JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 209-213.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__209_0>

SUR LA FORME $x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme on a

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2 \equiv x^2 \quad (\text{mod. } 3),$$

il est clair que la forme proposée ne peut représenter aucun nombre $\equiv 2$ (mod. 3). On a donc d'abord

$$N(3q + 2 = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 0.$$

Le cas de n multiple de 3, ou de $n = 3q$, est facile aussi à traiter. En effet l'équation

$$3q = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$$

exige que x soit divisible par 3. Je fais donc $x = 3x_1$; et en divisant par 3, je vois que notre équation revient à celle-ci :

$$q = y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 3x_1^2.$$

En d'autres termes, la valeur de

$$N(3q = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier d'avril (p. 129).

2. Le seul cas vraiment difficile est donc celui de

$$n = 3q + 1.$$

J'ai reconnu cependant que dans ce cas même la question dont nous nous occupons aujourd'hui peut être ramenée à une question déjà résolue. Je me suis assuré en effet que la valeur demandée de

$$N(3q + 1 = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

est précisément la moitié de celle de

$$N(3q + 1 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

qui a été donnée aussi dans le cahier d'avril (p. 124).

D'après cela, si l'on considère d'abord un nombre impair $3q + 1$ ou plutôt $6l + 1$, et si l'on désigne par la simple lettre

$$\Sigma$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$6l + 1 = d\delta,$$

on aura

$$N(6l+1 = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2\sum.$$

Ainsi, pour l'entier 1, le nombre des représentations par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$$

est égal à 2, ce qui s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2 + 6.0^2.$$

Pour l'entier 7, relativement auquel on a

$$\sum = 6,$$

ce nombre devient égal à 12 ; et c'est ce que confirment les identités

$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2 + 6.0^2,$$
$$7 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$7 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2 + 6(\pm 1)^2.$$

Pour l'entier 13, on le trouverait égal à 28; et ainsi de suite.

5. Considérons à présent les entiers pairs

$$2^\alpha m$$

que la formule $3q+1$ peut fournir, ce qui suppose

$$m = 6l + 1$$

si $\alpha = 2\gamma$, mais

$$m = 6l - 1$$

si $\alpha = 2\gamma + 1$. Dans tous les cas, désignons par la simple lettre

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

En distinguant dans $6l+1$ les deux formes

$$12k+1, \quad 12k-5,$$

nous aurons, dans l'hypothèse de $\gamma > 0$,

$$N(2^{2\gamma} m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma} - 1) \sum$$

pour

$$m = 12k+1,$$

tandis que

$$N(2^{2\gamma} m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma} + 1) \sum$$

pour

$$m = 12k-5.$$

En distinguant semblablement dans $6l-1$ les deux formes

$$12k-1, \quad 12k+5,$$

on a

$$N(2^{2\gamma+1} m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma+1} - 1) \sum$$

pour

$$m = 12k-1,$$

mais

$$N(2^{2\gamma+1} m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma+1} + 1) \sum$$

pour

$$m = 12k+5.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces deux dernières formules. Ainsi

$$N(2m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2 \sum$$

pour

$$m = 12k - 1,$$

tandis que

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 6\sum$$

pour

$$m = 12k + 5.$$

En faisant, par exemple, $m = 5$, d'où

$$\sum = 4,$$

on trouvera que l'entier 10 peut être représenté vingt-quatre fois par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2;$$

les équations

$$\begin{aligned}
10 &= (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
10 &= (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2 + 6(\pm 1)^2
\end{aligned}$$

confirment ce fait.