JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant la quatrième puissance d'un nombre premier de la forme $8\mu + 3$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 23-24.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__23_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LA QUATRIÈME PUISSANCE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $8\mu + 3$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné, de la forme $8\mu + 3$. Le théorème que nous voulons énoncer au sujet de la quatrième puissance de ce nombre consiste en ce que l'on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m^4 = 16x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers positifs, x pair ou impair à volonté, y naturellement impair. Quant à p, c'est un nombre premier (de la forme $8\nu + 1$) qui ne divise pas y. On admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si de la quatrième puissance d'un nombre premier donné de la forme $8\mu + 3$, on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$16.1^2,\ 16.2^2,\ 16.3^2,\ 16.4^2,\ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier (naturellement de la forme $8\nu + 1$) qui ne divise pas y.

Je me bornerai au seul exemple de

$$m = 3,$$

c'est-à-dire de $m^4 = 81$, pour lequel je trouve l'équation canonique

$$81 = 16.2^2 + 17.1^2.$$

Le reste 65 obtenu en retranchant 16 de 81 est le produit de 13 par 5 et n'a pas la forme voulue.

Si l'on posait, sous les mêmes conditions pour m, x, y, p, l'équation

$$m^2 = 16x^2 + p^{4l+1}y^2.$$

où le premier membre est le carré au lieu de la quatrième puissance de m, le nombre des solutions pourrait se réduire à zéro : il serait nul pour $m = 3$, par exemple. En tout cas il serait constamment pair. Il suit de là que le nombre des solutions de notre équation

$$m^4 = 16x^2 + p^{4l+1}y^2$$

resterait impair (par conséquent au moins égal à l'unité) si l'on exigeait que les entiers x, y fussent premiers entre eux.

Cet article complète en un certain sens l'article précédent; mais il y aurait bien des choses à ajouter. Nous reviendrons un jour sur toutes ces questions, et il ne nous sera pas inutile d'avoir présenté d'avance des exemples simples.