JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 113-116.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__113_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2,\ldots$) par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

dépend, elle aussi, de la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, et de cette autre somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

relative aux nombres entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

Il est évident que l'on a $N = 0$ quand n est impair et de la forme $4l + 3$, comme aussi lorsque n est impairement pair, $n = 2m$. Les autres cas doivent donc seuls nous occuper.

2. Soit d'abord n impair de la forme $4l + 1$, $n = m = 4l + 1$: on aura

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$N = \zeta_1(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 5$.

Soit, par exemple, $m = 1$. C'est la première formule qu'il faudra employer : elle donnera

$$N = 2,$$

et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$

qui fournit deux représentations.

Soit ensuite $m = 9$. Il nous viendra

$$N = 13 - 3 = 10.$$

Or le nombre 9 a en effet dix représentations, contenues dans ces trois équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8\,(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8\,(\pm 1)^2.$$

Soit enfin $m = 17$. Nous aurons

$$N = 18 + 2 = 20.$$

Or on trouve pour le nombre 17 vingt représentations, au moyen des équations

$$17 = (\pm 1)^2 + 4\,(\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8\,(\pm 1)^2 + 8\,(\pm 1)^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 8\,(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8\,(\pm 1)^2.$$

Notre première formule est donc vérifiée.

Passons à la seconde, c'est-à-dire aux entiers $8k + 5$. Et d'abord soit $m = 5$. Nous trouverons

$$N = 6 - 2 = 4.$$

Or l'équation

$$5 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2$$

fournit effectivement quatre représentations.

Soit ensuite $m = 13$. Il nous viendra

$$N = 14 + 6 = 20.$$

Or je trouve pour le nombre 13 vingt représentations au moyen des équations

$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications.

3. Maintenant soit n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2$$

ne pourra avoir lieu qu'en prenant x pair. Soit donc

$$x = 2x_1,$$

partant

$$2^\alpha m = 4x_1^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2.$$

En divisant par 4, on retombera sur l'équation

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + 2(z^2 + t^2),$$

discutée déjà (dans le cahier de juillet 1860).

Nous serons donc conduits, pour le nombre N des représentations d'un nombre pairement pair, n ou $2^\alpha m$, par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

qui nous occupe ici, aux conclusions suivantes.

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 4 a quatre représentations. Elles sont fournies par les équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$\mathbf{N} = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 8 doit avoir huit représentations. Les équations

$$8 = (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2,$$

vérifient ce fait.

3° Pour n divisible par 16, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on a

$$\mathbf{N} = 24\zeta_1(m),$$

quelque grand que α puisse devenir.

La forme linéaire de m n'influe, comme on voit, sur l'expression de **N**, que quand il s'agit des représentations d'un nombre impair. On n'a point à la prendre en considération quand on s'occupe d'un nombre pair.