JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MATHET

Sur les fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 329-365.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__329_0>

SUR

LES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. MATHET.

I.

Parmi les propriétés des fonctions circulaires et exponentielles, il en est qui appartiennent aussi aux fonctions doublement périodiques dont les premières ne sont que des cas particuliers. C'est ainsi que l'équation

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{F}(x+y)}{\mathfrak{F}(x-y)} = \frac{F(x)f(y)+F(y)f(x)}{F(x)f(y)-F(y)f(x)},$$

dans laquelle x et y représentent deux variables indépendantes, est vérifiée quand $\frac{F(x)}{f(x)} = \tang x$, et l'est encore si $\frac{F(x)}{f(x)}$ est une fonction elliptique. De même l'équation

$$(2) \qquad \mathfrak{F}(x+y) = \frac{F'(x)f(y)+F(x)f'(y)}{1-K^2F(x)^2f(y)^2},$$

dans laquelle K représente une constante quelconque, est vérifiée si $F(x) = \tang x$ et $f(y) = \frac{1}{K}\cot y$, et l'est encore si $F(x)$ et $f(y)$ sont des fonctions elliptiques convenablement déterminées. Soit enfin l'équation

$$(3) \qquad \mathfrak{F}(x+y) = \frac{F(x)f(y)-F(y)f(x)}{F_1(x)f_1(y)-F_1(y)f_1(x)}.$$

Il est facile de montrer que si

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \sin(x+p) \quad \text{et} \quad \frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \sin(x+q),$$

p et q étant des constantes quelconques, on peut toujours déterminer $f(x)$ et $f_1(x)$ de telle sorte que cette équation soit vérifiée; on verra plus loin qu'il en est de même si $\frac{F(x)}{f(x)}$ et $\frac{F_1(y)}{f_1(y)}$ sont des fonctions elliptiques aux mêmes périodes.

On est alors conduit à se demander si ces fonctions doublement périodiques sont les solutions les plus générales des équations posées ci-dessus, ou si elles-mêmes ne sont que des cas particuliers de ces solutions. Telle est la question que je me propose d'examiner. Je déterminerai d'abord les fonctions qui peuvent vérifier l'équation

$$\mathfrak{F}(x+y) = \frac{F_1(x)f_2(y) + F_2(x)f_1(y)}{F_3(x)f_4(y) + F_4(x)f_3(y)},$$

dont les équations (2) et (3) ne sont que des cas particuliers, et je résoudrai ensuite la même question pour l'équation

$$\frac{\mathfrak{F}(x+y)}{\mathfrak{F}_1(x-y)} = \frac{F(x)f_1(y) + f(x)F_1(y)}{F(x)f_1(y) - f(x)F_1(y)},$$

qui renferme également l'équation (1).

II.

Soit l'équation

$$(1) \qquad \mathfrak{F}(x+y) = \frac{F_1(x)f_2(y) + F_2(x)f_1(y)}{F_3(x)f_4(y) + F_4(x)f_3(y)}.$$

Si l'on pose

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \varphi(x), \quad \frac{f_1(y)}{f_2(y)} = \psi(y), \quad \frac{F_3(x)}{F_4(x)} = \varphi_1(x),$$

$$\frac{f_3(y)}{f_4(y)} = \psi_1(y), \quad \frac{F_2(x)}{F_4(x)} = \mathfrak{F}_1(x), \quad \frac{f_2(y)}{f_4(y)} = \mathfrak{F}_2(y),$$

l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \mathfrak{F}(x+y) = \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{\varphi_1(x) + \psi_1(y)}\mathfrak{F}_1(x)\mathfrak{F}_2(y).$$

Prenons les logarithmes des deux membres, différentions par rapport à x, et ensuite par rapport à y, et posons

$$\mathrm{F}(x+y)=\frac{d^2\mathrm{L}\,\mathfrak{F}(x+y)}{dx\,dy};$$

il vient

$$(3)\qquad \frac{\varphi'_1(x)\psi'_1(y)}{[\varphi_1(x)+\psi_1(y)]^2}-\frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2}=\mathrm{F}(x+y).$$

Soit $u=\dfrac{\varphi'\psi'}{(\varphi+\psi)^2}$; on trouve en différentiant

$$\frac{du}{dx}=\frac{\psi'}{\varphi+\psi}\left(\frac{\varphi''}{\varphi+\psi}-2\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right),$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{\varphi'}{\varphi+\psi}\left(\frac{\psi''}{\varphi+\psi}-2\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right),$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\left[\frac{\varphi''}{\varphi+\psi}-2\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right]\left[\frac{\psi''}{\varphi+\psi}-2\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right]+2\frac{\varphi'^2\psi'^2}{(\varphi+\psi)^4};$$

d'où

$$(4)\qquad u\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+2u^3.$$

L'équation (4) est évidemment vérifiée par la fonction

$$u_1=\frac{\varphi'_1\psi'_1}{(\varphi_1+\psi_1)^2},$$

mais, en vertu de l'équation (3),

$$u_1=\mathrm{F}+u;$$

on peut donc remplacer, dans l'équation (4), u par $\mathrm{F}+u$. Si l'on élimine ensuite, par des différentiations, la fonction F et ses dérivées, il restera une équation aux différences partielles de u, qui déterminera cette fonction. Les calculs qui vont suivre auront pour objet de former, non pas précisément cette équation, mais un système d'équations équivalent, dont la discussion nous fournira la solution de la question.

Posons

$$\frac{du}{dx} - \frac{du}{dy} = f.$$

Si l'on différentie l'équation (4) par rapport à x et par rapport à y, et si l'on retranche l'un de l'autre les deux résultats, on a

$$(5) \qquad u\frac{d^2 f}{dx\,dy} + f\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{du}{dx}\frac{df}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{df}{dx} + 6u^2 f.$$

Posons encore

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} = v.$$

Si l'on différentie l'équation (5) par rapport à x et par rapport à y, et si l'on ajoute les deux résultats, on a

$$\begin{aligned} & u\frac{d^2 v}{dx\,dy} + \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\frac{d^2 f}{dx\,dy} + v\frac{d^2 u}{dx\,dy} + f\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy} + \frac{d^3 u}{dx\,dy^2}\right) \\ = & \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)\frac{df}{dy} + \left(\frac{d^2 u}{dx\,dy} + \frac{d^2 u}{dy^2}\right)\frac{df}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} + 6u^2 v \\ & + 12uf\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\right). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)\frac{df}{dy} + \left(\frac{d^2 u}{dx\,dy} + \frac{d^2 u}{dy^2}\right)\frac{df}{dx} \\ = & \left(\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)\frac{df}{dy} - \left(\frac{d^2 u}{dx\,dy} - \frac{d^2 u}{dy^2}\right)\frac{df}{dx} + 2\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\right)\frac{d^2 u}{dx\,dy} \\ = & \frac{df}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{df}{dx} + 2v\frac{d^2 u}{dx\,dy} = 2v\frac{d^2 u}{dx\,dy}. \end{aligned}$$

Donc

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} & u\frac{d^2 v}{dx\,dy} - v\frac{d^2 u}{dx\,dy} + \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\frac{d^2 f}{dx\,dy} + f\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy} + \frac{d^3 u}{dx\,dy^2}\right) \\ & \qquad = \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} + 6u^2 v + 12uf\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\right). \end{aligned} \right.$$

Mais si l'on différentie l'équation (4) par rapport à x et par rapport à y, et si l'on ajoute les deux résultats, on a

$$u\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}+\frac{d^3 u}{dx\,dy^2}\right)+\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2 u}{dx\,dy}$$
$$=\frac{du}{dx}\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}+\frac{d^2 u}{d^2 y}\right)+\frac{du}{dy}\left(\frac{d^2 u}{dx^2}+\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)+6u^2\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right),$$

d'où

$$u\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}+\frac{d^3 u}{dx\,dy^2}\right)=\frac{du}{dy}\frac{df}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{df}{dy}+\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2 u}{dx\,dy}+6u^2\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right),$$

et, par conséquent, en multipliant l'équation (a) par u, et y substituant à la place de $u\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}+\frac{d^3 u}{dx\,dy^2}\right)$ l'expression que l'on vient de trouver, et à la place de $u\frac{d^2 f}{dx\,dy}$ la valeur fournie par l'équation (5), on a

$$(b)\left\{\begin{aligned}&u^2\frac{d^2 v}{dx\,dy}-uv\frac{d^2 u}{dx\,dy}+\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\left[\frac{du}{dx}\frac{df}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{df}{dx}-f\frac{d^2 u}{dx\,dy}+6u^2 f\right]\\&\qquad+f\left[\frac{du}{dy}\frac{df}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{df}{dy}+\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2 u}{dx\,dy}+6u^2\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\right]\\&\qquad=u\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)+6u^3 v+12u^2 f\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right).\end{aligned}\right.$$

Mais on a, en se rappelant que $f=\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}$,

$$\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\frac{df}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{df}{dx}\right)+f\left(\frac{du}{dy}\frac{df}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{df}{dy}\right)$$
$$=\frac{df}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}-\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\right]$$
$$+\frac{df}{dx}\left[\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}-\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right].$$

L'équation (b) devient donc

$$u^2\frac{d^2 v}{dx\,dy}-uv\frac{d^2 u}{dx\,dy}+2v\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}=u\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)+6u^3 v.$$

Or l'équation (4) nous donne

$$\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} = u\frac{d^2 u}{dx\,dy} - 2u^3;$$

si l'on fait cette substitution dans l'équation précédente et si l'on divise tous les termes par u, il vient

$$(6)\qquad u\frac{d^2 v}{dx\,dy} + v\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} + 10u^2 v,$$

équation de même forme que l'équation (5).

Chacune des équations (5) et (6) va maintenant nous fournir une relation entre F, F′ et la fonction u et ses dérivées. Considérons d'abord l'équation (5). Si on la différentie par rapport à x et par rapport à y, et si l'on retranche l'un de l'autre les deux résultats, on a

$$\begin{aligned} &u\left(\frac{d^3 f}{dx^2 dy} - \frac{d^3 f}{dx\,dy^2}\right) + 2f\frac{d^2 f}{dx\,dy} + \left(\frac{df}{dx} - \frac{df}{dy}\right)\frac{d^2 u}{dx\,dy} \\ &= \frac{du}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy} - \frac{d^2 f}{dy^2}\right) + \frac{du}{dy}\left(\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) + 2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy} + 6u^2\left(\frac{df}{dx} - \frac{df}{dy}\right) \\ &+ 12uf^2. \end{aligned}$$

Multiplions tous les termes de cette équation par f, et, dans le premier membre, mettons à la place de $f\dfrac{d^2 u}{dx\,dy}$ sa valeur prise dans l'équation (5); il vient

$$\begin{aligned} &uf\left(\frac{d^3 f}{dx^2 dy} - \frac{d^3 f}{dx\,dy^2}\right) \\ &+ 2f^2\frac{d^2 f}{dx\,dy} + \left(\frac{df}{dx} - \frac{df}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\frac{df}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{df}{dx} + 6u^2 f - u\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) \\ &= f\frac{du}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy} - \frac{d^2 f}{dy^2}\right) + f\frac{du}{dy}\left(\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) + 2f\frac{df}{dx}\frac{df}{dy} \\ &+ 6u^2 f\left(\frac{df}{dx} - \frac{df}{dy}\right) + 12uf^3. \end{aligned}$$

On peut simplifier cette équation en se rappelant que $f = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{du}{dy}$;

elle devient alors

$$uf\left(\frac{d^3f}{dx^2dy}-\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\right)-u\left(\frac{df}{dx}-\frac{df}{dy}\right)\frac{d^2f}{dx\,dy}$$
$$=f\frac{du}{dy}\frac{d^2f}{dx^2}-f\frac{du}{dx}\frac{d^2f}{dy^2}-f\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2f}{dx\,dy}+\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}$$
$$-\frac{du}{dy}\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\frac{du}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)^2+12uf^3,$$

ou bien

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&u\left[f\left(\frac{d^3f}{dx^2dy}-\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\right)-\left(\frac{df}{dx}-\frac{df}{dy}\right)\frac{d^2f}{dx\,dy}-12f^3\right]\\&\quad=\frac{du}{dy}\left[f\left(\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)-\frac{df}{dx}\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\right)\right]\\&\quad-\frac{du}{dx}\left[f\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}+\frac{d^2f}{dy^2}\right)-\frac{df}{dy}\left(\frac{df}{dy}+\frac{df}{dx}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

L'équation (7), déduite de l'équation (4), est évidemment vérifiée si, à la place de u, on met u_1 ou $F+u$ qui lui est égale en vertu de l'équation (3). Or f_1 ou $\frac{du_1}{dx}-\frac{du_1}{dy}$ est égale à f ou $\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}$, en vertu de cette même équation (3); donc si l'on fait cette substitution, il vient, en tenant compte de l'équation (7),

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&F\left[f\left(\frac{d^3f}{dx^2dy}-\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\right)-\left(\frac{df}{dx}-\frac{df}{dy}\right)\frac{d^2f}{dx\,dy}-12f^3\right]\\&=F'\left[f\left(\frac{d^2f}{dx^2}-\frac{d^2f}{dy^2}\right)-\left(\frac{df}{dx}-\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

De l'équation (6) nous pouvons, par un calcul analogue, tirer une équation de même forme. Différentions l'équation (6) par rapport à x et par rapport à y, et retranchons l'un de l'autre les deux résultats; il vient

$$u\left(\frac{d^3v}{dx^2dy}-\frac{d^3v}{dx\,dy^2}\right)+f\frac{d^2v}{dx\,dy}+\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)\frac{d^2u}{dx\,dy}+v\frac{d^2f}{dx\,dy}$$
$$=\frac{df}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{df}{dy}\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}-\frac{d^2v}{dy^2}\right)+\frac{du}{dy}\left(\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{d^2v}{dx\,dy}\right)+20uvf$$
$$+10u^2\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right).$$

Je multiplie tous les termes par v, et je substitue à $10u^2 v$ sa valeur prise dans l'équation (6); il vient

$$uv\left(\frac{d^3 v}{dx^2 dy}-\frac{d^3 v}{dx\,dy^2}\right)+vf\frac{d^2 v}{dx\,dy}+\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)v\frac{d^2 u}{dx\,dy}+v^2\frac{d^2 f}{dx\,dy}$$
$$=v\frac{df}{dx}\frac{dv}{dy}+v\frac{df}{dy}\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dy}\frac{d^2 v}{dx^2}-v\frac{du}{dx}\frac{d^2 v}{dy^2}+vf\frac{d^2 v}{dx\,dy}+20uv^2 f$$
$$+\left[u\frac{d^2 v}{dx\,dy}+v\frac{d^2 u}{dx\,dy}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right]\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right).$$

Les termes $vf\frac{d^2 v}{dx\,dy}$ et $v\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)\frac{d^2 u}{dx\,dy}$, disparaissent dans les deux membres, et il reste

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &u\left[v\left(\frac{d^3 v}{dx^2 dy}-\frac{d^3 v}{dx\,dy^2}\right)-\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)\frac{d^2 v}{dx\,dy}-20v^2 f\right]\\ &=\frac{du}{dy}\left[v\frac{d^2 v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)\right]-\frac{du}{dx}\left[v\frac{d^2 v}{dy^2}-\frac{dv}{dy}\left(\frac{dv}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)\right]\\ &-v^2\frac{d^2 f}{dx\,dy}+v\left(\frac{df}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{df}{dy}\frac{dv}{dx}\right).\end{aligned}\right.$$

Cette équation est vérifiée quand on y remplace u par u_1 ou par $F+u$ qui lui est égale en vertu de l'équation (3). D'ailleurs f_1 ou $\frac{du_1}{dx}-\frac{du_1}{dy}$ étant égale à f ou $\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}$, il en résulte que v_1 ou $\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dy}$ est égale à v ou $\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}$. On a donc, en faisant cette substitution, et tenant compte de l'équation (9),

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &F\left[v\left(\frac{d^3 v}{dx^2 dy}-\frac{d^3 v}{dx\,dy^2}\right)-\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)\frac{d^2 v}{dx\,dy}-20v^2 f\right]\\ &=F'\left[v\left(\frac{d^2 v}{dx^2}-\frac{d^2 v}{dy^2}\right)-\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

équation analogue à l'équation (8).

Les deux équations (8) et (10) que nous venons d'obtenir, si nous les divisons membre à membre, nous fournissent une équation aux différences partielles, qui détermine la fonction u. Mais cette équation est d'une forme trop compliquée pour que l'on puisse déterminer son intégrale générale, nous la remplacerons donc par le système des équations (8) et (10) qui lui est équivalent, et nous discuterons ces deux équations après leur avoir donné une forme plus simple, au moyen des transformations qui vont suivre.

III.

Si dans l'équation (8) on remplace le coefficient de F par sa valeur prise dans l'équation (7), il vient

$$\mathrm{F}\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dy}\left[f\left(\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)-\frac{df}{dx}\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\right)\right]\\&-\frac{du}{dx}\left[f\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}+\frac{d^2f}{dy^2}\right)-\frac{df}{dy}\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\right)\right]\end{aligned}\right\}$$
$$=\mathrm{F}'u\left[f\left(\frac{d^2f}{dx^2}-\frac{d^2f}{dy^2}\right)-\left(\frac{df}{dx}-\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\right)\right].$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{f}\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\right)=w,$$

cette équation se réduit à

$$(11)\qquad \mathrm{F}\left(\frac{du}{dy}\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dw}{dy}\right)=\mathrm{F}'u\left(\frac{dw}{dx}-\frac{dw}{dy}\right).$$

De même, si dans l'équation (10) on substitue au coefficient de F sa valeur prise dans l'équation (9), on a

$$\mathrm{F}\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dy}\left[v\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)\right]-\frac{du}{dx}\left[v\frac{d^2v}{dy^2}-\frac{dv}{dy}\left(\frac{dv}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)\right]\\&\qquad-v^2\frac{d^2f}{dx\,dy}+v\left(\frac{df}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{df}{dy}\frac{dv}{dx}\right)\end{aligned}\right\}$$
$$=\mathrm{F}'u\left[v\left(\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{d^2v}{dy^2}\right)-\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\right].$$

Mais $v=wf$, d'où, en différentiant,

$$\frac{dv}{dx}=f\frac{dw}{dx}+w\frac{df}{dx},\quad \frac{d^2v}{dx^2}=f\frac{d^2w}{dx^2}+2\frac{dw}{dx}\frac{df}{dx}+w\frac{d^2f}{dx^2}.$$

Donc

$$v\frac{d^2v}{dx^2}-\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=f^2\left[w\frac{d^2w}{dx^2}-\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]+w^2\left[f\frac{d^2f}{dx^2}-\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right],$$

et de même

$$v\frac{d^2v}{dy^2}-\left(\frac{dv}{dy}\right)^2=f^2\left[w\frac{d^2w}{dy^2}-\left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right]+w^2\left[f\frac{d^2f}{dy^2}-\left(\frac{df}{dy}\right)^2\right].$$

On a aussi

$$\begin{aligned}&\left(\frac{du}{dy}-\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}-v^2\frac{d^2f}{dx\,dy}+v\left(\frac{df}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{df}{dy}\frac{dv}{dx}\right)\\
&=-w^2f\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}-wf^2\frac{df}{dx}\frac{dw}{dy}-wf^2\frac{df}{dy}\frac{dw}{dx}-f^3\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\\
&\quad-w^2f^2\frac{d^2f}{dx\,dy}+2w^2f\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}+wf^2\frac{df}{dy}\frac{dw}{dx}+wf^2\frac{df}{dx}\frac{dw}{dy}\\
&=-w^2\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)\left(f\frac{d^2f}{dx\,dy}-\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\right)-f^2\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}.\end{aligned}$$

L'équation trouvée ci-dessus devient donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dy}\left\{\begin{aligned}&f^2\left[w\frac{d^2w}{dx^2}-\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\right]\\&+w^2\left[f\frac{d^2f}{dx^2}-\left(\frac{df}{dx}\right)^2+f\frac{d^2f}{dx\,dy}-\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\right]\end{aligned}\right\}\\
&-\frac{du}{dx}\left\{\begin{aligned}&f^2\left[w\frac{d^2w}{dy^2}-\left(\frac{dw}{dy}\right)^2+\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\right]\\&+w^2\left[f\frac{d^2f}{dy^2}-\left(\frac{df}{dy}\right)^2+f\frac{d^2f}{dx\,dy}-\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\right]\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\\
&=\mathrm{F}'u\left\{\begin{aligned}&f^2\left[w\left(\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d^2w}{dy^2}\right)-\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right]\\&+w^2\left[f\left(\frac{d^2f}{dx^2}-\frac{d^2f}{dy^2}\right)-\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]\end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

équation qui, en vertu de l'équation (11), se réduit à

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &F\left\{\frac{du}{dy}\left[w\frac{d^2w}{dx^2}-\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\right]-\frac{du}{dx}\left[w\frac{d^2w}{dy^2}-\left(\frac{dw}{dy}\right)^2+\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\right]\right\}\\ &=F'u\left[w\left(\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d^2w}{dy^2}\right)-\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right].\end{aligned}\right.$$

Soit maintenant

$$\frac{1}{w}=z,$$

l'équation (11) devient

$$(13)\qquad F\left(\frac{du}{dy}\frac{dz}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dz}{dy}\right)=F'u\left(\frac{dz}{dx}-\frac{dz}{dy}\right).$$

Mais de

$$\frac{1}{w}=z$$

on tire

$$-\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dx}=\frac{dz}{dx}\quad \text{et}\quad -\frac{1}{w^2}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{2}{w^3}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2=\frac{d^2z}{dx^2},$$

d'où

$$w\frac{d^2v}{dx^2}-\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}=\frac{dw}{dx}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{dw}{dy}\right)-w^3\frac{d^2z}{dx^2}.$$

L'équation (12) devient alors

$$\begin{aligned} &F\left\{\left(\frac{du}{dy}\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{dw}{dx}+\frac{dw}{dy}\right)-w^3\left(\frac{du}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{du}{dx}\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}\\ &=F'u\left[\left(\frac{dw}{dx}+\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{dw}{dx}-\frac{dw}{dy}\right)-w^3\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right],\end{aligned}$$

équation qui, en vertu de l'équation (11), se réduit à

$$(14)\qquad F\left(\frac{du}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{du}{dx}\frac{d^2z}{dy^2}\right)=F'u\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Enfin nous poserons $\frac{u}{F}=t$, et les équations (13) et (14) deviendront alors

$$\frac{dt}{dx}\frac{dz}{dy} - \frac{dt}{dy}\frac{dz}{dx} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{dt}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{dt}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} = 0. \tag{16}$$

Nous allons maintenant discuter ces deux équations, et nous verrons que, parmi les diverses solutions qu'elles peuvent admettre, il n'en est que deux qui conviennent à la question, savoir : $t =$ constante ou $z =$ constante.

IV.

Considérons d'abord l'équation (15)

$$\frac{dt}{dx}\frac{dz}{dy} - \frac{dt}{dy}\frac{dz}{dx} = 0.$$

z peut être considérée comme une fonction de t et de x; alors on doit avoir

$$\frac{dt}{dx}\frac{dz}{dt}\frac{dt}{dy} - \frac{dt}{dy}\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{dy}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Si $\frac{dt}{dy} = 0$, t est indépendante de y; soit

$$t = \varphi(x), \quad \text{ou} \quad u = \varphi(x)\,F(x+y).$$

Il en résulte

$$\frac{du}{dx} = \varphi' F + \varphi F', \quad \frac{du}{dy} = \varphi F', \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = \varphi' F' + \varphi F'';$$

donc, en vertu de l'équation (4),

$$\varphi F(\varphi' F' + \varphi F'') = \varphi\varphi' F F' + \varphi^2 F'^2 + 2\varphi^3 F^3 \quad \text{ou} \quad \frac{F F'' - F'^2}{F^3} = 2\varphi.$$

Pour que φ, fonction de x, soit identique à une fonction de $x+y$, il faut qu'elle se réduise à une constante; donc $t =$ constante.

Si $\frac{dt}{dy}$ n'est pas nulle, il faut que $\frac{dz}{dx}$ le soit, c'est-à-dire que z soit une fonction de t, $z = \varpi(t)$. Cette fonction doit en outre satisfaire à l'équation (16). Or

$$\frac{dz}{dx} = \varpi' \frac{dt}{dx}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \varpi' \frac{d^2 t}{dx^2} + \varpi'' \left(\frac{dt}{dx}\right)^2, \quad \dots.$$

Donc on doit avoir

$$\frac{dt}{dy}\left[\varpi'' \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \varpi' \frac{d^2 t}{dx^2}\right] - \frac{dt}{dx}\left[\varpi'' \left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \varpi' \frac{d^2 t}{dy^2}\right] = 0,$$

ou

$$(17) \qquad \varpi' \left(\frac{dt}{dy}\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{dt}{dx}\frac{d^2 t}{dy^2}\right) + \varpi'' \frac{dt}{dx}\frac{dt}{dy}\left(\frac{dt}{dx} - \frac{dt}{dy}\right) = 0.$$

t étant égale à $\frac{u}{F}$, on a

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{F^2}\left(F\frac{du}{dy} - F' u\right),$$

et

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{1}{F^3}\left(F^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - 2FF' \frac{du}{dx} - FF'' u + 2F'^2 u\right).$$

Donc

$$\frac{dt}{dy}\frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{1}{F^5}\Big[F^3 \frac{du}{dy}\frac{d^2 u}{dx^2} - 2F^2 F' \frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + (2F'^2 - FF'')Fu\frac{du}{dy} - F^2 F' u \frac{d^2 u}{dx^2}$$
$$+ 2FF'^2 u \frac{du}{dx} - (2F'^2 - FF'')F' u^2\Big],$$

et, de même,

$$\frac{dt}{dx}\frac{d^2 t}{dy^2} = \frac{1}{F^5}\Big[F^3 \frac{du}{dx}\frac{d^2 u}{dy^2} - 2F^2 F' \frac{du}{dy}\frac{du}{dx} + (2F'^2 - FF'')Fu\frac{du}{dx} - F^2 F' u \frac{d^2 u}{dy^2}$$
$$+ 2FF'^2 u \frac{du}{dy} - (2F'^2 - FF'')F' u^2\Big].$$

Donc, en retranchant,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dt}{dy}\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{dt}{dx}\frac{d^2t}{dy^2}=\frac{1}{F^3}\Big[F\left(\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dy^2}\right)+F''u\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)\\ -F'u\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dy^2}\right)\Big].\end{aligned}\right.$$

Reprenons l'équation (4)

$$u\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+2u^3.$$

Si on la différentie par rapport à x et par rapport à y, et si l'on retranche l'un de l'autre les deux résultats, on a

$$(19)\qquad u\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}-\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)=\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dy^2}+6u^2\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right).$$

Cette équation devant être vérifiée quand on y remplace u par u_1 ou par $F+u$, on a

$$\begin{aligned}(F+u)\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}-\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)=\left(F'+\frac{du}{dy}\right)\left(F''+\frac{d^2u}{dx^2}\right)-\left(F'+\frac{du}{dx}\right)\left(F''+\frac{d^2u}{dy^2}\right)\\ +6(F+u)^2\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right),\end{aligned}$$

équation qui, en vertu de l'équation (19), se réduit à

$$\begin{aligned}F\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}-\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)=F'\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dy^2}\right)-F''\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)\\ +6F(F+2u)\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right),\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant le coefficient de F dans le premier membre par sa valeur prise dans l'équation (19),

$$\begin{aligned}F\left(\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dy^2}\right)+6u^2F\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)=F'u\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dy^2}\right)-F''u\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)\\ +6Fu(F+2u)\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right).\end{aligned}$$

L'équation (18) se réduit donc à

$$\frac{dt}{dy}\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{dt}{dx}\frac{d^2t}{dy^2}=\frac{6u(F+u)}{F^2}\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\right)=\frac{6u(F+u)}{F}\left(\frac{dt}{dx}-\frac{dt}{dy}\right),$$

et l'équation (17) devient

$$\left(\frac{dt}{dx}-\frac{dt}{dy}\right)\left[\frac{6\varpi' u(F+u)}{F}+\varpi''\frac{dt}{dx}\frac{dt}{dy}\right]=0.$$

Si $\frac{dt}{dx}-\frac{dt}{dy}=0$, t est une fonction de $x+y$, et il en est de même de u, solution déjà mentionnée. Supposons donc qu'on ait

$$(20)\qquad \frac{6\varpi' u(F+u)}{F}+\varpi''\frac{dt}{dx}\frac{dt}{dy}=0.$$

Mais

$$\frac{dt}{dx}\frac{dt}{dy}=\frac{1}{F^4}\left[F^2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}-FF'u\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)+F'^2u^2\right].$$

De plus, l'équation

$$u\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+2u^3,$$

si l'on y remplace u par $F+u$, nous donne

$$F''(F+u)+F\frac{d^2u}{dx\,dy}=F'^2+F'\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)+2F^3+6Fu(F+u),$$

ou, en multipliant tous les termes par u, et remplaçant $u\frac{d^2u}{dx\,dy}$ par $\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+2u^3$,

$$F\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}-F'u\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\right)$$
$$=F'^2u-F''u(F+u)+2F^3u+6Fu^2(F+u)-2Fu^3;$$

donc

$$\frac{dt}{dx}\frac{dt}{dy}=\frac{1}{F^4}[FF'^2u-FF''u(F+u)+2F^4u+6F^2u^2(F+u)$$
$$-2F^2u^3+F'^2u^2],$$

ou

$$\frac{dt}{dx}\frac{dt}{dy} = \frac{1}{F^4} u(F+u)[F'^2 - FF'' + 2F^2(F-u) + 6F^2 u]$$
$$= \frac{u(F+u)}{F^4}[F'^2 - FF'' + 2F^3 + 4F^2 u].$$

Donc l'équation (20) devient

$$\frac{6\varpi' u(F+u)}{F} + \frac{\varpi'' u(F+u)}{F^4}[F'^2 - FF'' + 2F^3 + 4F^2 u] = 0,$$

ou, en divisant par $\frac{u(F+u)}{F}$, et remarquant que $\frac{u}{F} = t$,

$$6\varpi' + \frac{\varpi''}{F^3}(F'^2 - FF'' + 2F^3 + 4F^3 t) = 0.$$

Or ϖ' et ϖ'' sont des fonctions de t, donc il faut que t soit une fonction de F et de ses dérivées, et par conséquent que u soit une fonction de $x+y$, solution déjà obtenue; à moins que ϖ' et ϖ'' ne soient identiquement nulles, auquel cas ϖ est une constante.

Donc, pour que l'équation (3) soit vérifiée, c'est-à-dire pour que $u_1 - u = F(x+y)$, il faut, ou que u et u_1 soient des fonctions de $x+y$, ou que $z = \dfrac{\frac{du}{dx} - \frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2}}$ soit égale à une constante, ainsi que la fonction analogue z_1.

Il nous reste à voir si ces conditions sont suffisantes, c'est-à-dire si les fonctions φ, ψ, φ_1 et ψ_1 qu'elles déterminent, satisfont toujours à l'équation (3); après quoi nous aurons encore à voir si elles satisfont à l'équation (2) et par conséquent à l'équation (1).

V.

Si $u = \frac{\varphi'\psi'}{(\varphi+\psi)^2}$ est une fonction de $x+y$, on doit avoir

$$\frac{du}{dx} - \frac{du}{dy} = 0,$$

ou

$$\frac{\psi'}{\varphi+\psi}\left(\frac{\varphi''}{\varphi+\psi} - 2\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right) - \frac{\varphi'}{\varphi+\psi}\left(\frac{\psi''}{\varphi+\psi} - 2\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{\psi''}{\psi'} - 2\,\frac{\varphi' - \psi'}{\varphi + \psi} = 0.$$

Posons

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = 2\varpi(x), \quad \frac{\psi''}{\psi'} = 2\theta(y);$$

on aura

$$\varphi' - \psi' = (\varpi - \theta)(\varphi + \psi).$$

D'où, en différentiant par rapport à x, puis par rapport à y,

$$\varphi'' = \varpi'(\varphi + \psi) + (\varpi - \theta)\varphi', \quad 0 = \varpi'\psi' - \theta'\varphi', \quad \frac{\varpi'}{\varphi'} = \frac{\theta'}{\psi'}.$$

Pour que ces deux fonctions, dont l'une ne dépend que de x et l'autre ne dépend que de y, soient égales, il faut que chacune d'elles soit égale à une constante A. De $\frac{\varpi'}{\varphi'} = A$ on tire $\varpi = A\varphi + B$, ou $\varphi'' = 2A\varphi\varphi' + 2B\varphi'$; d'où

$$\varphi' = A\varphi^2 + 2B\varphi + C;$$

on aura de même

$$\psi' = A\psi^2 + 2B_1\psi + C_1.$$

Pour que ces valeurs vérifient l'équation

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{\psi''}{\psi'} - 2\,\frac{\varphi' - \psi'}{\varphi + \psi} = 0,$$

il faut que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned}(2A\varphi + 2B)(\varphi + \psi) &- 2A\varphi^2 - 4B\varphi - 2C\\ = (2A\psi + 2B_1)(\varphi + \psi) &- 2A\psi^2 - 4B_1\psi - 2C_1,\end{aligned}$$

ou

$$2B\psi - 2B\varphi - 2C = 2B_1\varphi - 2B_1\psi - 2C_1,$$

ce qui exige que

$$B + B_1 = 0, \quad \text{et} \quad C = C_1.$$

Donc

$$\varphi' = A\varphi^2 + 2B\varphi + C, \quad \psi' = A\psi^2 - 2B\psi + C.$$

Désignons par a_0 et a_1 les deux racines de l'équation

$$A\varphi^2 + 2B\varphi + C = 0;$$

celles de l'équation

$$A\psi^2 - 2B\psi + C = 0$$

seront $-a_0$ et $-a_1$. On aura

$$\frac{\varphi'}{A(\varphi - a_0)(\varphi - a_1)} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A(a_0 - a_1)}\left[\frac{\varphi'}{\varphi - a_0} - \frac{\varphi'}{\varphi - a_1}\right] = 1,$$

d'où

$$\frac{1}{A(a_0 - a_1)} L\frac{\varphi - a_0}{\varphi - a_1} = x + p,$$

p étant une constante arbitraire.

Soit $A(a_0 - a_1) = 2m$, il vient

$$\frac{\varphi - a_0}{\varphi - a_1} = e^{2m(x+p)}, \quad \varphi = \frac{a_1 e^{m(x+p)} - a_0 e^{-m(x+p)}}{e^{m(x+p)} - e^{-m(x+p)}}.$$

On aura de même

$$\psi = \frac{a_1 e^{-m(y+q)} - a_0 e^{m(y+q)}}{e^{m(y+q)} - e^{-m(y+q)}},$$

et, par conséquent,

$$\varphi + \psi = \frac{(a_1 - a_0)\left[e^{m(x+y+p+q)} - e^{-m(x+y+p+q)}\right]}{\left[e^{m(x+p)} - e^{-m(x+p)}\right]\left[e^{m(y+q)} - e^{-m(y+q)}\right]}.$$

On voit par là que si l'on prend pour φ_1 et pour ψ_1 des valeurs de même forme, déterminées par les équations

$$\varphi'_1 = a\varphi_1^2 + 2b\varphi_1 + c \quad \text{et} \quad \psi'_1 = a\psi_1^2 - 2b\psi_1 + c,$$

a, b et c étant des constantes quelconques, le rapport $\frac{\varphi + \psi}{\varphi_1 + \psi_1}$ sera égal à une fonction de $x+y$, multipliée par le produit de deux fonctions, l'une dépendant de x seulement, l'autre de y seulement; par conséquent l'équation (2) sera vérifiée.

VI.

Soit maintenant

$$z=\frac{f}{\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}}=\frac{1}{2m},$$

d'où

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dx}+\frac{1}{f}\frac{df}{dy}=2m,$$

ou

$$\frac{d.[\mathrm{L}f-m(x+y)]}{dx}+\frac{d.[\mathrm{L}f-m(x+y)]}{dy}=0.$$

Il en résulte

$$\mathrm{L}f-m(x+y)=\mathfrak{F}(x-y),\quad \text{ou}\quad f=e^{m(x+y)}\mathfrak{F}_1(x-y).$$

Mais

$$f=\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy};$$

donc

$$\frac{d.\left[u-e^{m(x+y)}\mathfrak{F}_2(x-y)\right]}{dx}-\frac{d.\left[u-e^{m(x+y)}\mathfrak{F}_2(x-y)\right]}{dy}=0,$$

$\mathfrak{F}_1(x-y)$ étant la dérivée de $2\mathfrak{F}_2(x-y)$. Donc, si ϖ et θ représentent deux fonctions arbitraires, l'une de $x+y$, l'autre de $x-y$, on doit avoir

$$u=\varpi(x+y)-e^{m(x+y)}\theta(x-y).$$

Soient

$$x+y=\alpha,\qquad x-y=\beta;$$

l'équation

$$u\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+2u^3$$

devient

$$u\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}-\frac{d^2u}{d\beta^2}\right)=\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2-\left(\frac{du}{d\beta}\right)^2+2u^3.$$

Mais

$$\frac{du}{d\alpha}=\varpi'-me^{m\alpha}\theta,\quad \frac{d^2u}{d\alpha^2}=\varpi''-m^2e^{m\alpha}\theta,$$

$$\frac{du}{d\beta}=-e^{m\alpha}\theta',\qquad \frac{d^2u}{d\beta^2}=-e^{m\alpha}\theta'';$$

donc

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}&(\varpi-e^{m\alpha}\theta)(\varpi''-m^2e^{m\alpha}\theta+e^{m\alpha}\theta'')=\varpi'^2-2\varpi'me^{m\alpha}\theta\\&\qquad+m^2e^{2m\alpha}\theta^2-e^{2m\alpha}\theta'^2+2(\varpi-e^{m\alpha}\theta)^3.\end{aligned}\right.$$

Ordonnons par rapport à $e^{m\alpha}$:

$$\begin{aligned}&(\varpi\varpi''-\varpi'^2-2\varpi^3)-e^{m\alpha}(\varpi''\theta+\varpi\theta m^2-2\varpi'\theta m-6\varpi^2\theta-\varpi\theta'')\\&\qquad+e^{2m\alpha}(\theta'^2-\theta\theta''-6\varpi\theta^2)+2\theta^3e^{3m\alpha}=0.\end{aligned}$$

Différentions par rapport à β, et divisons tous les termes par $e^{m\alpha}$:

$$\begin{aligned}&(2\varpi'm+6\varpi^2-\varpi''-m^2\varpi)\theta'+\varpi\theta'''\\&\qquad+e^{m\alpha}(\theta'\theta''-\theta\theta'''-12\varpi\theta\theta')+6\theta^2\theta'e^{2m\alpha}=0.\end{aligned}$$

Différentions de nouveau par rapport à β :

$$\begin{aligned}&(2\varpi'm+6\varpi^2-\varpi''-m^2\varpi)\theta''+\varpi\theta^{\text{IV}}\\&+e^{m\alpha}[\theta''^2-\theta\theta^{\text{IV}}-12\varpi(\theta'^2+\theta\theta'')]+6e^{2m\alpha}(\theta^2\theta''+2\theta\theta'^2)=0.\end{aligned}$$

Multiplions la dernière équation par θ', la précédente par θ'', et retranchons l'un de l'autre les deux résultats ; il vient

$$-\varpi(\theta'\theta^{\text{IV}}-\theta''\theta''')+e^{m\alpha}[\theta(\theta'\theta^{\text{IV}}-\theta''\theta''')+12\varpi\theta'^3]-6e^{2m\alpha}.2\theta\theta'^3=0,$$

ou

$$(\varpi-\theta e^{m\alpha})(\theta'\theta^{\text{IV}}-\theta''\theta'''-12\theta'^3e^{m\alpha})=0.$$

Or $\varpi - e^{m\alpha}$, qui n'est autre chose que u, ne peut être nulle, donc le second facteur doit l'être. Mais θ et ses dérivées sont des fonctions de β: donc pour que ce second facteur soit nul identiquement, il faut que la constante m soit nulle, c'est-à-dire que

$$u = \varpi(x+y) - \theta(x-y).$$

Cette condition détermine les fonctions ϖ et θ, ainsi que les fonctions φ et ψ. D'abord l'équation (21), si l'on fait $m = 0$, devient

$$(22) \qquad (\varpi - \theta)(\varpi'' + \theta'') = \varpi'^2 - \theta'^2 + 2(\varpi - \theta)^3.$$

De cette équation on tire

$$\varpi''' = \frac{(\varpi - \theta)[2\varpi'\varpi'' + 6\varpi'(\varpi-\theta)^2] - \varpi'[\varpi'^2 - \theta'^2 + 2(\varpi-\theta)^3]}{(\varpi-\theta)^2},$$

$$\frac{\varpi'''}{\varpi'} - 12\varpi = \frac{2(\varpi-\theta)\varpi'' - (\varpi'^2 - \theta'^2) + 4(\varpi-\theta)^3 - 12\varpi(\varpi-\theta)^2}{(\varpi-\theta)^2}.$$

L'équation (22) ne changeant pas quand on change ϖ en θ et θ en ϖ, on aura de même

$$\frac{\theta'''}{\theta'} - 12\theta = \frac{-2(\varpi-\theta)\theta'' + \varpi'^2 - \theta'^2 - 4(\varpi-\theta)^3 - 12\theta(\varpi-\theta)^2}{(\varpi-\theta)^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\varpi'''}{\varpi'} - 12\varpi - \left(\frac{\theta'''}{\theta'} - 12\theta\right) = \frac{2(\varpi-\theta)(\varpi''+\theta'') - 2(\varpi'^2 - \theta'^2) - 4(\varpi-\theta)^3}{(\varpi-\theta)^2}.$$

Le second membre est nul, en vertu de l'équation (22); donc les fonctions $\frac{\varpi'''}{\varpi'} - 12\varpi$ et $\frac{\theta'''}{\theta'} - 12\theta$, qui ne dépendent, la première que de α, la seconde que de β, doivent être égales à une constante A. Soit

$$\frac{\varpi'''}{\varpi'} - 12\varpi = A, \quad \varpi''' = 12\varpi\varpi' + A\varpi', \quad \varpi'' = 6\varpi^2 + A\varpi + \frac{B}{2};$$

multiplions par $2\varpi'$, et intégrons de nouveau :

$$\varpi'^2 = 4\varpi^3 + A\varpi^2 + B\varpi + C.$$

On aura de même

$$\theta'^2 = 4\theta^3 + A\theta^2 + B_1\theta + C_1.$$

Ces fonctions ϖ et θ devant vérifier l'équation (22), on doit avoir

$$(\varpi - \theta)\left(6\varpi^2 + A\varpi + \frac{B}{2} + 6\theta^2 + A\theta + \frac{B_1}{2}\right)$$
$$= 4\varpi^3 + A\varpi^2 + B\varpi + C - 4\theta^3 - A\theta^2 - B_1\theta - C_1 + 2(\varpi - \theta)^3.$$

Si l'on développe cette équation, elle se réduit à

$$\frac{B - B_1}{2}(\varpi + \theta) + C - C_1 = 0,$$

ce qui exige que $B = B_1$ et $C = C_1$.

On doit donc avoir, en définitive,

$$\varpi'^2 = 4\varpi^3 + A\varpi^2 + B\varpi + C \quad \text{et} \quad \theta'^2 = 4\theta^3 + A\theta^2 + B\theta + C.$$

Donc $\theta(x)$ est égale, soit à $\varpi(x)$, soit à $\varpi(-x)$, et la fonction ϖ est doublement périodique, ayant un infini double.

Maintenant, la condition

$$u = \varpi(x + y) - \theta(x - y)$$

donne

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} = 2\varpi'(x + y),$$

et par conséquent

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$$

Or on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi + \psi}\left(\frac{\varphi''}{\varphi + \psi} - 2\frac{\varphi'^2}{(\varphi + \psi)^2}\right).$$

Donc

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\psi'}{\varphi+\psi}\left[\frac{\varphi'''}{\varphi+\psi} - 6\,\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi+\psi)^2} + 6\,\frac{\varphi'^3}{(\varphi+\psi)^3}\right],$$

et, de même,

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\varphi'}{\varphi+\psi}\left[\frac{\psi'''}{\varphi+\psi} - 6\,\frac{\psi'\psi''}{(\varphi+\psi)^2} + 6\,\frac{\psi'^3}{(\varphi+\psi)^3}\right].$$

Egalons ces deux expressions, et divisons par $\frac{\varphi'\psi'}{(\varphi+\psi)^2}$ les deux membres de l'équation ainsi obtenue; il vient

$$(24)\qquad \frac{\varphi'''}{\varphi'} - 6\,\frac{\varphi''}{\varphi+\psi} + 6\,\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^2} = \frac{\psi'''}{\psi'} - 6\,\frac{\psi''}{\varphi+\psi} + 6\,\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^2}.$$

En différentiant par rapport à x, on a

$$\frac{\varphi'\varphi^{\text{IV}}-\varphi''\varphi'''}{\varphi'^2} = 6\,\frac{\varphi'''}{\varphi+\psi} - 6\,\frac{\varphi''\varphi'}{(\varphi+\psi)^2} - 12\,\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi+\psi)^2} + 12\,\frac{\varphi'^3}{(\varphi+\psi)^3}$$
$$+ 6\,\frac{\varphi'\psi''}{(\varphi+\psi)^2} - 12\,\frac{\varphi'\psi'^2}{(\varphi+\psi)^3},$$

$$\frac{\varphi'\varphi^{\text{IV}}-\varphi''\varphi'''}{\varphi'^3} = 6\,\frac{\varphi'''}{\varphi'(\varphi+\psi)} - 18\,\frac{\varphi''}{(\varphi+\psi)^2} + 12\,\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^3} + 6\,\frac{\psi''}{(\varphi+\psi)^2} - 12\,\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^3}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{\varphi'\varphi^{\text{IV}} - \varphi''\varphi'''}{\varphi'^3} = z,$$

et différentions de nouveau par rapport à x:

$$\frac{dz}{dx} = 6\,\frac{\varphi'\varphi^{\text{IV}}-\varphi''\varphi'''}{\varphi'^2(\varphi+\psi)} - 6\,\frac{\varphi'''}{(\varphi+\psi)^2} - 18\,\frac{\varphi'''}{(\varphi+\psi)^2} + 36\,\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi+\psi)^3} + 24\,\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi+\psi)^3}$$
$$- 36\,\frac{\varphi'^3}{(\varphi+\psi)^4} - 12\,\frac{\varphi'\psi''}{(\varphi+\psi)^3} + 36\,\frac{\varphi'\psi'^2}{(\varphi+\psi)^4}.$$

Substituons à $\frac{\varphi'\varphi^{\text{IV}}-\varphi''\varphi'''}{\varphi'^2}$ sa valeur trouvée ci-dessus :

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} = {} & 36\frac{\varphi'''}{(\varphi+\psi)^2} - 108\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi+\psi)^3} + 72\frac{\varphi'^3}{(\varphi+\psi)^4} + 36\frac{\varphi'\psi''}{(\varphi+\psi)^3} - 72\frac{\varphi'\psi'^2}{(\varphi+\psi)^4} \\ & - 24\frac{\varphi'''}{(\varphi+\psi)^2} + 36\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi+\psi)^3} + 24\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi+\psi)^3} - 36\frac{\varphi'^3}{(\varphi+\psi)^4} - 12\frac{\varphi'\psi''}{(\varphi+\psi)^3} \\ & + 36\frac{\varphi'\psi'^2}{(\varphi+\psi)^4}.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dz}{dx} = 12\frac{\varphi'''}{(\varphi+\psi)^2} - 48\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi+\psi)^3} + 36\frac{\varphi'^3}{(\varphi+\psi)^4} + 24\frac{\varphi'\psi''}{(\varphi+\psi)^3} - 36\frac{\varphi'\psi'^2}{(\varphi+\psi)^4}.$$

Donc

$$\begin{aligned}z - \frac{\varphi}{\varphi'}\frac{dz}{dx} = {} & 6\frac{\varphi'''}{\varphi'(\varphi+\psi)} - 18\frac{\varphi''}{(\varphi+\psi)^2} + 12\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^3} + 6\frac{\psi''}{(\varphi+\psi)^2} - 12\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^3} \\ & - 12\frac{\varphi'''\varphi}{\varphi'(\varphi+\psi)^2} + 48\frac{\varphi''\varphi}{(\varphi+\psi)^3} - 36\frac{\varphi'^2\varphi}{(\varphi+\psi)^4} - 24\frac{\psi''\varphi}{(\varphi+\psi)^3} + 36\frac{\psi'^2\varphi}{(\varphi+\psi)^4},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}z - \frac{\varphi}{\varphi'}\frac{dz}{dx} = {} & -6\frac{\varphi'''}{\varphi'}\cdot\frac{\varphi-\psi}{(\varphi+\psi)^2} + 24\frac{\varphi''}{\varphi+\psi}\cdot\frac{\varphi-\psi}{(\varphi+\psi)^2} - 18\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\cdot\frac{\varphi-\psi}{(\varphi+\psi)^2} \\ & - 12\frac{\psi''}{\varphi+\psi}\cdot\frac{\varphi-\psi}{(\varphi+\psi)^2} + 18\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\cdot\frac{\varphi-\psi}{(\varphi+\psi)^2} + 6\frac{\varphi''-\psi''}{(\varphi+\psi)^2} - 6\frac{\varphi'^2-\psi'^2}{(\varphi+\psi)^3}.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\frac{\psi'\psi^{\text{IV}}-\psi''\psi'''}{\psi'^3} = t,$$

on aura

$$t - \frac{\psi}{\psi'}\frac{dt}{dy}$$

en changeant dans l'équation précédente φ en ψ et ψ en φ. Ainsi

$$\begin{aligned}z - \frac{\varphi}{\varphi'}\frac{dz}{dx} = 6\frac{\varphi''-\psi''}{(\varphi+\psi)^2} - 6\frac{\varphi'^2-\psi'^2}{(\varphi+\psi)^3} - 6\frac{\varphi-\psi}{(\varphi+\psi)^2}\Bigg[& \frac{\varphi'''}{\varphi'} - 4\frac{\varphi''}{\varphi+\psi} + 3\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^2} \\ & + 2\frac{\psi''}{\varphi+\psi} - 3\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\Bigg],\end{aligned}$$

et

$$t-\frac{\psi}{\psi'}\frac{dt}{dy}=-6\frac{\varphi''-\psi''}{(\varphi+\psi)^2}+6\frac{\varphi'^2-\psi'^2}{(\varphi+\psi)^3}+6\frac{\varphi-\psi}{(\varphi+\psi)^2}\left[\frac{\psi'''}{\psi'}-4\frac{\psi''}{\varphi+\psi}+3\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right.$$
$$\left.+2\frac{\varphi''}{\varphi+\psi}-3\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right].$$

Donc, en ajoutant,

$$z-\frac{\varphi}{\varphi'}\frac{dz}{dx}+t-\frac{\psi}{\psi'}\frac{dt}{dy}=-6\frac{\varphi-\psi}{(\varphi+\psi)^2}\left[\frac{\varphi'''}{\varphi'}-6\frac{\varphi''}{\varphi+\psi}+6\frac{\varphi'^2}{(\varphi+\psi)^2}-\frac{\psi'''}{\psi'}\right.$$
$$\left.+6\frac{\psi''}{\varphi+\psi}-6\frac{\psi'^2}{(\varphi+\psi)^2}\right].$$

Le second membre est nul, en vertu de l'équation (24); or z et φ ne dépendent que de x, t et ψ ne dépendent que de y; donc, si l'on désigne par b une constante,

$$z-\frac{\varphi}{\varphi'}\frac{dz}{dx}=3b,\quad t-\frac{\psi}{\psi'}\frac{dt}{dy}=-3b.$$

Si l'on intègre, il vient

$$\frac{z}{\varphi}=\frac{3b}{\varphi}+12a,\qquad \frac{\varphi'\varphi^{\text{IV}}-\varphi''\varphi'''}{\varphi'^2}=3b\varphi'+12a\varphi\varphi',$$
$$\frac{\varphi'''}{\varphi'}=6a\varphi^2+3b\varphi+c,\quad \varphi''=2a\varphi^3+\frac{3b}{2}\varphi^2+c\varphi+\frac{d}{2},$$

et enfin

$$\varphi'^2=a\varphi^4+b\varphi^3+c\varphi^2+d\varphi+h.$$

On obtiendra de même

$$\psi'^2=a_1\psi^4-b\psi^3+c_1\psi^2+d_1\psi+h_1.$$

Substituons maintenant les expressions trouvées dans l'équation (24), après avoir chassé les dénominateurs de cette équation, ce qui donne

$$\psi'[\varphi'''(\varphi+\psi)^2-6\varphi'\varphi''(\varphi+\psi)+6\varphi'^3]=\varphi'[\psi'''(\varphi+\psi)^2-6\psi'\psi''(\varphi+\psi)+6\psi'^3];$$

quand on aura fait cette substitution, on pourra diviser tous les termes par $\varphi'\psi'$, et il restera

$$\begin{aligned}(6a\varphi^2+3b\varphi+c)(\varphi+\psi)^2-(12a\varphi^3+9b\varphi^2+6c\varphi+3d)(\varphi+\psi)\\+6a\varphi^4+6b\varphi^3+6c\varphi^2+6d\varphi+6h\\=(6a_1\psi^2-3b\psi+c_1)(\varphi+\psi)^2-(12a_1\psi^3-9b\psi^2+6c_1\psi+3d_1)(\varphi+\psi)\\+6a_1\psi^4-6b\psi^3+6c_1\psi^2+6d_1\psi+6h_1.\end{aligned}$$

Si l'on développe, il vient, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}6a\varphi^2\psi^2+c(\varphi^2+\psi^2)-4c\varphi\psi+3d(\varphi-\psi)+6h\\=6a_1\varphi^2\psi^2+c_1(\varphi^2+\psi^2)-4c_1\varphi\psi+3d_1(\psi-\varphi)+6h_1,\end{aligned}$$

ce qui exige qu'on ait

$$a=a_1,\quad c=c_1,\quad d=-d_1,\quad h=h_1.$$

Donc

$$\varphi'^2=a\varphi^4+b\varphi^3+c\varphi^2+d\varphi+h \quad \text{et} \quad \psi'^2=a\psi^4-b\psi^3+c\psi^2-d\psi+h.$$

La fonction φ est déterminée par l'une des deux équations

$$\frac{d\varphi}{dx}=\sqrt{a\varphi^4+b\varphi^3+c\varphi^2+d\varphi+h}$$

et

$$\frac{d\varphi}{dx}=-\sqrt{a\varphi^4+b\varphi^3+c\varphi^2+d\varphi+h}.$$

Nous désignerons la première fonction par $\varphi(x)$, la seconde sera alors $\varphi(-x)$. La fonction ψ aura pareillement deux valeurs, qui seront $-\varphi(y)$ et $-\varphi(-y)$. Nous pouvons supposer que la fonction φ se réduit à zéro pour la valeur zéro de la variable; cette fonction est d'ailleurs une fonction doublement périodique, aux périodes ω et ω', et nous désignerons par M la somme constante des deux valeurs de la variable qui donnent à φ la même valeur.

Nous savons que, les fonctions φ et ψ étant ainsi déterminées, u est égale à la somme de deux fonctions dépendant, l'une de $x+y$ seulement, l'autre de $x-y$ seulement, et nous avons vu que ces deux fonctions doivent être doublement périodiques, ayant un infini double, et leurs périodes étant évidemment les mêmes que celles de la fonction φ. Nous allons achever de déterminer ces fonctions.

La fonction u peut avoir quatre valeurs :

$$\frac{-\varphi'(x)\varphi(y)}{[\varphi(x)-\varphi(y)]^2},\quad \frac{\varphi'(x)\varphi'(-y)}{[\varphi(x)-\varphi(-y)]^2},\quad \frac{\varphi'(-x)\varphi'(y)}{[\varphi(-x)-\varphi(y)]^2},\quad \frac{-\varphi'(-x)\varphi'(-y)}{[\varphi(-x)-\varphi(-y)]^2}.$$

Soit

$$\frac{d\varpi}{d\alpha}=\sqrt{4\varpi^3+A\varpi^2+B\varpi+C} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{d\beta}=\sqrt{4\theta^3+A\theta^2+B\theta+C},$$

de sorte que $\theta(\beta)=\varpi(\beta)$, et supposons que ϖ se réduise à zéro pour la valeur zéro de la variable. Nous allons voir que si l'on pose

$$u=\varpi(x+y+m)-\varpi(x-y+m_1),$$

on peut, pour les quatre valeurs de u, déterminer m et m_1, de telle sorte que cette équation soit vérifiée.

Soit d'abord

$$u=\frac{-\varphi'(x)\varphi'(y)}{[\varphi(x)-\varphi(y)]^2}.$$

Si l'on regarde x comme seule variable, u change de signe quand on remplace x par $M-x$. Cette fonction a quatre zéros simples, qui sont ceux de $\varphi'(x)$, c'est-à-dire $\frac{M}{2}$, $\frac{M}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\frac{M}{2}+\frac{\omega'}{2}$, $\frac{M}{2}+\frac{\omega+\omega'}{2}$, car les infinis de φ donnent à la fonction une valeur finie. Elle a aussi deux infinis doubles, qui sont $x=y$ et $x=M-y$.

Si l'on regarde y comme seule variable, u change de signe quand on remplace y par $M-y$. Ses zéros sont encore $\frac{M}{2}$, $\frac{M}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\frac{M}{2}+\frac{\omega'}{2}$, et $\frac{M}{2}+\frac{\omega+\omega'}{2}$; ses infinis $y=x$ et $y=M-x$.

Si l'on considère maintenant la fonction

$$v=\varpi(x+y+m)-\varpi(x-y+m_1),$$

quand on y remplace x par $\mathrm{M} - x$, on a

$$v = \varpi(y - x + \mathrm{M} + m) - \varpi(\mathrm{M} - x - y + m_1).$$

La fonction n'aura fait que changer de signe, si, N représentant la somme constante des deux valeurs de la variable qui donnent à ϖ la même valeur, on a

$$\mathrm{M} + m + m_1 = \mathrm{N}.$$

Quand on remplace y par $\mathrm{M} - y$, on a

$$v = \varpi(\mathrm{M} + m + x - y) - \varpi(x + y - \mathrm{M} + m_1);$$

la fonction n'aura fait que changer de signe, si

$$\mathrm{M} + m - m_1 = 0.$$

De là on tire

$$m = \frac{\mathrm{N}}{2} - \mathrm{M} \quad \text{et} \quad m_1 = \frac{\mathrm{N}}{2}.$$

Si l'on regarde dans v, x comme seule variable, v a quatre zéros donnés par la condition

$$x + y + m = \mathrm{N} - x + y - m_1 + k\omega + k'\omega', \quad \text{ou} \quad 2x = \mathrm{M} + k\omega + k'\omega';$$

donc, abstraction faite des multiples des périodes, les zéros sont $\frac{\mathrm{M}}{2}$, $\frac{\mathrm{M}}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\mathrm{M}}{2} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{\mathrm{M}}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$.

Si l'on regarde y comme seule variable, les zéros sont donnés par la condition

$$x + y + m = x - y + m_1 + k\omega + k'\omega', \quad \text{ou} \quad 2y = \mathrm{M} + k\omega + k'\omega';$$

donc, en faisant abstraction des multiples des périodes, les zéros sont $\frac{\mathrm{M}}{2}$, $\frac{\mathrm{M}}{2} + \frac{\omega}{2}$; $\frac{\mathrm{M}}{2} + \frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\mathrm{M}}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$.

La fonction v a deux infinis doubles, donnés par la condition

$$x + y + m = \frac{\mathrm{N}}{2} + k\omega + k'\omega', \quad \text{ou} \quad x - y + m_1 = \frac{\mathrm{N}}{2} + k\omega + k'\omega'.$$

D'où, en remplaçant m et m_1 par leur valeur,

$$x = \mathrm{M} - y \quad \text{et} \quad x = y.$$

Les fonctions u et v ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis sont égales à un facteur constant près, que l'on peut toujours supposer égal à l'unité.

La seconde valeur de u se déduit de la première, en changeant le signe, et remplaçant y par $-y$; la troisième se déduit aussi de la première, en changeant le signe, et remplaçant x par $-x$; enfin la quatrième s'en déduit aussi, en changeant x en $-x$ et y en $-y$. Donc, si, pour abréger, on pose

$$\mathrm{R} = \sqrt{a\varphi^4 + b\varphi^3 + c\varphi^2 + d\varphi + h},$$

et

$$\mathrm{S} = \sqrt{a\psi^4 - b\psi^3 + c\psi^2 - d\psi + h},$$

les quatre valeurs de u seront déterminées par le tableau suivant :

$$1^\circ \quad \frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{R}, \quad \frac{d\psi}{dy} = -\mathrm{S}, \quad u = \varpi\left(x + y + \frac{\mathrm{N}}{2} - \mathrm{M}\right) - \varpi\left(x - y + \frac{\mathrm{N}}{2}\right);$$

$$2^\circ \quad \frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{R}, \quad \frac{d\psi}{dy} = \mathrm{S}, \quad u = \varpi\left(x + y + \frac{\mathrm{N}}{2}\right) - \varpi\left(x - y + \frac{\mathrm{N}}{2} - \mathrm{M}\right);$$

$$3^\circ \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\mathrm{R}, \quad \frac{d\psi}{dy} = -\mathrm{S}, \quad u = \varpi\left(x + y + \frac{\mathrm{N}}{2}\right) - \varpi\left(x - y + \frac{\mathrm{N}}{2} + \mathrm{M}\right);$$

$$4^\circ \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\mathrm{R}, \quad \frac{d\psi}{dy} = \mathrm{S}, \quad u = \varpi\left(x + y + \frac{\mathrm{N}}{2} + \mathrm{M}\right) - \varpi\left(x - y + \frac{\mathrm{N}}{2}\right).$$

La fonction u_1 sera déterminée par des équations de même forme. Mais pour que la différence $u_1 - u$ se réduise à une fonction de $x + y$, sans que u_1 et u soient identiques, il faut évidemment que u soit déterminée par la première ou la quatrième formule, et que u_1 le soit par l'une des formules correspondantes, les fonctions ϖ étant les mêmes dans l'expression de u et dans celles de u_1. Il faut donc, en définitive, et il suffit, que $\psi(y) = -\varphi(y)$, que $\psi_1(y) = -\varphi_1(y)$, et que φ et φ_1 soient des fonctions doublement périodiques, aux mêmes périodes, ayant deux zéros et deux infinis.

Si ces conditions sont remplies, on aura, en désignant par ϖ une fonction doublement périodique aux mêmes périodes que φ et φ_1, se réduisant à zéro pour la valeur zéro de la variable, et ayant un infini double $\frac{N}{2}$, en désignant aussi par M la somme constante des valeurs de la variable qui donnent à φ la même valeur, et par M_1 la quantité analogue pour φ_1, et supposant enfin que φ et φ_1 se réduisent à zéro pour la valeur zéro de la variable :

$$\frac{\varphi'_1\psi'_1}{(\varphi_1+\psi_1)^2}-\frac{\varphi'\psi'}{(\varphi+\psi)^2}=\varpi\left(x+y+\frac{N}{2}-M_1\right)-\varpi\left(x+y+\frac{N}{2}-M\right).$$

Donc l'équation (3) sera vérifiée.

VII.

Soit $\theta(x+y)$ une fonction doublement périodique, ayant les mêmes périodes que la fonction ϖ considérée ci-dessus, et se réduisant à zéro pour $x+y=0$ et pour $x+y=M+M_1$. Il est facile de voir que les fonctions

$$\frac{-\theta'(x+y)}{[\theta(x+y)-\theta(M)]^2}\quad \text{et}\quad \varpi\left(x+y+\frac{N}{2}-M_1\right)-\varpi\left(x+y+\frac{N}{2}-M\right)$$

ont les mêmes zéros et les mêmes infinis. Donc, si A représente une constante,

$$\frac{\varphi'_1\psi'_1}{(\varphi_1+\psi_1)^2}-\frac{\varphi'\psi'}{(\varphi+\psi)^2}=\frac{-A\theta'(x+y)}{[\theta(x+y)-\theta(M)]^2}.$$

Si l'on intègre par rapport à y, il vient

$$\frac{\varphi'}{\varphi+\psi}-\frac{\varphi'_1}{\varphi_1+\psi_1}+\mathcal{f}_1(x)=\frac{A}{\theta(x+y)-\theta(M)}.$$

Si l'on intègre de nouveau par rapport à x, et si l'on désigne par $F(x+y)$ une intégrale du second membre, il vient

$$L(\varphi+\psi)-L(\varphi_1+\psi_1)+\mathcal{f}_2(x)+\mathcal{f}_3(y)=F(x+y)$$

ou

$$\frac{\varphi+\psi}{\varphi_1+\psi_1}\mathfrak{F}_4(x)\mathfrak{F}_5(y)=e^{F(x+y)}.$$

Cette équation nous montre que si les valeurs de φ, ψ, φ_1 et ψ_1 déterminées ci-dessus, et qui nous fournissent la solution la plus générale de l'équation (3), peuvent aussi, sans nouvelles restrictions, vérifier l'équation (2), il faut que la fonction de $x+y$ qui figure dans cette équation soit de la forme $e^{F(x+y)}$, $F(x+y)$ ayant pour dérivée une fonction doublement périodique, aux mêmes périodes que φ et φ_1, et dont les infinis sont M et M_1. Nous allons voir que cette condition est suffisante.

Soit

$$e^{F(x+y)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{\varphi_1(x)-\varphi_1(y)}\mathfrak{F}_1(x)\mathfrak{F}_2(y).$$

Les fonctions $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ se déterminent en remplaçant x ou y par des constantes p et q; il vient

$$\begin{aligned}&e^{F(x+y)-F(x+q)-F(p+y)}\\&=\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{\varphi_1(x)-\varphi_1(y)}\cdot\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(q)}{\varphi(x)-\varphi(q)}\cdot\frac{\varphi_1(p)-\varphi_1(y)}{\varphi(p)-\varphi(y)}\cdot\frac{\varphi(p)-\varphi(q)}{\varphi_1(p)-\varphi_1(q)}e^{-F(p+q)}.\end{aligned}$$

Le second membre est une fonction doublement périodique, dont les périodes sont ω et ω'; il en est de même du premier. En effet, la fonction $F'(x+y)$ étant doublement périodique aux mêmes périodes, on a

$$F(x+y+K\omega+K'\omega')=F(x+y)+KF(\omega)+K'F(\omega').$$

Si donc on remplace x par $x+K\omega+K'\omega'$ et y par $y+K_1\omega+K'_1\omega'$, l'exposant de e devient

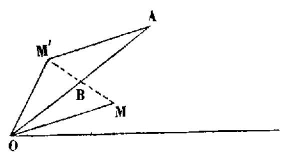
$$\begin{aligned}F(x+y)+(K+K_1)F(\omega)+(K'+K'_1)F(\omega')-F(x+q)-KF(\omega)&\\-K'F(\omega')-F(y+p)-K_1F(\omega)-K'_1F(\omega'),&\end{aligned}$$

ou

$$F(x+y)-F(x+q)-F(p+y).$$

Donc le premier membre, ne changeant pas quand on augmente x et y d'un multiple quelconque des périodes, est doublement périodique.

Le second membre a trois zéros, ce sont : $x = M - y$, $x = M_1 - q$, $y = M_1 - p$. Le premier membre admet les mêmes zéros et n'en admet pas d'autres. En effet, soit A le point qui correspond à la valeur $M + M_1$



de la variable; soient M et M' les points qui correspondent aux valeurs z et $M + M_1 - z$ de cette variable; la droite MM' passe par le milieu B de OA, et la fonction F' prend la même valeur en deux points de OM et de AM' en ligne droite avec le point B, car la somme des valeurs de la variable correspondant à ces deux points est $M + M_1$. Or on peut former l'intégrale $F(M + M_1 - z)$ soit en parcourant la droite OM', soit en parcourant le contour OAM'. La droite OA donne $F(M + M_1)$; puisque F' passe par les mêmes valeurs quand on va de A en M' et quand on va de O en M, et que dz a des signes contraires dans les deux cas, l'intégrale obtenue en allant de A en M' est $- F(z)$. Donc

$$F(M + M_1 - z) = F(M + M_1) - F(z).$$

Il en résulte que, F devenant infinie pour $z = M$ et pour $z = M_1$, la fonction $F(z)$ a des valeurs de signes contraires pour des valeurs de z très-peu différentes de M et de M_1. Donc, si $F(M_1) = +\infty$,

$$F(M) = -\infty.$$

La fonction

$$e^{F(x+y) - F(x+q) - F(y+p)}$$

se réduit donc à zéro pour

$$x + y = M, \quad x + q = M_1 \quad \text{et} \quad p + y = M_1;$$

d'ailleurs F', et par conséquent F, n'a pas d'autres infinis; donc les zéros du premier membre sont les mêmes que ceux du second. On voit pareillement que les infinis sont aussi les mêmes; donc les deux fonctions sont égales à un facteur constant près.

Nous pouvons résumer ce qui précède en énonçant le théorème suivant :

Pour que l'équation

$$\mathfrak{F}(x+y) = \frac{F_1(x)f_2(y) + F_2(x)f_1(y)}{F_3(x)f_4(y) + F_4(x)f_3(y)}$$

soit vérifiée, quelque valeur que l'on attribue aux variables x et y, il faut et il suffit :

1° *Que* $\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *et que* $\frac{F_3(x)}{F_4(x)} = -\frac{f_3(x)}{f_4(x)}$;

2° *Que ces fonctions* $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$, *etc., soient des fonctions doublement périodiques, aux mêmes périodes, ayant pour zéros, la première zéro et* M, *la seconde zéro et* M_1;

3° *Que* $\mathfrak{F}(x+y) = e^{F(x+y)}$, $F(x+y)$ *ayant pour dérivée une fonction doublement périodique aux mêmes périodes que les précédentes, et dont les infinis sont* M *et* M_1.

VIII.

Considérons maintenant l'équation

$$(1) \qquad f(x+y) = \frac{\varphi'(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi'(y)}{1 - K^2\varphi(x)^2\psi(y)^2}.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante

$$f(x+y) = \frac{\dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} + \dfrac{\psi(y)}{\psi'(y)}}{\dfrac{1}{\psi(y)^2} - K^2\varphi(x)^2} \, \frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{\psi(y)^2}.$$

Pour qu'elle soit vérifiée, quelque valeur que l'on donne à x et à y, il faut d'abord que

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{\psi(x)}{\psi'(x)},$$

et que

$$\frac{1}{\psi(x)^2} = K^2\varphi(x)^2,$$

conditions équivalentes.

Il faut en outre que $\varphi(x)^2$ et $\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$ soient des fonctions doublement périodiques, aux mêmes périodes. Pour que $\varphi(x)^2$ soit doublement périodique, il faut que $\varphi(x)$ le soit également, et si ω et ω' sont les périodes de φ, celles de φ^2 seront $\frac{\omega}{2}$ et ω'. Mais si φ^2 est nulle pour $x = 0$, elle l'est aussi pour $x = \frac{\omega}{2}$, donc φ doit l'être pareillement. D'autre part, φ^2 reprenant la même valeur pour x et pour $x + \frac{\omega}{2}$, $\varphi(x)$ doit être égale, soit à $\varphi\left(x + \frac{\omega}{2}\right)$, ce qui supposerait que les périodes de φ sont ω' et $\frac{\omega}{2}$, contrairement à notre hypothèse, soit à $-\varphi\left(x + \frac{\omega}{2}\right)$. Mais la somme des zéros de φ est $\frac{\omega}{2}$; donc

$$\varphi\left(x + \frac{\omega}{2}\right) = \varphi(-x);$$

donc

$$\varphi(x) = -\varphi(-x).$$

La fonction φ est donc une fonction doublement périodique ayant deux zéros, et elle change seulement de signe quand la variable change de signe.

Cela étant, $\frac{\varphi}{\varphi'}$ est aussi doublement périodique aux périodes ω' et $\frac{\omega}{2}$. Elle se réduit à zéro quand φ est nulle, c'est-à dire pour zéro et $\frac{\omega}{2}$, et quand φ est infinie, c'est-à-dire pour $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega + \omega'}{2}$. Donc la somme de ses zéros est $\frac{\omega'}{2}$.

φ sera donc une fonction donnée par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} = g\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)},$$

g et k étant deux paramètres arbitraires, φ se réduisant à zéro pour $x = 0$, et la valeur correspondante du radical étant 1. Quant à $\psi(y)$, elle sera donnée par l'équation

$$\psi(y) = m\varphi\left(\frac{\omega'}{2} + y\right),$$

m étant une constante déterminée par la condition $m^2 = \frac{k^2}{K^2}$; car $\frac{1}{\psi(y)} = \frac{1}{m\varphi\left(\frac{\omega'}{2}+y\right)} = \frac{k\varphi(y)}{m}$; donc pour que $\frac{1}{\psi(y)^2} = \varphi(y)^2 K^2$, il faut que $\frac{k^2}{m^2} = K^2$.

Soit maintenant $f(x+y) = e^{F(x+y)}$, d'où $F' = \frac{f'}{f}$. Nous savons que F' doit être une fonction doublement périodique, ayant les mêmes périodes que φ^2 et $\frac{\varphi}{\varphi'}$, et devenant infinie pour les valeurs zéro et $\frac{\omega'}{2}$ de la variable. Cette condition sera remplie si l'on a

$$f(x+y) = \varphi\left(x + y + \frac{\omega'}{2}\right).$$

Il est facile en effet de vérifier que, si l'on représente par φ une fonction elliptique, déterminée comme il a été dit ci-dessus, on a toujours

$$\varphi\left(x+y+\frac{\omega'}{2}\right) = m\,\frac{\varphi(x)\varphi'\left(y+\frac{\omega'}{2}\right) + \varphi\left(y+\frac{\omega'}{2}\right)\varphi'(x)}{1 - k^2\varphi(x)^2\varphi\left(y+\frac{\omega'}{2}\right)^2}.$$

Les zéros des deux membres, dans chaque parallélogramme élémentaire, sont

$$x = -\left(y+\frac{\omega'}{2}\right) \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{2} - \left(y+\frac{\omega'}{2}\right),$$

et les infinis sont

$$x+y=0 \quad \text{et} \quad x+y+\frac{\omega'}{2}=\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}.$$

IX.

Il nous reste à considérer l'équation

$$\frac{\mathfrak{F}(x+y)}{\mathfrak{F}_1(x-y)}=\frac{F(x)f_1(y)+f(x)F_1(y)}{F(x)f_1(y)-f(x)F_1(y)}. \tag{1}$$

Soit

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\varphi(x) \quad \text{et} \quad \frac{F_1(y)}{f_1(y)}=\psi(y),$$

d'où

$$\frac{\mathfrak{F}(x+y)}{\mathfrak{F}_1(x-y)}=\frac{\varphi+\psi}{\varphi-\psi} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F}(\varphi-\psi)=\mathfrak{F}_1(\varphi+\psi). \tag{2}$$

En différentiant par rapport à x et par rapport à y, on a

$$\mathfrak{F}'(\varphi-\psi)+\mathfrak{F}\varphi'=\mathfrak{F}'_1(\varphi+\psi)+\mathfrak{F}_1\varphi',$$
$$\mathfrak{F}'(\varphi-\psi)-\mathfrak{F}\psi'=-\mathfrak{F}'_1(\varphi+\psi)+\mathfrak{F}_1\psi'.$$

Nous éliminerons $\mathfrak{F}'_1$ entre ces deux équations en les ajoutant :

$$2\mathfrak{F}'(\varphi-\psi)+\mathfrak{F}(\varphi'-\psi')=\mathfrak{F}_1(\varphi'+\psi').$$

Si l'on élimine maintenant $\mathfrak{F}_1$ au moyen de l'équation (2), on a

$$2\mathfrak{F}'(\varphi^2-\psi^2)+\mathfrak{F}(\varphi'-\psi')(\varphi+\psi)=\mathfrak{F}(\varphi-\psi)(\varphi'+\psi'),$$

$$\frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}}=\frac{\varphi\psi'-\psi\varphi'}{\varphi^2-\psi^2}. \tag{3}$$

Cette équation est de même forme que celles que nous venons d'étudier ; elle détermine pour φ une fonction elliptique, définie, comme ci-dessus, par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx}=g\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)},$$

et l'on doit avoir

$$\psi(y) = \varphi(y).$$

La fonction $\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}}$ doit être une fonction elliptique, impaire, ayant pour périodes ω et ω' ; cette condition sera remplie si $\mathcal{F}$ est une fonction elliptique, impaire, ayant pour périodes ω et $2\omega'$, s'annulant pour les valeurs zéro et ω', et devenant infinie pour les valeurs $\frac{\omega}{2}$ et $\omega' + \frac{\omega}{2}$ de la variable. Il est facile en effet de vérifier que, s'il en est ainsi, les fonctions

$$\frac{\mathcal{F}(x+y)}{\mathcal{F}(x-y)} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)}$$

ont les mêmes zéros et les mêmes infinis. Les zéros sont

$$x = -y \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{2} + y;$$

les infinis sont

$$x = y \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{2} - y.$$