JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 324-328.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__324_0>

SUR LA FORME $X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre N des représentations d'un entier donné n par la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2,$$

c'est-à-dire du nombre N des solutions de l'équation

$$n = X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2,$$

où X, Y, Z, T sont des entiers à volonté positifs, nuls ou négatifs. Cette question se rattache évidemment à celle que nous avons traitée dans le cahier de juillet en considérant l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

Le nombre $A(n)$ des solutions de cette dernière équation se compose en effet de deux parties $A_1(n)$, $A_2(n)$, la première relative aux valeurs impaires de t, la seconde aux valeurs paires; et il est clair que N n'est autre chose que $A_2(n)$.

Comme n peut être indifféremment pair ou impair, je ferai

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro; puis désignant par d un diviseur quelconque de m et par δ le diviseur conjugué en sorte que $m = d\delta$, je poserai, comme dans le cahier de juillet et en me servant d'une notation bien connue de Legendre et de Jacobi :

$$\sum\left(\frac{2}{\delta}\right)d = \mathrm{S}.$$

Cette somme S joue un rôle important dans nos formules. On sait d'ailleurs que

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) = (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. On aura

$$\mathrm{N} = 6\,\mathrm{S},$$

si n est de la forme $8k+1$ ou de la forme $8k-3$; mais

$$\mathrm{N} = 4\,\mathrm{S},$$

si n est de la forme $8k+3$; enfin

$$\mathrm{N} = 0,$$

si n est de la forme $8k-1$.

Soit, en second lieu, n impairement pair, $n = 2m$. On aura dans ce cas

$$\mathrm{N} = 12\,\mathrm{S},$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Soit, en dernier lieu, n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. On aura

$$\mathrm{N} = 2(2^\alpha - 1)\,\mathrm{S},$$

si $m = 8k \pm 1$; mais

$$\mathrm{N} = 2(2^\alpha + 1)\,\mathrm{S},$$

si $m = 8k \pm 3$.

3. La somme S s'exprime aussi par un produit au moyen des facteurs premiers dont m se compose Soit p un de ces facteurs et μ son exposant dans m, de façon qu'on puisse écrire

$$m = \prod (p^\mu).$$

On aura

$$S = \prod \left[p^{\mu} + \left(\frac{2}{p}\right) p^{\mu-1} + p^{\mu-2} + \left(\frac{2}{p}\right) p^{\mu-3} + \ldots\right],$$

les exposants de p allant en décroissant jusqu'à zéro, et les coefficients étant alternativement 1 et $\left(\frac{2}{p}\right)$. Cette nouvelle manière d'exprimer S a ses avantages.

4. Nous venons de déterminer pour tout entier n le nombre total N des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$n = X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2.$$

On pourrait aussi demander le nombre M des solutions *propres*, pour lesquelles l'unité seule divise à la fois les entiers X, Y, Z, T. Il faut alors substituer à la fonction S une autre fonction R que je définirai en écrivant

$$R = \prod \left[p^{\mu} + \left(\frac{2}{p}\right) p^{\mu-1}\right].$$

Cela posé, si n est impair, $n = m$, on a

$$M = 6R,$$

quand n est de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k - 3$; mais

$$M = 4R,$$

quand n est de la forme $8k + 3$; enfin

$$M = 0,$$

quand n est de la forme $8k - 1$.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$M = 12R,$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Le cas de n pairement pair se décompose en trois autres suivant que l'on a $n = 4m$, ou $n = 8m$, ou enfin $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$.

Pour $n = 4m$, je trouve

$$M = 6R,$$

quand m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k + 3$; mais

$$M = 4R,$$

quand m est de la forme $8k - 3$; enfin

$$M = 0,$$

quand m est de la forme $8k + 1$.

Pour $n = 8m$, il vient

$$M = 2R,$$

si $m = 8k \pm 1$; mais

$$M = 6R,$$

si $m = 8k \pm 3$.

Pour $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on n'a qu'une seule formule :

$$M = 2^{\alpha-1}.3R.$$

5. Ajoutons deux exemples. Soit d'abord

$$n = 125 = 5^3,$$

en sorte qu'il s'agisse d'un nombre impair de la forme $8k - 3$. Il viendra

$$S = 5^3 - 5^2 + 5 - 1 = 104$$

et

$$R = 5^3 - 5^2 = 100;$$

par suite

$$N = 6.104 = 624$$

et

$$M = 6.100 = 600.$$

Soit, en second lieu,

$$n = 252 = 2^2.3^2.7,$$

ce qui suppose

$$\alpha = 2, \quad m = 3^2.7,$$

partant

$$S = (3^2 - 3 + 1)(7 + 1) = 56$$

et

$$R = (3^2 - 3)(7 + 1) = 48.$$

On aura, m étant de la forme $8k - 1$,

$$N = 2(2^2 - 1).56 = 336$$

et

$$M = 6.48 = 288.$$