JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. PAINVIN

Théorèmes sur la décomposition en facteurs linéaires des fonctions homogènes entières

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 209-218.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__209_0>

THÉORÈMES

SUR

LA DÉCOMPOSITION EN FACTEURS LINÉAIRES DES FONCTIONS HOMOGÈNES ENTIÈRES;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Le *hessien* d'une fonction est le déterminant fonctionnel des dérivées premières de la fonction.

J'appellerai *hessiens dérivés du* $k^{\text{ième}}$ *ordre* d'une fonction les dérivées du $k^{\text{ième}}$ ordre prises par rapport aux éléments du hessien de cette fonction.

2. Les théorèmes que je vais démontrer sont résumés dans les énoncés suivants :

I° *Si le nombre des variables est au moins égal au degré de la fonction : pour qu'une fonction de degré p, à n variables, soit décomposable en un produit de p facteurs linéaires inégaux, il faut et il suffit que les hessiens dérivés du $(n-p-1)^{\text{ième}}$ ordre soient identiquement nuls, et, en outre, que tous les hessiens dérivés du $(n-p)^{\text{ième}}$ ordre soient dans un rapport identiquement constant avec la puissance $(p-2)^{\text{ième}}$ de la fonction.*

Ainsi, u étant une fonction de degré p, H son hessien, n le nombre des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qu'elle renferme, et u_{rs} désignant la dérivée seconde $\frac{d^2 u}{dx_r\, dx_s}$, on devra avoir identiquement

$$1^\circ \quad \frac{d^{n-p-1}\mathrm{H}}{du_{r_1 s_1}\, du_{r_2 s_2} \ldots du_{r_{n-p-1} s_{n-p-1}}} = 0;$$

$$2^\circ \quad \frac{d^{n-p}\mathrm{H}}{du_{r_1 s_1}\, du_{r_2 s_2} \ldots du_{r_{n-p} s_{n-p}}} = (-1)^{p-1}(p-1)\lambda_{r_1 r_2 \ldots r_{n-p}} \lambda_{s_1 s_2 \ldots s_{n-p}} (u)^{p-2};$$

$r_1, r_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots$ sont des nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$, et les λ_i représentent des constantes.

II° *Si le nombre des variables est au plus égal au degré de la fonction : pour qu'une fonction de degré p, à n variables, soit décomposable en p facteurs linéaires inégaux, il faut et il suffit que le hessien de la fonction soit identiquement divisible par la puissance $(n-2)^{\text{ième}}$ de la fonction.*

Remarque I. — Le cas particulier où le nombre des variables est égal au degré de la fonction est une conséquence de l'un ou de l'autre des deux énoncés précédents.

Remarque II. — L'application de ces théorèmes conduira à un nombre surabondant de relations ; il faudra se rappeler que le nombre des relations distinctes, pour qu'une fonction homogène de degré p, à n variables, soit décomposable en facteurs linéaires inégaux, est donné par la formule

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} - p(n-1) - 1;$$

les relations excédantes seront une conséquence des autres.

3. Je commencerai par démontrer que les conditions énoncées ont lieu nécessairement lorsqu'on suppose la fonction décomposable en facteurs linéaires.

Premier cas. — Le nombre des variables est au moins égal au degré de la fonction.

Soit u une fonction de degré p, n le nombre des variables, et supposons cette fonction égale à un produit de p facteurs linéaires de la forme

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}a_2 + \ldots + a_{rn}x_n.$$

Soumettons cette fonction u à la transformation linéaire

$$(1) \qquad y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n;$$

dans ces dernières formules, r désigne un quelconque des nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$; les valeurs $r = 1, 2, \ldots p$ reproduisent les p facteurs de la fonction u. Cette substitution transformera la fonction u en la fonction

$$(2) \qquad v = y_1 y_2 \ldots y_p.$$

Calculons le hessien et les hessiens dérivés de u à l'aide des dérivées de la fonction v.

4. Posons

$$u_r = \frac{du}{dx_r}, \qquad u_{rs} = \frac{d^2 u}{dx_r dx_s},$$
$$v_r = \frac{dv}{dy_r}, \qquad v_{rs} = \frac{d^2 v}{dy_r dy_s},$$

et remarquons que

$$\left\{ \begin{array}{lll} v_{p+1} = 0, & v_{p+2} = 0, \ldots, & v_n = 0, \\ v_{r,p+1} = 0, & v_{r,p+2} = 0, \ldots, & v_{n,r} = 0. \end{array} \right.$$

Eu égard à ces relations, les formules (1) de transformation nous donneront

$$u_r = a_{1r} v_1 + a_{2r} v_2 + \ldots + a_{pr} v_p;$$

d'où l'on conclut

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_{rs} = \dfrac{dv_1}{dx_s} a_{1r} + \dfrac{dv_2}{dx_s} a_{2r} + \ldots + \dfrac{dv_p}{dx_s} a_{pr}, \\ \dfrac{dv_r}{dx_s} = v_{r1} a_{1s} + v_{r2} a_{2s} + \ldots + v_{rp} a_{ps}. \end{array} \right.$$

Or si l'on se rappelle les principes sur lesquels repose la multiplication des déterminants, on voit que le hessien de u, ses hessiens dérivés du 1^{er}, du 2^e,..., du $(n - p - 1)^{ième}$ ordre, sont des quantités identiquement nulles, puisque le nombre des produits qui entrent dans l'expression de u_{rs} est inférieur au degré de ces déterminants. Ainsi nous voyons déjà que *tous les hessiens dérivés du* $(n - p - 1)^{ième}$ *ordre de la fonction u sont identiquement nuls.*

5. Passons au calcul des hessiens dérivés du $(n-p)^{ième}$ ordre.

Si l'on désigne par P le module de la substitution (1), et qu'on pose

$$(4)\qquad \lambda_{r_1 r_2 \ldots r_{n-p}} = \frac{d^{n-p}\mathrm{P}}{da_{r_1, p+1}\, da_{r_2, p+2} \ldots da_{r_{n-p}, n}}$$

(les seconds indices, dans le dénominateur, représentant des nombres fixes), les formules (3) nous donneront, pour les valeurs des hessiens dérivés du $(n-p)^{ième}$ ordre,

$$(5)\ \frac{d^{n-p}\mathrm{H}}{du_{r_1 s_1}\, du_{r_2 s_2} \ldots du_{r_{n-p} s_{n-p}}} = \lambda_{r_1 r_2 \ldots r_{n-p}} . \lambda_{s_1 s_2 \ldots s_{n-p}} \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \ldots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \ldots & v_{2p} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \ldots & v_{3p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{p1} & v_{p2} & v_{p3} \ldots & v_{pp} \end{vmatrix}$$

Or

$$v_{rr} = 0, \quad v_{rs} = \frac{v}{y_r y_s};$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-p}\mathrm{H}}{du_{r_1 s_1}\, du_{r_2 s_2} \ldots du_{r_{n-p} s_{n-p}}} &= (-1)^{p-1}(p-1)\lambda_{r_1 r_2 \ldots r_{n-p}} \lambda_{s_1 s_2' \ldots s_{n-p}} . v^{p-2} \\ &= (-1)^{p-1}(p-1)\lambda_{r_1 r_2 \ldots} \lambda_{s_1 s_1 \ldots} . u^{p-2}; \end{aligned}$$

ainsi les hessiens dérivés du $(n-p)^{ième}$ ordre sont identiquement proportionnels à la puissance $(p-2)^{ième}$ de la fonction.

6. Second cas. — Le nombre des variables est au plus égal au degré de la fonction.

Je remarque d'abord que le hessien étant un covariant de la fonction, toute relation entre le hessien et la fonction existera encore entre la fonction transformée par une substitution linéaire quelconque et le hessien de la fonction transformée. Choisissons, pour expressions des nouvelles variables, n des facteurs dans lesquels se décompose la fonction. Cette fonction pourra donc s'écrire sous la forme

$$(6)\qquad u = y_1 y_2 \ldots y_n \mathrm{XYZ} \ldots \mathrm{U};$$

les variables sont $y_1, y_2, \ldots, y_n$; X, Y, etc., sont des fonctions linéaires de ces variables, et leur nombre est $p-n$.

Posons

$$(7)\qquad M_r = m_r y_r,\quad N_r = n_r y_r,\quad P_r = p_r y_r, \ldots,\quad Q_r = q_r y_r,$$

$$\text{où}\quad r = 1, 2, \ldots, n;$$

les X, Y, Z,..., U seront de la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} X = M_1 + M_2 + \ldots + M_n, \\ Y = N_1 + N_2 + \ldots + N_n, \\ Z = P_1 + P_2 + \ldots + P_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n. \end{cases}$$

Il s'agit de démontrer que le hessien de u est divisible par u^{n-2}.

7. Posons encore, pour simplifier,

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = XYZ\ldots U, \\ a_r = \mathfrak{P}\left(\dfrac{M_r}{X} + \dfrac{N_r}{Y} + \dfrac{P_r}{Z} + \ldots + \dfrac{Q_r}{U}\right), \\ c_{rs} = \mathfrak{P}\left(\dfrac{M_r N_s + M_s N_r}{XY} + \dfrac{M_r P_s + M_s P_r}{XZ} + \ldots\right); \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha_{rr} = 2a_r + c_{rr}, \\ \alpha_{rs} = \mathfrak{P} + a_r + a_s + c_{rs}, \\ v = y_1 y_2 y_3 \ldots y_n, \end{cases}$$

on trouve que

$$(11)\qquad u_{rr} = \frac{v}{y_r^2}\alpha_{rr},\qquad u_{rs} = \frac{v}{y_r y_s}\alpha_{rs}.$$

Désignons par H le hessien de u; en combinant convenablement par voie d'addition les lignes et les colonnes de ce déterminant et en ayant égard aux relations évidentes

$$(12)\quad \begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (p-n)\,\mathfrak{P}, \\ c_{1r} + c_{2r} + \ldots + c_{nr} = c_{r1} + c_{r2} + \ldots + c_{rn} = (p-n-1)\,a_r, \end{cases}$$

on arrive rapidement à la valeur suivante de H

$$(13)\quad \mathrm{H} = \left(\frac{p-1}{p-n-1}\right)\varphi^{n-2} \begin{vmatrix} -(p-2)\mathfrak{Q}+c_{11} & \mathfrak{Q}+c_{12}\cdots & \mathfrak{Q}+c_{1n} \\ \mathfrak{Q}+c_{21} & -(p-2)\mathfrak{Q}c_{22}\cdots & \mathfrak{Q}+c_{2n} \\ \mathfrak{Q}+c_{31} & \mathfrak{Q}+c_{32}\cdots & \mathfrak{Q}+c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{Q}+c_{n,1} & \mathfrak{Q}+c_{n,2}\cdots & -(p-2)\mathfrak{Q}+c_{n,n} \end{vmatrix}$$

où $\mathfrak{Q}$ représente la quantité $\frac{1}{p-1}\cdot\mathfrak{P}$.

N. B. — On devra traiter directement le cas où $p = n+1$.

8. Pour établir la proposition que nous avons en vue, il suffit de faire voir que ce déterminant est divisible par $\mathfrak{P}^{n-2}$ ou $\mathfrak{Q}^{n-2}$.

Dans ce but, on remarque d'abord que les c_{rs} peuvent s'écrire sous la forme

$$(14)\qquad c_{rs} = \frac{a_r a_s}{\mathfrak{P}} - \mathfrak{P}k_{rs},$$

en posant

$$(15)\qquad k_{rs} = \frac{\mathrm{M}_r\mathrm{M}_s}{\mathrm{X}^2} + \frac{\mathrm{N}_r\mathrm{N}_s}{\mathrm{Y}^2} + \frac{\mathrm{P}_r\mathrm{P}_s}{\mathrm{Z}^2} + \ldots + \frac{\mathrm{Q}_r\mathrm{Q}_s}{\mathrm{U}^2}.$$

Si alors on développe par colonnes le déterminant qui est en facteur dans la valeur de H, on constate aisément que les déterminants partiels ainsi obtenus ont en facteur les quantités $\mathfrak{P}^{n-2}$.

L'espace que je dois occuper ne me permet pas de développer avec détails cette vérification qui n'offre pas d'ailleurs de sérieuses difficultés.

9. Les calculs que je viens d'exposer nous démontrent que, si une fonction est décomposable en facteurs linéaires inégaux, les conditions énoncées au n° **2** sont nécessairement remplies.

Il reste maintenant à établir la *proposition réciproque*.

10. Supposons d'abord le nombre des variables supérieur au degré de la fonction. Soit une fonction u, de degré p, à n variables; désignons par H son hessien, et admettons que

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^{n-p-1}\mathrm{H}}{du_{r_1s_1}\,du_{r_2s_2}\ldots du_{r_{n-p-1}s_{n-p-1}}} = 0,\\ &\frac{d^{n-p}\mathrm{H}}{du_{r_1s_1}\ldots du_{r_2s_2}\ldots du_{r_{n-p}s_{n-p}}} = \lambda_{r_1r_2\ldots r_{n-p}}\lambda_{s_1s_2\ldots s_{n-p}}.u^{p-2};\end{aligned}\right.$$

il s'agit de démontrer que la fonction u est décomposable en facteurs linéaires. Représentons, pour un instant, par h le déterminant $\dfrac{d^{n-p-1}\mathrm{H}}{du_{p+2,\,p+2}\,du_{p+3,\,p+3}\ldots du_{n,n}}$, nous aurons

$$u_{1r}\frac{dh}{du_{1r_1}} + u_{2r}\frac{dh}{du_{2r_1}} + \ldots + u_{p,r}\frac{dh}{du_{p,r_1}} + u_{p+1,r}\frac{dh}{du_{p+1,r_1}} = 0,$$

et cette relation aura lieu pour $r = r_1$, puisque h est nul. En remplaçant les $\dfrac{dh}{du_{r_s}}$ par leurs valeurs déduites de la seconde ligne des égalités (16), il vient

$$(17)\qquad u_{1,r}\lambda_{1,p+2,\ldots,n} + u_{2r}\lambda_{2,p+2,\ldots,n} + \ldots + u_{p+1,r}\lambda_{p+1,p+2,\ldots,n} = 0,$$

et cette relation a lieu identiquement pour les valeurs $1, 2, \ldots, p+1$ de r. En raisonnant de la même manière sur $(n-p-1)$ déterminants de la forme $\dfrac{d^{n-p-1}\mathrm{H}}{du_{p+2,r_1}\,du_{p+3,r_2}\ldots du_{n,r_{n-p-1}}}$, on voit que l'identité (17) est encore vraie pour les valeurs $p+2, p+3, \ldots, n$ de r. On conclut de cette identité

$$(18)\qquad u_1\lambda_{1,p+2,\ldots,n} + u_2\lambda_{2,p+2,\ldots,n} + \ldots + u_{p+1}\lambda_{p+1,p+2,\ldots,n} = 0.$$

Par un raisonnement analogue, on obtiendra d'autres relations de la forme (18); on continuera cette déduction jusqu'à ce qu'on ait un nombre de relations égal à l'excès $(n-p)$ du nombre des variables sur le degré de la fonction. On aura ainsi le groupe des relations suivantes

$$(19)\begin{cases} u_1\mu_{1,n} + u_2\mu_{2,n} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{p+1}\mu_{p+1,n} = 0, \\ u_1\mu_{1,n-1} + u_2\mu_{2,n-1} + \ldots\ldots\ldots + u_p\ \mu_{p,n-1} + u_n\ \mu_{n,n-1} = 0, \\ u_1\mu_{1,n-2} + u_2\mu_{2,n-2} + \ldots + u_{p-1}\mu_{p-1,n-2} + u_{n-1}\mu_{n-1,n-2} + u_n\ \mu_{n,n-2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dont le nombre est $n-p$.

11. Ceci posé, effectuons la transformation linéaire

$$x_r = \mu_{r,1}y_1 + \mu_{r,2}y_2 + \ldots + \mu_{r,n}y_n; \tag{20}$$

les $(n-p)$ dernières colonnes du module de cette substitution étant fournies par les relations (19); de sorte que la $n^{ième}$ colonne sera

$$\mu_{1,n},\ \mu_{2,n},\ \mu_{3,n},\ldots,\ \mu_{p+1,n},\ 0,\ 0,\ldots,\ 0,\ 0;$$

la $(n-1)^{ième}$ colonne sera

$$\mu_{1,n-1},\ \mu_{2,n-1},\ \mu_{3,n-1},\ldots,\ \mu_{p,n-1},\ 0,\ldots,\ 0,\ \mu_{n,n-1};$$

la $(n-2)^{ième}$ colonne sera

$$\mu_{1,n-2},\ \mu_{2,n-2},\ \mu_{3,n-3},\ldots,\ \mu_{p-1,n-2},\ 0,\ 0,\ldots,\ 0,\ \mu_{n-1,n-2},\ \mu_{n,n-2};$$

et ainsi de suite.

A l'aide des formules (20), la fonction u se transformera en une fonction que je désignerai par v. On voit d'abord que la fonction transformée v est indépendante des variables $y_{p+1}, y_{p+2},\ldots, y_n$; car, d'après les formules (20) et (19), on trouve

$$\frac{dv}{dy_{p+1}} = 0,\quad \frac{dv}{dy_{p+2}} = 0,\ldots,\quad \frac{dv}{dy_n} = 0. \tag{21}$$

On conclut encore

$$v_{r,p+1} = 0,\quad v_{r,p+2} = 0,\ldots,\quad v_{r,n} = 0. \tag{22}$$

Ainsi, si l'on a égard aux relations (16), on trouve que la fonction u peut se transformer en une autre v, de même degré p, et ne renfermant plus que p variables.

12. Je dis, en outre, que cette fonction v est telle, que son hessien est dans un rapport identiquement constant avec la puissance $(p-2)^{ième}$ de la fonction.

Il suffit, pour le démontrer, de résoudre les formules (20) par rapport aux y_r et de calculer les u_{rs} en fonction de v_{rs}. En suivant alors une marche analogue à celle qui est indiquée dans le n° **4**, et en s'appuyant sur les propriétés connues des déterminants réciproques, on constate que les identités (16) se réduisent toutes à la forme unique

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12}\ldots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22}\ldots & v_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{p1} & v_{p2}\ldots & v_{pp} \end{vmatrix} = k.v^{p-2},$$

k étant une constante; le hessien de la fonction v est donc proportionnel à la puissance $(p-2)^{ième}$ de la fonction.

Remarque. — Ce même calcul nous montre que, dans les formules (20) de transformation, on ne devait pas étendre les relations (19) à plus de $(n-p)$ colonnes; car alors les hessiens dérivés du $(n-p)^{ième}$ ordre eussent été nuls, ce qui serait contraire aux hypothèses admises (16).

13. On voit par ce calcul que *la proposition réciproque* se trouve ramenée à l'examen du seul et unique cas où le nombre des variables est inférieur ou égal au degré de la fonction. Cette dernière question ne me semble pas, pour le moment, pouvoir être traitée par une analyse générale comme l'ont été toutes les questions qui précèdent. Cependant sa vérification est possible lorsque le degré de la fonction n'est pas trop élevé.

14. L'examen des cas où plusieurs des facteurs linéaires sont égaux, conduit à des théorèmes analogues. Je me contenterai d'énoncer la proposition suivante dont la démonstration générale n'offre aucune difficulté.

Pour qu'une fonction homogène, de degré p, à n variables, soit la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une fonction linéaire, il faut et il suffit que les hessiens dérivés du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre soient identiquement nuls.

Ainsi, u étant la fonction, on devra avoir identiquement

$$\begin{vmatrix} u_{rs} & u_{r_1 s} \\ u_{rs_1} & u_{r_1 s_1} \end{vmatrix} = 0$$

pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ des indices r, r_1, s, s_1.