JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les deux formes quadratiques $x^2+y^2+z^2+2t^2, x^2+2\left(y^2+z^2+t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 225-230.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__225_0>

SUR LES

DEUX FORMES QUADRATIQUES

$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$, $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Soit n un nombre entier donné quelconque. Désignons par $A(n)$ le nombre des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2,$$

c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2,$$

où les entiers x, y, z, t peuvent être indifféremment positifs, nuls ou négatifs, deux solutions étant regardées comme différentes quand x, y, z, t n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs. Désignons de même par $B(n)$ le nombre des représentations de n par la forme

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2).$$

Il s'agit de donner des règles simples pour trouver à priori $A(n)$ et $B(n)$. On s'occupe à la fois des deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

et

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2),$$

parce qu'elles ont entre elles une liaison intime.

2. Comme n peut être pair ou impair, nous poserons généralement

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant un entier impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. Il faudra avoir égard aux diverses valeurs de α, et aussi à la forme linéaire de m (mod. 8), en distinguant deux cas suivant que l'on a

$$m = 8k \pm 1$$

ou

$$m = 8k \pm 3.$$

Le calcul de $A(n)$ et de $B(n)$ exigera en outre celui d'une certaine fonction numérique de m, que nous allons définir.

Soit d un quelconque des diviseurs de m (dont 1 et m font toujours partie), et désignons par δ le diviseur conjugué à d, en sorte que

$$m = d\delta.$$

La fonction numérique dont nous voulons parler s'exprimera par

$$\sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d,$$

le signe sommatoire portant sur tous les groupes d, δ. On pourrait encore l'écrire

$$\sum \left(\frac{2}{\delta}\right) d,$$

en employant le signe

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

de Legendre avec la signification plus étendue que lui a donnée Jacobi.

Pour abréger nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d$$

par la simple lettre S. On voit que quand

$$m = 8k \pm 1,$$

S est l'excès de la somme des diviseurs de m qui sont de la forme $8k \pm 1$ sur celle des diviseurs de m qui sont de la forme $8k \pm 3$. Au contraire, quand

$$m = 8k \pm 3,$$

S est l'excès de la somme des diviseurs de m de la forme $8k \pm 3$ sur celle des diviseurs de m de la forme $8k \pm 1$. Pour $m = 1, 3, 5, 7, 9$, etc., on a successivement $S = 1, 2, 4, 8, 7$, etc.

3. Ceci expliqué, je dirai d'abord que l'on a, suivant la nature du nombre impair m,

$$A(m) = 6\,S, \quad B(m) = 2\,S,$$

quand

$$m = 8k \pm 1;$$

mais

$$A(m) = 10\,S, \quad B(m) = 6\,S,$$

quand

$$m = 8k \pm 3.$$

De ces quatre équations deux seulement ont dû être tirées de mes *formules générales;* car on prouve aisément à priori que

$$A(8k \pm 1) = 3B(8k \pm 1)$$

et

$$3A(8k \pm 3) = 5B(8k \pm 3).$$

Des raisonnements arithmétiques très-simples donnent aussi les valeurs de $A(2m)$, $A(4m)$, etc., en partant des valeurs de $A(m)$, $B(m)$. On arrive de cette manière aux formules ci-après :

$$A(2^\alpha m) = 2(2^{\alpha+2} - 1)\,S$$

pour $m = 8k \pm 1$, et

$$A(2^\alpha m) = 2(2^{\alpha+2} + 1)\,S$$

pour $m = 8k \pm 3$. Ces formules subsistent même pour $\alpha = 0$, et on les réunirait en une seule en écrivant

$$A(2^\alpha m) = 2\left[2^{\alpha+2} - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right] S.$$

La valeur de $A(n)$ est donc connue quel que soit n; et celle de $B(n)$ pour n pair s'en conclut, car on a

$$B(2^\alpha n) = A(2^{\alpha-1} n),$$

à partir de $\alpha = 1$.

4. Appliquons nos formules aux cas les plus simples. Elles nous donnent d'abord

$$A(1) = 6, \quad B(1) = 2;$$

or ce résultat est confirmé par les équations canoniques

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2$$

et

$$1 = (\pm 1)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2),$$

dans la première desquelles $(\pm 1)^2$ peut être reporté à la seconde et à la troisième place.

Je trouve ensuite

$$A(3) = 20, \quad B(3) = 12,$$

ce qui est confirmé par les équations

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2,$$
$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.(\pm 1)^2,$$

et

$$3 = (\pm 1)^2 + 2[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2),$$

en y faisant les permutations convenables.

Soit en dernier lieu, $n = 2$. Il vient

$$A(2) = 14, \quad B(2) = 6,$$

ce qui résulte en effet des équations

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2,$$

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2,$$

et

$$2 = 0^2 + 2[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2].$$

5. En m'occupant des équations

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

et

$$n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2),$$

j'ai considéré à la fois les solutions propres (où x, y, z, t n'ont pour facteur commun que l'unité) et les solutions impropres (où x, y, z, t sont divisibles par un même nombre > 1). On pourrait demander seulement le nombre des solutions propres ; mais je ne m'arrêterai pas à cette question nouvelle qui n'offre aucune difficulté.

6. En terminant j'indiquerai celles de nos *formules générales* dont nous nous sommes servis pour obtenir les résultats qui précèdent. C'est d'abord la formule (F) de notre troisième article (cahier de juin 1858, p. 208) : il faut y faire

$$f(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{4}\right).$$

C'est ensuite la formule (I) de notre cinquième article (cahier d'août, page 277) où l'on prendra pour $f(x)$ la même valeur. On devra se rappeler les propriétés de la fonction $\rho(m)$ qui marque l'excès du nombre des diviseurs de m de la forme $4g + 1$ sur celui des diviseurs de la forme $4g + 3$: on sait quel rôle joue la fonction $\rho(m)$ relativement à la décomposition des nombres en deux carrés, c'est-à-dire relativement à la forme quadratique $x^2 + y^2$. Mais il faudra de plus considérer la fonction $\xi(m)$ qui joue un rôle analogue pour la forme $x^2 + 2y^2$, et qui exprime l'excès du nombre des diviseurs de m de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k + 3$ sur celui des diviseurs $8k + 5$,

$8k+7$. En faisant comme plus haut $m = d\delta$, on a

$$\xi(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

En général on doit attacher un grand prix aux fonctions numériques suivantes qui sont décomposables en facteurs et qui se présentent sans cesse dans nos recherches :

$$\zeta_\mu(m) = \sum d^\mu, \qquad \xi_\mu(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta^2-1}{8}} d^\mu,$$

$$\rho_\mu(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^\mu, \quad \omega_\mu(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d^\mu.$$

Je continue à supposer m impair. On voit que la quantité désignée ci-dessus par S est précisément $\omega_1(m)$. Au reste nos quatre fonctions sont comprises dans celle-ci :

$$\sum \left(\frac{a}{\delta}\right) d^\mu,$$

où a est un entier donné, et que nous aurons aussi à employer dans toute sa généralité.