JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 1-4.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA FORME

$X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n, on demande une règle simple pour calculer le nombre N des représentations de n par la forme

$$X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2,$$

où X, Y, Z, T sont des entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs. Nous ferons comme à l'ordinaire $n = 2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. On comprend facilement que les divers cas à examiner se ramèneront tous à la considération de la forme

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2).$$

Nous supposons donc connus du lecteur les résultats que nous avons obtenus dans le cahier de juillet 1860 pour cette dernière forme, résultats qui du reste découlent eux-mêmes, ainsi qu'on l'a vu, des théorèmes de Jacobi concernant les représentations par une somme de quatre carrés.

Soit d'abord n impair, $n = m$, en sorte qu'il s'agisse du nombre N des solutions de l'équation

$$m = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$$

dans laquelle X ne pourra évidemment être qu'impair. En l'écrivant ainsi

$$m = X^2 + (2T)^2 + 2(Y^2 + Z^2),$$

on verra qu'elle ne diffère de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

où l'un des entiers x, y sera pair, l'autre impair, qu'en ce que le carré impair X^2 est toujours le premier, et le carré pair $(2T)^2$ toujours le second, ce qui réduit à moitié le nombre des solutions. Mais ce nombre, pour

$$m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

a été trouvé égal à $4\zeta_1(m)$, $\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m. Le nombre N des solutions de l'équation

$$m = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$$

est donc fourni par la formule

$$N = 2\zeta_1(m).$$

Soit à présent n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$$

X devra être pair. Soit donc

$$X = 2U.$$

Il s'ensuivra

$$2^{\alpha-1}m = 2U^2 + Y^2 + Z^2 + 2T^2,$$

équation qui revient à

$$2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

et qui à son tour reproduirait par des opérations inverses celle dont elle a été déduite.

Ayant donc trouvé pour tous les cas qui peuvent se présenter le nombre des solutions de l'équation

$$2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

nous en conclurons, pour n pair $= 2^{\alpha}m$, le nombre N des solutions de notre équation

$$n = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2.$$

Pour n impairement pair, $n = 2m$, nous aurons ainsi

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Pour N divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, il nous viendra

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin pour n divisible par 8, avec quotient pair ou impair, $n = 2^{\alpha}m$, $\alpha > 2$, on doit prendre

$$N = 24\zeta_1(m).$$

2. Supposons à présent qu'on veuille chercher à part le nombre M des solutions *propres* de l'équation

$$n = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2,$$

c'est-à-dire le nombre M des solutions qui subsistent en exigeant que les valeurs simultanées de X, Y, Z, T ne soient jamais divisibles par un même entier > 1. En continuant à faire $n = 2^\alpha m$, il faudra, comme dans le cahier de juillet 1860, substituer à la fonction numérique $\zeta_1(m)$ la fonction $Z_1(m)$ ainsi définie : l'expression de m en facteurs premiers étant $a^\alpha b^\beta \ldots c^\omega$, on prend

$$Z_1(m) = (a^\alpha + a^{\alpha-1})(b^\beta + b^{\beta-1})\ldots(c^\omega + c^{\omega-1}).$$

Ajoutons que pour $m = 1$, nous faisons $Z_1(m) = 1$.

Cela posé, pour n impair, $n = m$, on a

$$M = 2Z_1(m).$$

Pour n impairement pair, $n = 2m$,

$$M = 4Z_1(m).$$

Pour $n = 4m$,

$$M = 6Z_1(m).$$

Pour $n = 8m$,

$$M = 20Z_1(m).$$

Pour $n = 16m$,

$$M = 16Z_1(m).$$

Enfin pour n divisible par 32, c'est-à-dire pour $n = 2^\alpha m$, avec $\alpha > 4$, on a généralement

$$M = 0;$$

cela tient à ce que les entiers X, Y, Z, T, ne peuvent plus alors être que pairs, c'est-à-dire tous divisibles par 2.