JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur la forme** $x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2$

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 7 (1862), p. 201-204.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__201_0>

# SUR LA FORME
# $x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Étant donné un entier $n$ pair ou impair (que nous représenterons par $2^{\alpha}m$, $m$ étant impair et l'exposant $\alpha$ pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de $n$ par la forme

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

où $x$, $y$, $z$, $t$ sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. La valeur de N dépend, comme on va le voir, de la fonction $\omega_1(m)$ définie, au moyen des diviseurs conjugués $d$, $\delta$ de l'entier impair $m = d\delta$, par l'équation

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d,$$

et aussi de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

relative aux entiers positifs $r$ qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier $u$, quand il n'est pas zéro, doit être pris positivement comme négativement.

Soit d'abord $n$ impair, $n = m$. Il est évident que l'on a $N = 0$ si $m$ est de la forme $4l + 3$. Il n'en est plus de même quand $m$ est de la forme $4l + 1$. Je trouve, en effet,

$$N = 2\left[\omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r\right]$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = 2\omega_1(m)$$

si $m = 8k - 3$.

Prenons d'abord des entiers $8k + 1$, et faisons $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$; notre formule donne $N = 4$, ce qui est confirmé par les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$

puisqu'elles fournissent pour l'entier 1 quatre représentations.

Pour $m = 9$, comme on a

$$9 = 3^2 + 2.0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

il vient

$$N = 2(7 - 3 + 2) = 12.$$

Les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

donnent en effet pour l'entier 9 douze représentations.

Soit enfin $m = 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2$. Il nous viendra

$$N = 2(18 - 6) = 24;$$

et cette valeur est aisée à vérifier au moyen des équations

$$17 = 1^2 + 4^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 3^2 + 0^2 + 8.1^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 0^2 + 8.0^2 + 16.1^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

Passons aux entiers $8k-3$, en faisant $m=5$. Notre formule pour ce cas donne $N = 2\omega_1(5) = 8$ : cela est vérifié par les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 13$, il vient

$$N = 2\omega_1(13) = 24.$$

Les équations

$$13 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$13 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$13 = (\pm 2)^2 + (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$

confirment ce fait.

Actuellement supposons $n$ pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

se ramènera alors à celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Or cette dernière équation a été discutée dans le cahier de mars. De là résultent pour le nombre N des représentations d'un entier pair $n$ par la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

les conséquences suivantes.

Pour $n$ impairement pair, $n = 2m$, on a évidemment $N = 0$ si

$m = 4l + 3$. Mais

$$N = 4\omega_1(m)$$

si $m = 4l + 1$.

Pour $n$ divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 4\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de $m$.

Enfin pour $n$ divisible par 8, quel que soit le quotient, c'est-à-dire pour $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, on a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.