JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme $8\mu + 1$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 6 (1861), p. 55-56.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__55_0>

# NOUVEAU THÉORÈME

## CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $8\mu+1$;

**PAR M. J. LIOUVILLE.**

Étant donné un nombre premier $m$ de la forme $8\mu + 1$, je pose de toutes les manières possibles l'équation

$$m = 2p^{4\alpha+1}x^2 + q^{4\beta+1}y^2,$$

$x$ et $y$ étant des entiers impairs et $p$, $q$ des nombres premiers de la forme $8\nu + 3$, $p$ non diviseur de $x$, $q$ non diviseur de $y$ : j'admets pour $\alpha$ et pour $\beta$ la valeur zéro. On demande une règle facile qui dise à priori si le nombre N des décompositions de $m$ sous la forme indiquée est pair ou impair.

La réponse que nous ferons à cette question est entièrement semblable à celle que nous avons faite (dans le cahier de *janvier*) à l'occasion d'une équation bien différente pourtant de celle qui nous occupe aujourd'hui : « Formez l'équation, en nombres entiers,

$$m = a^2 + 8b^2,$$

» qui a toujours lieu, d'une seule manière, pour un nombre premier
» $m$ de la forme $8\mu + 1$; N sera pair si $b$ est pair, mais impair si $b$
» est impair. »

En d'autres termes, on a toujours

$$N \equiv b \pmod{2}.$$

Ainsi, pour

$$m = 17 = 3^2 + 8.1^2,$$

on a $b = 1$, donc N impair, et en effet il n'existe qu'une seule décomposition du genre demandé, celle que fournit l'équation

$$17 = 2.3.1^2 + 11.1^2.$$

Au contraire, pour

$$m = 41 = 3^2 + 8.2^2,$$

on a $b = 2$, donc N pair; et cela est exact encore puisque les décompositions canoniques sont ici au nombre de deux, savoir

$$41 = 2.11.1^2 + 19.1^2$$

et

$$41 = 2.19.1^2 + 3.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin les exemples.