JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STOFFEL

BACH

De l'intégrabilité des fonctions différentielles d'un ordre supérieur au premier

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 49-61.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__49_0>

DE

L'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER;

PAR MM. STOFFEL ET BACH.

1. On sait que la variation de l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y, y', y'', \ldots)\, dx,$$

dans laquelle y', y'', etc., sont les dérivées des différents ordres de y considérée comme fonction de x, se décompose en deux parties, l'une dépendant essentiellement des variations aux limites, l'autre dépendant des variations entre les limites.

Cette décomposition, ainsi que l'ont montré depuis longtemps Euler et Lagrange, permet de trouver d'une manière aussi simple qu'élégante la condition d'intégrabilité d'une expression de la forme

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx,$$

contenant x, y et ses dérivées jusqu'à celles de l'ordre n inclusivement.

Nous allons, pour entrer en matière, établir d'abord cette condition d'intégrabilité, en reproduisant à peu de chose près le raisonnement d'Euler.

2. Dire que l'expression ci-dessus est intégrable, c'est dire que son intégrale peut être trouvée indépendamment de la relation arbitraire qu'il faut en général supposer entre y et x pour rendre l'intégration possible par une quadrature, ou que l'on a, en d'autres termes

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{F}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - \mathrm{F}(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}).$$

Posons

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \mathrm{V}$$

et

$$\mathrm{d}\mathrm{V} = \mathrm{X}\,\mathrm{d}x + \mathrm{Y}\,\mathrm{d}y + \mathrm{Y}'\,\mathrm{d}y' + \ldots + \mathrm{Y}^{n}\,\mathrm{d}y^{n},$$

expression dans laquelle

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \quad \mathrm{Y} = \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \quad \mathrm{Y}' = \frac{d\mathrm{V}}{dy'}, \ldots, \quad \mathrm{Y}^{(n)} = \frac{d\mathrm{V}}{dy^{(n)}},$$

en désignant les différentielles partielles par la lettre d, et réservant le caractère d pour indiquer les différentielles totales.

Écrivons ensuite la formule connue de la variation d'une intégrale définie; elle est, en supposant que y et ses dérivées, jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, gardent la même valeur pour $x = x_0$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\int_{x_0}^{x} \mathrm{V}\,\mathrm{d}x = {} & \mathrm{Y}^{(n)}\,\delta y^{(n-1)} + \left(\mathrm{Y}^{(n-1)} - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x}\right)\delta y^{(n-2)} \\
& + \left(\mathrm{Y}^{(n-2)} - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}^{(n-1)}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x^2}\right)\delta y^{(n-3)} + \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots \pm \frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)\delta y \\
& + \Big[\mathrm{V} - \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} - \ldots\right) y' \\
& \qquad - \left(\mathrm{Y}'' - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) y'' - \ldots - \mathrm{Y}^{(n)} y^{(n)}\Big]\,\delta x \\
& + \int_{x_0}^{x}\left(\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots \pm \frac{\mathrm{d}^n\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x^n}\right)\omega\,dx.
\end{aligned}\right.$$

Mais si l'on a

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{V}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - \mathrm{F}(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}),$$

la variation du second membre, d'après nos hypothèses, dépendra uniquement des variations à la limite supérieure, et il devra en être de même de celle de $\int_{x_0}^{x} \mathrm{V}\,\mathrm{d}x$. Puisque d'ailleurs cette variation contient

$$\int_{x_0}^{x} \left(\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} + \ldots\right) \omega\,\mathrm{d}x,$$

intégrale qui dépend évidemment des variations entre les limites, il faudra que par la nature de la fonction V cette intégrale soit identiquement nulle, ou que l'on ait

$$\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} + \ldots = 0. \tag{2}$$

Euler démontre aussi que l'équation (2) étant identiquement vérifiée, la fonction $\mathrm{V}\,\mathrm{d}x$ est intégrable. Sa démonstration a été modifiée avec avantage par M. Bertrand, dans un Mémoire inséré au XXVIII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. On trouve aux pages 255 et 265 de ce même Mémoire des méthodes d'une application facile pour arriver à l'intégrale.

Bien que cette question de l'intégrabilité des fonctions différentielles ait eu le privilége d'attirer l'attention des géomètres les plus éminents, il ne nous a pas semblé hors de propos de traiter le sujet à un point de vue dont il est à peine fait mention dans les ouvrages et Mémoires que nous avons pu consulter, et de faire voir qu'*en partant de l'équation de condition et en s'appuyant sur des considérations uniquement tirées du calcul différentiel, on peut mettre* $\mathrm{V}\,\mathrm{d}x$ *sous la forme d'une fonction différentielle du premier ordre renfermant* $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *considérées comme variables indépendantes et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité bien connues de ces fonctions.*

Cette forme, à laquelle on est naturellement conduit en ayant égard à l'équation (2) et en changeant dans la formule (1) les δ en d, permet de trouver immédiatement l'intégrale par des quadratures.

3. Écrivons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V}\,\mathrm{d}x = {} & \mathrm{Y}^{(n)}\,\mathrm{d}y^{(n-1)} + \left(\mathrm{Y}^{(n-1)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y^{(n-2)} \\ & + \left(\mathrm{Y}^{(n-2)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-1)}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}y^{n-3} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots\right)\mathrm{d}y \\ & + \left[\mathrm{V} - \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)y' - \left(\mathrm{Y}'' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)y'' - \ldots \right. \\ & \left. \qquad - \mathrm{Y}^{(n)}\,y^{(n)}\right]\mathrm{d}x, \end{aligned}\right.$$

ce qui d'ailleurs est une identité, en ayant égard aux relations

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x,\ldots,\quad \mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)}\,\mathrm{d}x.$$

Pour faire voir que, l'équation (2) étant satisfaite, $\mathrm{V}\,dx$ mis sous cette forme est la différentielle du premier ordre d'une fonction de x, $y, y',\ldots, y^{(n-1)}$ considérées comme variables indépendantes, prouvons d'abord que *les coefficients de* $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}y',\ldots, \mathrm{d}y^{(n-1)}$ *dans cette expression ne contiennent pas de dérivées de y d'un ordre supérieur à $n-1$*.

Écrivons à cet effet l'équation (2) sous la forme

$$\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots\right) = 0,$$

et faisons observer que Y étant une dérivée partielle de la fonction V, y n'y entrera pas avec un indice supérieur à n; donc, puisque l'équation (2) a lieu identiquement,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots\right)$$

ne devra pas non plus contenir $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)},\ldots$, et comme la différentiation totale augmente d'une unité l'indice des y,

$$\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots$$

ne devra pas renfermer y avec un indice supérieur à $n-1$.

Mettons actuellement l'équation (2) sous la forme

$$Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \ldots\right) = 0,$$

et faisons observer que $Y - \frac{dY'}{dx}$ ne pouvant contenir y avec un indice supérieur à $n+1$, il doit en être de même pour

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \ldots\right);$$

mais deux différentiations totales augmentent de deux unités l'indice des y, donc

$$Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \frac{d^2 Y^{\text{iv}}}{dx^2} - \ldots$$

ne saurait contenir y avec un indice supérieur à $n-1$.

En poursuivant le même raisonnement, on arrivera jusqu'à $Y^{(n)}$ qui ne pourra non plus contenir y avec un indice supérieur à $n-1$, car si la fonction V provient d'une différentiation totale effectuée en regardant $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ comme des fonctions de x, elle est nécessairement linéaire en $y^{(n)}$, et dès lors sa dérivée partielle par rapport à $y^{(n)}$ ne renferme pas cette variable. Rien d'ailleurs ne s'oppose à ce que l'on étende jusqu'à $Y^{(n)}$ le raisonnement employé plus haut. Quant au coefficient de dx, il ne contiendra pas non plus $y^{(n)}$, car le terme de V où entre cette variable, n'est autre que $Y^{(n)} y^{(n)}$.

Après avoir montré que l'expression contenue dans le second membre de l'équation (3) *ne renferme pas les dérivées de y d'un ordre supérieur à $n-1$*, il nous reste à faire voir qu'*elle satisfait aux conditions connues nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité des différentielles du premier ordre*.

Mais avant cela établissons une formule dont nous ferons un usage continuel dans tout ce qui va suivre.

4. Cette formule est la suivante

$$\frac{d}{dy^{(p)}} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\,.}{dx} \cdot \frac{du}{dy^{(p)}} + \frac{du}{dy^{(p-1)}}, \tag{4}$$

dans laquelle u est une certaine fonction de x, y, y',..., $y^{(p)}$, etc. Pour y arriver, différentions totalement la fonction u, et nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}y' + \frac{du}{dy'}y'' + \ldots + \frac{du}{dy^{(p-1)}}y^{(p)} + \ldots,$$

puis différentions partiellement par rapport à $y^{(p)}$,

$$\frac{d}{dy^{(p)}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{d^2u}{dx\,dy^{(p)}} + \frac{d^2u}{dy\,dy^{(p)}}y' + \frac{d^2u}{dy'\,dy^{(p)}}y'' + \ldots$$
$$+ \frac{d^2u}{dy^{(p-1)}\,dy^{(p)}}y^{(p)} + \ldots + \frac{du}{dy^{(p-1)}}.$$

Mais l'ensemble des termes du second membre, à l'exception du dernier, est précisément la différentielle totale de $\frac{du}{dy^{(p)}}$; on a donc

$$\frac{d}{dy^{(p)}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{du}{dy^{(p)}} + \frac{du}{dy^{(p-1)}},$$

ce qui est la formule (4).

Nous ne ferons usage que de cette formule, mais il est facile de voir que l'on a en général

$$\frac{d}{dy^{(p)}}\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}x^m} = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\cdot\frac{du}{dy^{(p)}} + \mathrm{C}_1\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\cdot\frac{du}{dy^{(p-1)}} + \mathrm{C}_2\frac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}x^{m-2}}\frac{du}{dy^{(p-2)}} + \ldots$$
$$+ \mathrm{C}_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{du}{dy^{(p-m+1)}} + \frac{du}{dy^{(p-m)}},$$

1, C_1, C_2, etc., étant les coefficients de la puissance $m^{\text{ième}}$ du binôme. Il est bien entendu que l'on devra remplacer, s'il y a lieu, $y^{(0)}$ par y et supprimer tous les termes qui suivent.

5. Revenons à notre sujet et comparons d'abord le premier terme de l'expression (3) avec tous les suivants. Il s'agit de prouver que l'on a

$$\frac{d\mathrm{Y}^{(n)}}{dy^{(n-i-1)}} = \frac{d}{dy^{(n-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right).$$

Pour cela, différentions par rapport à $y^{(n)}$ le coefficient qui suit immédiatement celui que nous considérons, et d'après ce qui a été dit (nº 3) nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dy^{(n)}}\left(Y^{(n-i-1)} - \frac{\mathrm{d}Y^{(n-i)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0,$$

ou encore, en vertu de la formule (4),

$$\frac{dY^{(n-i-1)}}{dy^{(n)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{d}{dy^{(n)}}\left(Y^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}Y^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)$$
$$- \frac{d}{dy^{(n-1)}}\left(Y^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}Y^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0,$$

ce qui revient à

$$\frac{dY^{(n)}}{dy^{(n-i-1)}} = \frac{d}{dy^{n-1}}\left(Y^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}Y^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right),$$

car

$$\frac{dY^{(n-i-1)}}{dy^{(n)}} = \frac{dY^{(n)}}{dy^{(n-i-1)}},$$

et d'ailleurs, en vertu du même nº 3,

$$\frac{d}{dy^{(n)}}\left(Y^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}Y^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0.$$

Pour comparer le premier terme avec l'avant-dernier, on différentiera l'équation (2) partiellement par rapport à $y^{(n)}$, et l'on aura

$$\frac{dY}{dy^{(n)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{d}{dy^{(n)}}\left(Y' - \frac{\mathrm{d}Y''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) - \frac{d}{dy^{(n-1)}}\left(Y' - \frac{\mathrm{d}Y''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0,$$

ce qui revient, comme on le verra sans peine, à

$$\frac{dY^{(n)}}{dy} = \frac{d}{dy^{(n-1)}}\left(Y' - \frac{\mathrm{d}Y''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right).$$

C'est précisément l'égalité qu'il s'agissait d'établir.

Il est également facile de comparer tous les termes à l'avant-dernier, et de montrer que l'on a

$$\frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = \frac{d}{dy}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right).$$

Supposons que l'égalité des dérivées ait lieu entre l'avant-dernier terme et celui qui précède le terme considéré, lequel commence par $\mathrm{Y}^{(n-k+1)}$. Différentions l'équation de condition par rapport à $y^{(n-k)}$, et il viendra

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dy^{(n-k)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{d}{dy^{(n-k)}}\cdot\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) - \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0,$$

ce qui peut, d'après notre hypothèse, s'écrire

$$\frac{d\,\mathrm{Y}^{(n-k)}}{dy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{d}{dy}(\mathrm{Y}^{(n-k+1)} - \ldots) = \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)$$

ou encore

$$\frac{d}{dy}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right),$$

et puisqu'on a déjà comparé le premier terme avec l'avant-dernier, l'égalité est générale.

6. Considérons actuellement deux termes quelconques, et prouvons que l'on a

$$\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right).$$

Admettons que l'on ait

$$(5)\quad \frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k+1)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+2)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = \frac{d}{dy^{(n-k)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right),$$

ce qui revient à dire que l'égalité des dérivées partielles a été vérifiée pour le terme antérieur à celui qui commence par $\mathrm{Y}^{(n-k)}$ comparé avec tous ceux qui suivent, et posons

$$\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)$$

$$= \frac{d\,\mathrm{Y}^{(n-k)}}{dy^{(n-i-1)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k+1)} - \ldots\right) - \frac{d}{dy^{(n-i-2)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k+1)} - \ldots\right),$$

cela peut s'écrire, en vertu de l'équation (5),

$$\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)$$

$$= \frac{d\,\mathrm{Y}^{(n-i-1)}}{dy^{(n-k)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{d}{dy^{(n-k)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) - \frac{d\,\mathrm{Y}^{(n-i-1)}}{dy^{(n-k)}}$$

$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{d}{dy^{(n-k)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \ldots\right) + \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right).$$

Effectuant les réductions, on tombe sur la formule qu'il s'agissait de démontrer, savoir

$$(6)\quad \frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right).$$

Or l'égalité des dérivées partielles ayant été prouvée pour le premier coefficient comparé avec tous les suivants, jusqu'à l'avant-dernier inclusivement, ainsi que pour l'avant-dernier comparé avec tous ceux qui précèdent, on conclura de la formule (6) l'égalité des dérivées pour un coefficient quelconque comparé à tous ceux qui suivent, à l'exception du dernier dont nous n'avons pas encore parlé jusqu'ici.

7. Pour faire enfin la comparaison d'un terme quelconque avec le dernier, il faut démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)$$

$$= \frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left[\mathrm{V} - \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)y' - \left(\mathrm{Y}'' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)y'' - \ldots - \mathrm{Y}^{(n)}y^{(n)}\right].$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots = \mathrm{U}.$$

En vertu des relations établies plus haut, l'égalité qu'il s'agit de vérifier devient

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{U}}{dx} &= \frac{d\mathrm{V}}{dy^{(n-i-1)}} - \frac{d\mathrm{U}}{dy}y' - \frac{d\mathrm{U}}{dy'}y'' - \ldots \\ &\quad - \frac{d\mathrm{U}}{dy^{(n-1)}}y^{(n)} - \left(\mathrm{Y}^{(n-i-1)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) \\ &= \mathrm{Y}^{(n-i-1)} - \frac{d\mathrm{U}}{dy}y' - \frac{d\mathrm{U}}{dy'}y'' - \ldots - \frac{d\mathrm{U}}{dy^{(n-1)}}y^{(n)} - \mathrm{Y}^{(n-i-1)} + \frac{d\mathrm{U}}{dx}.\end{aligned}$$

Réduisant et groupant convenablement les termes, nous trouvons

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{U}}{\mathrm{d}x} = \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{U}}{dy}y' + \frac{d\mathrm{U}}{dy'}y'' + \ldots + \frac{d\mathrm{U}}{dy^{(n-1)}}y^{(n)},$$

ce qui est une identité.

Ainsi se trouve établi très-simplement que $\mathrm{V}dx$ peut être mis sous la forme d'une différentielle du premier ordre quand l'équation

$$\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots = 0$$

est identiquement vérifiée; et en intégrant cette fonction du premier ordre par les procédés connus, on arrive à l'intégrale demandée.

Il est facile actuellement d'écrire l'intégrale de la fonction différentielle donnée. En posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots &= \varphi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ \mathrm{Y}'' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x} + \ldots &= \varphi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{Y}^{(n-1)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x} &= \varphi_{(n-1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ \mathrm{Y}^{(n)} &= \varphi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),\end{aligned}$$

l'intégrale sera

$$\int \mathrm{V}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} [\mathrm{V} - y'\varphi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - y''\varphi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - \ldots$$
$$- y^{(n)}\varphi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})]\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{y_0}^{y} \varphi_1(x_0, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,\mathrm{d}y$$
$$+ \int_{y'_0}^{y'} \varphi_2(x_0, y_0, y', y^{(n-1)})\,\mathrm{d}y' + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int_{y_0^{(n-2)}}^{y^{(n-2)}} \varphi_{(n-1)}(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y^{(n-2}, y^{(n-1)})\,\mathrm{d}y^{(n-2)}$$
$$+ \int_{y_0^{(n-1)}}^{y^{(n-1)}} \varphi_{(n)}(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-2)}, y^{n-1})\,\mathrm{d}y^{(n-1)}.$$

8. Pour éclaircir ceci par un exemple, prenons la fonction différentielle

$$\mathrm{V} = 2x^2 + y^2 + 2xyy' + y'^2 + yy'' + xy'''.$$

Nous aurons

$$\mathrm{Y} = 2y + 2xy' + y'', \quad \mathrm{Y}' = 2xy + 2y', \quad \mathrm{Y}'' = y, \quad \mathrm{Y}''' = x,$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}'}{\mathrm{d}x} = 2y + 2xy' + 2y'', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} = y', \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} = y'',$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x^3} = 0.$$

L'équation de condition est vérifiée, comme il est aisé de s'en convaincre, et l'intégrale cherchée est

$$\int_{x_0}^{x} (2x^2 + y^2 + y'')\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} (2x_0 y + y')\,\mathrm{d}y$$
$$+ \int_{y'_0}^{y'} (y_0 - 1)\,\mathrm{d}y' + \int_{y''_0}^{y''} x_0\,\mathrm{d}y'',$$

ce qui donne, en faisant les réductions,

$$\frac{2x^3}{3} + y^2 x + y'' x + yy' - y' + C.$$

9. On peut encore donner à $\int \mathrm{V}\,dx$ une autre forme, analogue à celle qu'a donnée Poisson, mais dans laquelle les intégrales sont plus simples. En effet, puisqu'il n'y a dans l'expression finale qu'une seule constante, on peut prendre zéro pour les limites inférieures des intégrales dans le cas où cette valeur attribuée aux limites ne rend infinie aucune des fonctions φ_1, φ_2, φ_3, etc., et écrire, en renversant l'ordre des intégrations,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{V}\,dx = &\int_0^{y^{(n-1)}} \varphi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})\,dy^{(n-1)} \\ &+ \int_0^{y^{(n-2)}} \varphi_{(n-1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, 0)\,dy^{(n-2)} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \int_0^{y'} \varphi_2(x, y, y', 0, 0, \ldots, 0)\,dy' \\ &+ \int_0^{y} \varphi_1(x, y, 0, 0, \ldots, 0)\,dy + \int f(x, 0, 0, \ldots, 0)\,dx,\end{aligned}$$

ou encore

$$\int \mathrm{V}\,dx = \int f(x, 0, 0, \ldots, 0)\,dx$$

$$+ \int_0^1 [\varphi_1(x, uy, 0, 0, \ldots)\,y + \varphi_2(x, y, uy', 0, 0, \ldots)\,y' \\ + \varphi_n(x, y, \ldots, uy^{(n-1)})\,y^{(n-1)}]\,du.$$

L'exemple précédent traité de cette manière donne

$$\begin{aligned}\int 2x^2\,dx + \int_0^y 2xy\,dy + \int_0^{y'} (y-1)\,dy' + \int_0^{y''} x\,dy'' \\ = \frac{2x^3}{3} + xy^2 + yy' - y' + xy'' + C,\end{aligned}$$

ce qui est identique avec le résultat obtenu plus haut.

10. Notre analyse, comme on peut s'en convaincre avec un peu d'attention, s'applique encore à une fonction

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, z, z', \ldots, z^{(m)})\, dx,$$

qui proviendrait de la différentiation totale d'une fonction

$$\psi(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, z, z, \ldots, z^{(m-1)}).$$

La méthode des variations conduit alors à deux équations exprimant les conditions d'intégrabilité, et l'on reconnaîtra sans peine que $V dx$ peut, dans ce cas, être mis sous la forme d'une différentielle exacte du premier ordre, qui s'intégrera par le procédé connu [*].

---

[*] Je n'aime pas à intervenir par des notes dans les travaux de mes collaborateurs. Qu'il me soit pourtant permis de rappeler au souvenir des géomètres, à l'occasion de cet article, un Mémoire de M. Raabe (*Journal de Crelle*, t. XXXI, p. 181) et surtout un Mémoire de l'excellent et regretté Joachimsthal (*Journal de Crelle*, t. XXXIII, p. 95). (J. Liouville.)