JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + zt^2 + t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 120-123.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__120_0>

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Nous sortons de la terminologie précise de Gauss en donnant le nom de forme à l'expression

$$x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

puisque le rectangle zt n'y a pas un coefficient pair; mais il est bon quelquefois d'admettre des coefficients impairs. Quoi qu'il en soit, on demande une formule simple pour calculer à priori le nombre des représentations d'un entier quelconque n par l'expression indiquée

$$x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Or nous pouvons répondre tout de suite à la question proposée en nous en référant à ce qui a été dit dans l'article précédent concernant la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2.$$

On s'assure aisément en effet que la valeur de

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2)$$

et celle de

$$N(2n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2)$$

sont égales entre elles.

Si donc on pose

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro, on trouvera (en se servant des résultats et des notations de l'article cité) la valeur suivante

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum$$

pour le nombre cherché

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2).$$

2. Dans le cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, c'est-à-dire pour

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2),$$

cette valeur se réduit à

$$\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sum;$$

savoir, à

$$10\sum$$

quand $m = 12k + 1$, mais à

$$20\sum$$

quand $m = 12k + 5$, et à

$$6\sum$$

quand $m = 12k - 5$, enfin à

$$12\sum$$

quand $m = 12k - 1$.

Pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$, c'est-à-dire pour

$$\mathrm{N}\,(3m = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2),$$

ce serait

$$\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sum;$$

savoir,

$$30 \sum$$

si $m = 12k + 1$, mais

$$24 \sum$$

si $m = 12k + 5$, ou

$$50 \sum$$

si $m = 12k - 5$, enfin

$$40 \sum$$

si $m = 12k - 1$.

Soit en dernier lieu $\alpha = 1$, $\beta = 0$, de façon qu'on demande la valeur de

$$\mathrm{N}\,(2m = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2).$$

Cette valeur sera

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[8 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sum;$$

savoir,

$$28 \sum$$

quand $m = 12k + 1$, mais

$$14 \sum$$

quand $m = 12k + 5$, et

$$36 \sum$$

quand $m = 12k - 5$, enfin

$$18 \sum$$

quand $m = 12k - 1$.

3. Veut-on maintenant le nombre des représentations propres de

$$2^\alpha 3^\beta m$$

par la forme qui nous occupe

$$x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2 ?$$

Il faudra, comme dans les deux articles précédents, former le produit

$$\Pi = \left[a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{3}\right) a^{\mu-1}\right] \left[b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}} \left(\frac{b}{3}\right) b^{\nu-1}\right] \ldots,$$

au moyen des facteurs premiers a, b,... de l'entier

$$m = a^\mu b^\nu \ldots;$$

puis, considérant l'expression

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right] \Sigma$$

du nombre total des représentations, on y changera d'abord

$$\Sigma$$

en

$$\Pi,$$

mais en outre, si β est > 1, on y remplacera le facteur

$$3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3}\right)$$

par

$$8.3^{\beta-1},$$

et, si α est > 1, le facteur

$$2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

par

$$3.2^\alpha :$$

l'expression transformée sera celle qu'on cherche.