conique circonscrite à ce triangle portera le nom de *conique génératrice*.

L'expression *polygone conique* désignera un polygone dont les côtés et les diagonales seront formés par des arcs de coniques génératrices.

19. D'après cela les théorèmes de Brianchon et de Pascal, étendus aux courbes du quatrième degré, par la méthode de transformation précédente, s'exprimeront très-simplement comme il suit.

Extension du théorème de Pascal :

Un hexagone conique étant inscrit dans une courbe du quatrième degré à triangle générateur, les trois points de rencontre des couples des côtés opposés sont sur une conique génératrice.

Extension du théorème de Brianchon :

Un hexagone conique étant circonscrit à une courbe du quatrième degré à triangle générateur, les trois diagonales coniques passent par un même point.

20. Une courbe du troisième degré peut être déterminée par un point singulier et six points ordinaires.

Formons un triangle avec le point singulier et deux autres points quelconques d'une pareille courbe. La droite qui joindra ces deux derniers points étant associée à la courbe du troisième degré, on aura une courbe du quatrième degré dans laquelle le triangle dont il s'agit sera évidemment *générateur*.

On voit ainsi comment les théorèmes précédents s'appliquent aux lignes du troisième degré, formant une famille caractérisée par l'existence d'un point singulier.

21. Prenons maintenant une conique et formons un triangle ayant deux de ses sommets sur cette ligne, le troisième étant quelconque.

La conique et les deux côtés du triangle distincts de sa corde forment une ligne du quatrième degré dont le triangle est *générateur*.

Cette observation applique aux sections coniques les deux théorèmes précédents.

Si l'on suppose que le sommet arbitraire du triangle soit pris sur la corde de la conique, on retombe sur les théorèmes proprement dits de Brianchon et de Pascal.

22. Enfin les côtés d'un triangle quelconque et une droite quelconque du plan forment encore une ligne du quatrième degré, dont ce triangle est générateur.

Par cette observation on est conduit à énoncer deux propriétés de la droite.

23. Il peut arriver qu'un triangle générateur ait pour sommets un point quelconque et les deux points imaginaires d'intersection de la droite à l'infini avec tous les cercles du plan; les coniques génératrices se réduisent alors à des cercles passant par le premier point.

24. En résumé les théorèmes énoncés au numéro **19** s'appliquent aux courbes du quatrième degré à trois points singuliers, aux courbes du troisième degré qui présentent un point singulier, à toutes les coniques et à toutes les droites, à la condition qu'on choisisse convenablement le triangle générateur.

Ce triangle, entièrement déterminé dans le premier cas, prend une indétermination de plus en plus grande lorsqu'on passe aux cas suivants et devient tout à fait arbitraire quand on arrive au dernier cas.