JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 148-149.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__148_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2.$$

Voici ce que nous avons trouvé à cet égard.

Soit d'abord n impair, $n = m$. On a évidemment $N = 0$ si m est de la forme $8k - 1$. Mais pour m de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k - 3$, on a

$$N = 2\omega_1(m),$$

et, pour $m = 8k + 3$,

$$N = 4\omega_1(m),$$

la fonction $\omega_1(m)$ étant définie à l'ordinaire par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}} d.$$

Soit ensuite n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

exigeant alors que x soit pair, $x = 2x_1$, se ramènera à celle-ci :

$$2^{\alpha - 1} m = y^2 + z^2 + 2x_1^2 + 4t^2,$$

qui a été discutée dans le cahier de mars. D'après cela, on obtient, pour la détermination du nombre N des représentations d'un entier pair n, par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

les équations suivantes :

En premier lieu, pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = 4\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

En second lieu, pour n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$, on a

$$N = 2(2^\alpha - 1)\omega_1(m),$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^\alpha + 1)\omega_1(m),$$

si $m = 8k \pm 3$. La forme linéaire de m a donc alors de l'influence.