JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 109-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__109_0>

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. On va voir que cette fois encore N dépend de la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m et de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux entiers positifs i figurant dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s, quand il n'est pas zéro, doit être pris négativement comme positivement.

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. Il est clair que l'on a $N = 0$, si m est de la forme $4l + 3$, qui comprend ces deux autres $8k + 3$, $8k + 7$. Mais il n'en est pas de même pour $m = 4l + 1$, c'est-à-dire

pour m de l'une des deux formes $8k+1$, $8k+5$. Je trouve

$$\mathrm{N} = 2\zeta_1(m) + 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k+1$, et

$$\mathrm{N} = 2\zeta_1(m) - 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k+5$.

Le cas de $m = 1 = 1^2 + 4.0^2$ se rapporte à la première formule, qui donne alors

$$\mathrm{N} = 2 + 2 = 4,$$

et l'on a, en effet, les quatre représentations fournies par les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Soit ensuite $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$. Il viendra

$$\mathrm{N} = 2.13 - 2.3 = 20,$$

et l'on trouve bien, pour le nombre 9, vingt représentations, au moyen des équations

$$9 = 1^2 + 0^2 + 8.1^2 + 8.0^2,$$
$$9 = 3^2 + 0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$

où l'on affectera du signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et où l'on opérera les permutations convenables.

Soit enfin $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$. On aura

$$\mathrm{N} = 2.18 + 2.2 = 40.$$

La vérification est facile au moyen des équations

$$17 = 1^2 + 4^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 0^2 + 8.1^2 + 8.1^2,$$
$$17 = 3^2 + 0^2 + 8.1^2 + 8.0^2.$$

Soit à présent $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$. C'est la seconde formule qu'on devra appliquer, et elle donnera

$$N = 2.6 - 2.2 = 8,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Soit encore $m = 13 = 3^2 + 4(\pm 1)^2$. Il nous viendra

$$N = 2.14 + 2.6 = 40.$$

Or on trouve effectivement quarante représentations du nombre 13 au moyen des équations

$$13 = 3^2 + 2^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$13 = 1^2 + 2^2 + 8.1^2 + 8.0^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces exercices numériques.

3. Prenons actuellement n impairement pair, $n = 2m$. On aura

$$N = 0$$

si $m = 4l + 3$, mais

$$N = 4\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$.

Ainsi pour $n = 2$, on a $N = 4$. C'est ce que confirme l'équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$

qui donne quatre représentations du nombre 2.

Pour $n = 10$, on a $N = 24$. Or on obtient en effet vingt-quatre représentations du nombre 10, au moyen des équations ci-après :

$$10 = 1^2 + 3^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 8.1^2 + 8.0^2.$$

4. Soit enfin n multiple de 4. L'équation

$$2^{\alpha} m = x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2$$

ne pourra exister alors qu'en prenant x et y pairs, $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, d'où

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

ce qui nous ramène à une équation discutée déjà (dans le cahier de juillet 1860). Il en résulte, pour le nombre N des représentations d'un entier n pairement pair, par la forme

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 8z^2,$$

qui nous occupe ici, les conséquences suivantes.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$\mathrm{N} = 4\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 4 doit avoir quatre représentations. Elles sont fournies par les deux équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$\mathrm{N} = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 8 doit avoir huit représentations. Cela s'accorde avec les équations

$$8 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 0^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Enfin pour n divisible par 16, $n = 2^{\alpha} m$, $\alpha > 3$, on a toujours

$$\mathrm{N} = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.