JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 165-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__165_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné n ou $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2,$$

dépend, elle aussi, de la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m et de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

Soit d'abord n impair, $n = m$. On a évidemment

$$N = 0$$

si $m = 8k + 7$; mais je trouve

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 8k + 3$, et

$$N = 3\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 4l + 1$.

Ainsi, pour $m = 3$, on a

$$N = 2\zeta_1(3) = 8,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 11$, il vient

$$N = 2\zeta_1(11) = 24:$$

les équations

$$11 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$11 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$11 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2,$$

confirment ce fait.

Pour $m = 19$, on trouve

$$N = 2\zeta_1(19) = 40,$$

ce qui est exact puisque l'on a

$$19 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2,$$
$$19 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2,$$
$$19 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2,$$
$$19 = (\pm 3)^2 + (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Passant aux entiers $4l + 1$, je fais d'abord

$$m = 1 = 1^2 + 4.0^2,$$

et j'ai alors

$$N = 3(1 + 1) = 6,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$1 = 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

où l'on peut mettre $(\pm 1)^2$ à trois places différentes.

Pour $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$, notre formule donne

$$N = 3(6 + 2) = 24,$$

et en effet l'équation

$$5 = 0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 16.0^2$$

fournit vingt-quatre représentations du nombre 5 en opérant les six permutations que comportent les trois premiers termes du second membre.

Pour $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$, la valeur de N est

$$N = 3(13 - 3) = 30 :$$

on la vérifie au moyen des équations

$$9 = 3^2 + 0^2 + 0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations voulues.

Soit, enfin, $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$. Il viendra

$$N = 3(18 + 2) = 60.$$

Or on s'assure aisément que cette valeur est exacte, au moyen des équations

$$17 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 16.1^2,$$
$$17 = 1^2 + 4^2 + 0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

Prenons, en second lieu, n impairement pair, $n = 2m$. On a alors

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$, mais

$$N = 6\left[\zeta_1(m) + \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = 6\left[\zeta_1(m) - \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 5$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$.

Ici cesse l'influence de la forme linéaire de m. En effet, pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, je trouve que toujours

$$N = 12\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m)$$

si grand que α puisse devenir.