JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Réponse de M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 41-44.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__41_0>

RÉPONSE DE M. LIOUVILLE.

« Je vous remercie de votre bonne Lettre, et je vous répondrai longuement dans le *Journal de Mathématiques*, où l'on ne manquera pas de reproduire vos intéressants résultats. Nous tendons à un but semblable, mais par des voies bien différentes, qui pourtant se rattachent toujours aux travaux de Jacobi. En effet mes *formules générales*, ainsi que je l'ai indiqué au commencement de mon septième article (*Journal de Mathématiques*, cahier d'avril 1858), donnent naissance à des équations entre des séries qui contiennent comme cas particuliers celles de la théorie des fonctions elliptiques. Cette théorie (que vous employez directement) se trouve donc ici remplacée pour moi par des formules appartenant à l'algèbre la plus élémentaire, obtenues au moyen de certaines identités des plus simples, et renfermant des fonctions arbitraires sans aucune condition de continuité. Les variables que je considère sont en effet des nombres entiers, et les fonctions n'ont besoin d'être définies que par rapport à ces nombres entiers pris comme valeurs des variables : le reste est à volonté. Je ne puis dès lors avoir aucune peine à introduire dans mes recherches les fonctions numériques que vous nommez incomplètes. Permettez-moi de vous rappeler que je vous ai donné à ce sujet, il y a longtemps déjà, un exemple remarquable. Prenez dans mon premier article (*Journal de Mathématiques*, cahier d'avril 1858) la formule

$$\Sigma[f(d'-d'')-f(d'+d'')]=\Sigma d[f(0)-f(2d)],$$

qui se rapporte au mode de partition du double d'un entier donné ($m=d\delta$) marqué par la formule

$$2m=d'\delta'+d''\delta'',$$

où d', δ', d'', δ'' sont comme d et δ des entiers impairs positifs. La fonction $f(x)$ doit être paire. Cette condition sera remplie si nous supposons $f(x)$ nulle quand x atteint ou dépasse une valeur numérique donnée a, c'est-à-dire quand $x^2 \geqq a^2$, et $f(x)$ égale à 1 quand $x^2 < a^2$. Or vous en conclurez de suite pour la fonction numérique exprimant la somme des diviseurs de m qui ne sont pas inférieurs à

$\frac{a}{2}$ cette propriété curieuse d'exprimer aussi le nombre des solutions de l'équation $2m = d'\delta' + d''\delta''$ pour lesquelles on a numériquement

$$d' - d'' < a, \quad d' + d'' \geqq a.$$

» En prenant $a = 2\sqrt{m}$, la fonction numérique dont je viens de parler deviendra une des fonctions de M. Kronecker. Vous obtiendrez d'autres résultats dignes d'attention en prenant $f(x) = 0$, sauf dans les cas où l'entier x est $\equiv \pm a (\text{mod. } p)$, a et p étant des nombres donnés : on fera alors $f(x) = 1$. Des remarques analogues s'appliquent à toutes mes formules générales.

» C'est en 1857 que j'ai trouvé ces formules. Depuis cette époque, accablé d'occupations et sans cesse dérangé dans un travail qui demande une tête libre, je n'y ai pour ainsi dire rien ajouté. Les douze articles que j'ai publiés ne contiennent pas la moitié de ce que je savais il y a quatre ans; et encore je mets de côté les applications particulières qui s'offrent en foule, mais qui ne peuvent avoir tout leur prix que par le choix qu'on en fait et par l'ordre qu'on y établit. Permettez-moi donc de transcrire ici deux formules nouvelles, que je tire de mes papiers à cause du rapport qu'elles ont avec quelques-unes de vos transformations analytiques.

» 1° Soit m un entier impair donné. Posons de toutes les manières possibles, en nombres entiers,

$$m = 2m'^2 + d''\delta'',$$

puis

$$2m = m_1^2 + d_2\delta_2,$$

en prenant d'', δ'', d_2, δ_2 impairs et positifs, m_1 impair positif ou négatif, m' indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. Si la fonction $\mathfrak{F}(x, y, z)$ remplit, pour toutes les valeurs de x, y, z à employer, les conditions suivantes :

$$\mathfrak{F}(-x, y, z) = -\mathfrak{F}(x, y, z), \quad \mathfrak{F}(x, -y, -z) = \mathfrak{F}(x, y, z),$$

on aura

$$2\sum \mathfrak{F}(d'' + 2m', \delta'' - 2m', 2m' + d'' - \delta'') = \sum \mathfrak{F}\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, m_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right).$$

Je vous engage à prendre pour exemple

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = \sin(xt),$$

t désignant une constante arbitraire.

» 2° Soit m un entier impair donné, de la forme $4g + 3$. Posons de toutes les manières possibles, en nombres entiers,

$$m = m_1^2 + 2d_2\delta_2,$$

puis

$$m = 4m'^2 + d''\delta'',$$

où d_2, δ_2, d'', δ'' sont impairs et positifs, $d'' < \delta''$, m_1 impair positif ou négatif, enfin m' indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. Si la fonction $\mathfrak{F}(x, y, z)$ est paire en x et en y, mais impaire en z, on aura

$$\sum \mathfrak{F}(d_2 - m_1,\ \delta_2 + m_1 - d_2,\ m_1)$$
$$= \sum \mathfrak{F}\left(2m', \frac{\delta'' - d''}{2}, d'' + 2m'\right) - \sum \mathfrak{F}\left(\frac{\delta'' + d''}{2}, \frac{\delta'' - d''}{2}, d'' + 2m'\right).$$

» Ici vous voyez figurer explicitement la condition $d'' < \delta''$. On n'a mis partout qu'un signe sommatoire, quoiqu'il s'agisse de sommes multiples : cela ne vous arrêtera pas. Je terminerai par un théorème (que vos formules donnent aussi) concernant la fonction numérique $\rho'(n)$, qui marque l'excès du nombre des diviseurs de n de la forme $4\mu + 1$ sur celui des diviseurs de la forme $4\mu + 3$, en se bornant aux diviseurs moindres que $\sqrt{n}$, tandis que je représente cet excès par $\rho(n)$ quand on considère tous les diviseurs. Soit m un nombre entier donné, de la forme $8r + 3$. D'après la propriété connue de $\rho(n)$, relativement à la décomposition d'un nombre en deux carrés, il est clair que

$$\rho\left(\frac{m - 1^2}{2}\right) + \rho\left(\frac{m - 3^2}{2}\right) + \ldots$$

est le nombre des solutions de l'équation

$$m = i^2 + i'^2 + i''^2,$$

où i, i', i'' sont impairs et positifs. Or je trouve que ce nombre s'exprime aussi au moyen de $\rho'(n)$, par

$$\rho'(m) + 2\rho'(m - 4.1^2) + 2\rho'(m - 4.2^2) + \ldots.$$

Mais en voilà assez pour le moment. Je suis, comme vous, dans les examens; et d'ailleurs votre Lettre est déjà un peu longue pour les *Comptes rendus :* je dois me restreindre et vous laisser prendre toute la place que votre travail mérite. »