JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $16\kappa + 13$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 7-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__7_0>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $16k+13$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le théorème que je veux donner ici, au sujet des nombres premiers de la forme $16k+13$, consiste en ce que si l'on prend à volonté un tel nombre m, on pourra toujours poser un nombre impair de fois l'équation

$$m = 2^{\alpha+3}x^2 + p^{4\beta+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs (positifs) et p un nombre premier $8g+5$ qui ne divise pas y : on admet pour α et pour β la valeur zéro.

Le produit $2^{\alpha+3}x^2$, en y prenant successivement $\alpha = 0, 1, 2, 3,\ldots$ fournit les séries suivantes :

$$\begin{array}{llll}
8.1^2, & 8.3^2, & 8.5^2, & 8,7^2,\ldots, \\
16.1^2, & 16.3^2, & 16.5^2, & 16.7^2,\ldots, \\
32.1^2, & 32.3^2, & 32.5^2, & 32.7^2,\ldots, \\
64.1^2, & 64.3^2, & 64.5^2, & 64.7^2,\ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Notre théorème revient donc à dire que si du nombre premier donné m, de la forme $16k+13$, on retranche ceux des termes de ces séries dont la grandeur est moindre, il y aura un nombre impair de restes qui s'exprimeront par

$$p^{4\beta+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y et naturellement de la forme $8g+5$.

Ce théorème se vérifie d'abord pour $m = 13$ et pour $m = 29$: on a, en effet, les équations de la forme voulue

$$13 = 8.1^2 + 5.1^2$$

et

$$29 = 16.1^2 + 13.1^2.$$

Il a également lieu pour $m = 61$; mais alors on trouve trois équations canoniques :

$$61 = 8.1^2 + 53.1^2,$$
$$61 = 16.1^2 + 5.3^2,$$
$$61 = 32.1^2 + 29.1^2.$$

On en rencontre également trois pour $m = 109$, savoir

$$109 = 8.1^2 + 101.1^2,$$
$$109 = 8.3^2 + 37.1^2,$$
$$109 = 64.1^2 + 5.3^2.$$

Il serait inutile de pousser plus loin les exemples.