

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

DE SAINT-VENANT

**Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série, tome 8 (1863), p. 353-430.*

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1863\\_2\\_8\\_353\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8_353_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

## MÉMOIRE

*Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope;*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Présenté à l'Académie des Sciences le 16 mars 1863 [\*].

DEUXIÈME ARTICLE [\*\*].

§ III. — *Surfaces donnant la distribution des élasticités autour d'un même point. — Maxima et minima. — Distribution ellipsoïdale des élasticités directes. — Solides ou milieux amorphes. — Intégrabilité des équations.*

9. *Surface du quatrième degré dont les rayons vecteurs sont les inverses des racines quatrièmes des élasticités directes.* — Appliquons la formule générale (33) à l'évaluation du coefficient d'élasticité directe dans un sens  $x'$  quelconque, c'est-à-dire du coefficient par lequel il faut multiplier la dilatation  $\partial_{x'}$  dans ce sens pour avoir la composante  $p_{x'x'}$ , dans le même sens, de la pression engendrée sur l'unité d'une face qui lui est perpendiculaire.

[\*] *Comptes rendus des séances*, t. LVI, p. 475.

[\*\*] Voir août et septembre 1863, t. VIII (2<sup>e</sup> série), p. 257.

En mettant  $x'$  pour  $n$ ,  $s$ ,  $x'$ ,  $y'$ , et

en faisant  $a_{x'x'x'} = A$ ,  $c_{xx'} = c_x$ ,  $c_{yx'} = c_y$ ,  $c_{zx'} = c_z$ , on a :

$$(39) \quad \left. \begin{aligned} A &= [a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z]^2 \quad \text{ou} \\ A &= a_{xxxx} c_x^4 + a_{yyyy} c_y^4 + a_{zzzz} c_z^4 + \\ &+ 2(a_{yyzz} + 2a_{yzyz}) c_y^2 c_z^2 + 2(a_{zzxx} + 2a_{zxzx}) c_z^2 c_x^2 + 2(a_{xxyy} + 2a_{xyxy}) c_x^2 c_y^2 + \\ &+ 4(a_{xxyz} + 2a_{zxxy}) c_x^2 c_y c_z + 4(a_{yyzx} + 2a_{xyyz}) c_y^2 c_z c_x + 4(a_{zzxy} + 2a_{yzzx}) c_z^2 c_x c_y + \\ &+ 4a_{yyyz} c_y^3 c_z + 4a_{zzzy} c_z^3 c_y + 4a_{zzzx} c_z^3 c_x + 4a_{xxxx} c_x^3 c_z + 4a_{xxyy} c_x^3 c_y + 4a_{yyyz} c_y^3 c_x. \end{aligned} \right\}$$

Si, en transportant l'origine au point  $(x, y, z)$ , l'on porte à partir de ce point, sur chaque droite de direction  $x'$  qui y passe et qui fait, avec les axes, des angles dont  $c_x, c_y, c_z$  sont les cosinus, une longueur

$$\frac{1}{\sqrt[4]{A}},$$

les coordonnées de la deuxième extrémité de ce rayon vecteur seront

$$x = \frac{c_x}{\sqrt[4]{A}}, \quad y = \frac{c_y}{\sqrt[4]{A}}, \quad z = \frac{c_z}{\sqrt[4]{A}}.$$

d'où l'on déduit, en mettant  $x\sqrt[4]{A}$ ,  $y\sqrt[4]{A}$ ,  $z\sqrt[4]{A}$  pour les trois cosinus, l'équation suivante du quatrième degré pour la surface formée par l'ensemble de ces extrémités :

$$(40) \quad \left. \begin{aligned} I &= [(a_x x + a_y y + a_z z)^2]^2 = (a_{xx} x^2 + a_{yy} y^2 + a_{zz} z^2 + 2a_{yz} yz + 2a_{zx} zx + 2a_{xy} xy)^2 \\ &\text{symboliquement, ou} \\ I &= a_{xxxx} x^4 + a_{yyyy} y^4 + a_{zzzz} z^4 + \\ &+ 2(a_{yyzz} + 2a_{yzyz}) y^2 z^2 + 2(a_{zzxx} + 2a_{zxzx}) z^2 x^2 + 2(a_{xxyy} + 2a_{xyxy}) x^2 y^2 + \\ &+ 4(a_{xxyz} + 2a_{zxxy}) x^2 y z + 4(a_{yyzx} + 2a_{xyyz}) y^2 z x + 4(a_{zzxy} + 2a_{yzzx}) z^2 x y + \\ &+ 4a_{yyyz} y^3 z + 4a_{zzzy} z^3 y + 4a_{zzzx} z^3 x + 4a_{xxxx} x^3 z + 4a_{xxyy} x^3 y + 4a_{yyyz} y^3 x. \end{aligned} \right\}$$

Cette surface, dont le centre est à l'origine, et que M. Macquorn-

Rankine a appelée *tasinomique* ( $\tau\alpha\sigma\iota\varsigma$ , tension) [\*], a été considérée par M. Haughton, dès 1846 [\*\*], comme pouvant fournir la loi de l'élasticité, mais sans la définir, comme nous faisons ici, par ce que représentent ses rayons vecteurs.

En effet, les quinze coefficients monômes ou binômes (que M. Rankine appelle *homotatiques*) de son équation donnent, les uns tels qu'ils y figurent, les autres divisés par 6, par 12 ou par 4, tous ceux des formules (1) des composantes de pression ou tension, quand on réduit ceux-ci à quinze inégaux ou quand on admet les six égalités (8)  $a_{yyz} = a_{yzy}$ ,  $a_{xxz} = a_{zxx}$ , etc., conformément à la loi des actions moléculaires et comme faisait M. Haughton dans son premier Mémoire. On peut remarquer aussi, avec le savant Irlandais, qu'elle se déduit immédiatement de l'expression (6) du potentiel en remplaçant

$$\begin{array}{ccccccc} 2\Phi_1, & \partial_x, & \partial_y, & \partial_z, & g_{yz}, & g_{zx}, & g_{xy}, \\ \text{par} & & & & & & \\ & 1, & x^2, & y^2, & z^2, & 2yz, & 2zx, & 2xy, \end{array}$$

d'où résulte bien, comme il le remarque, que lorsqu'on rapporte la surface (40), et en même temps les dilatations et glissements, à de nouveaux axes rectangulaires  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , comme

$$x^2 = (x'c_{xx'} + y'c_{xy'} + z'c_{xz'})^2$$

et

$$2yz = 2(x'c_{yx'} + y'c_{yy'} + z'c_{yz'})(x'c_{zx'} + y'c_{zy'} + z'c_{zz'})$$

développés donnent identiquement les expressions (26) de  $\partial_x$  et de  $g_{yz}$  en  $\partial_{x'}$ ,  $\partial_{y'}$ , ...,  $g_{x'y'}$  quand on remplace  $\partial_{x'}$  par  $x'^2$ , ...,  $g_{x'y'}$  par  $2x'y'$ , les coefficients nouveaux de l'équation de la surface (40) seront encore les mêmes que les coefficients nouveaux du potentiel (6). Mais cela résulte également de notre expression (39) de  $a_{x'x'x'}$  [\*\*\*].

[\*] *On Axes of Elasticity and crystalline Forms* (Transactions of the Royal Society, London, 1855), p. 268.

[\*\*] *On Equilibrium and Motion of solid and fluid Bodies* (Transactions of Irish Academy, vol. XXI), p. 164.

[\*\*\*] S'il faut décrire graphiquement cette surface en en traçant par points diverses

10. *Élasticités directes maxima et minima.* — On les obtient en égalant à zéro la différentielle complète de l'expression (39) ou de

$$A = a_{x'x'} \cdot a_{y'y'}; \quad a_{x'x'} \text{ étant } = a_{x'} a_{x'}; \quad \text{et } a_{y'} \text{ étant } = a_x c_{xx'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zz'},$$

par rapport aux trois cosinus, ce qui donne

$$4 a_{x'x'} \cdot a_{y'} (a_x d c_{xx'} + a_y d c_{yy'} + a_z d c_{zz'}) = 0,$$

et égalant, par suite, aussi à zéro ce qui affecte deux des différentielles des cosinus quand on a éliminé la troisième au moyen de

$$c_{xx'} d c_{xx'} + c_{yy'} d c_{yy'} + c_{zz'} d c_{zz'} = 0 \quad \text{résultant de } c_{xx'}^2 + c_{yy'}^2 + c_{zz'}^2 = 1.$$

On trouve ainsi

$$(41) \quad \frac{a_{x'x'} \cdot a_{y'} \cdot a_x}{c_{xx'}} = \frac{a_{x'x'} \cdot a_{y'} \cdot a_y}{c_{yy'}} = \frac{a_{x'x'} \cdot a_{y'} \cdot a_z}{c_{zz'}} = A;$$

le quatrième membre de cette égalité multiple résultant de ce qu'on obtient une fraction égale à celles des trois premiers membres en prenant pour numérateur la somme de leurs numérateurs, et pour dénominateur la somme de leurs dénominateurs, après les avoir multipliées haut et bas par  $c_{xx'}$ ,  $c_{yy'}$ ,  $c_{zz'}$  respectivement.

Comme les polynômes numérateurs sont du troisième degré en  $c_{xx'}$ ,  $c_{yy'}$ ,  $c_{zz'}$ , les trois premiers membres donnent, en chassant les déno-

coupes, on le fera plus facilement au moyen de l'expression (39)  $A = a_{xxxx} c_x^4 + \dots$  regardée comme son équation en coordonnées polaires, en remplaçant le premier membre par l'inverse  $\frac{1}{r^4}$  de la quatrième puissance du rayon vecteur et en déterminant ce rayon  $r$  pour différents angles  $(x', x)$ ,  $(x', y)$ ,  $(x', z)$  en degrés, qu'en se servant de l'équation (40) en coordonnées rectangles. La surface qui aurait pour rayons vecteurs les coefficients d'élasticité directe  $a_{x'x'x'x'} = A$  eux-mêmes serait tout aussi facile à tracer; mais elle est du dixième degré, car, en faisant  $c_x = \frac{x}{A}$ ,  $c_y = \frac{y}{A}$ ,  $c_z = \frac{z}{A}$  et  $A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  dans l'équation (39), on a  $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} =$  le second membre  $a_{xxxx} x^4 + \text{etc.}$  de l'équation (40).

minateurs, deux équations du quatrième degré en

$$\frac{c_{yz'}}{c_{xx'}}, \quad \frac{c_{zz'}}{c_{xx'}}$$

propres à fournir, après élimination, seize valeurs réelles ou imaginaires de ces deux rapports, qui déterminent les directions  $x'$ .

D'où, généralement, *seize* maxima ou minima de l'élasticité directe A ou  $a_{x'x'x'x'}$ ,

Ou seize diamètres coupant normalement la surface (40).

Toute dilatation  $\delta_{x'}$  dans la direction d'un de ces diamètres n'engendre, sur un plan qui lui est perpendiculaire, *qu'une pression normale à ce plan*, comme l'a remarqué le premier M. Rankine; car on a pour la composante tangentielle sur ce même plan, dans le sens  $y'$ ,

$$p_{x'y'} = a_{x'y'x'x'}\delta_{x'} = a_{x'x'y'y'}\delta_{x'} = a_{x'x'} \cdot a_{x'}(a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'}),$$

ou, d'après (41),

$$p_{x'y'} = A c_{xx'} c_{xy'} + A c_{yy'} c_{y'y'} + A c_{zz'} c_{zy'} = 0,$$

en sorte que toute pression tangentielle sur de pareils plans est nulle.

Nos mêmes notations symboliques nous serviront à démontrer au § IV, avec une égale facilité, une autre propriété remarquable de ces plans, relative à la direction des petits mouvements vibratoires.

**11. Autre surface.** — On ne peut pas en construire une qui donne de la même manière la loi de variation d'un des autres coefficients, tels que  $a_{y'y'z'z'}$ ,  $a_{x'x'y'z'}$ , etc., car ils dépendent de deux ou de trois directions  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et non d'une seule comme  $a_{x'x'x'x'}$ .

Mais on peut construire la surface qui donne, encore par ses rayons vecteurs, ou plutôt par les inverses de leurs racines carrées, les valeurs de la somme

$$(42) \quad a_{x'x'x'x'} + a_{x'x'y'y'} + a_{x'x'z'z'} = S_{x'}$$

de l'élasticité directe  $a_{x'x'x'x'}$  dans le sens  $x'$ , et des deux ÉLASTICITÉS LATÉRALES

$$a_{x'x'y'y'}, \quad a_{x'x'z'z'}$$

qu'on a lorsque l'on considère ce sens et deux des sens qui lui sont perpendiculaires. Cette somme, en effet, peut s'écrire

$$S_{x'} = a_{x'x'} \cdot (a_{x'x'} + a_{y'y'} + a_{z'z'}).$$

Or la parenthèse a pour valeur symbolique, d'après la formule (33)

$$(a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'})^2 + (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})^2 + \\ + (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})^2.$$

Développant, et réduisant eu égard aux relations entre les cosinus, on trouve que

$$(43) \quad a_{x'x'} + a_{y'y'} + a_{z'z'} = a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}.$$

Donc, en écrivant

$$c_x, \quad c_y, \quad c_z \quad \text{pour} \quad c_{xx'}, \quad c_{yx'}, \quad c_{zx'} \quad (\text{qui sont restés seuls}),$$

on a

$$(44) \quad S_{x'} = (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)^2 \cdot (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}).$$

Tirons, à partir du point  $(x, y, z)$ , en y transportant l'origine, des rayons vecteurs de longueurs égales aux valeurs de

$$\frac{1}{\sqrt{S_{x'}}},$$

relatives à leurs diverses directions  $x'$ , et faisons, dans l'équation (44),

$$c_x = x \sqrt{S_{x'}}, \quad c_y = y \sqrt{S_{x'}}, \quad c_z = z \sqrt{S_{x'}};$$

nous avons, pour l'équation du lieu des extrémités de ces rayons,

$$1 = (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}) \cdot (a_x x + a_y y + a_z z)^2,$$

ou

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 = & (a_{xxxx} + a_{xxyy} + a_{xxzz}) x^2 + (a_{xxyy} + a_{yyyy} + a_{yyzz}) y^2 + \\ & + (a_{zzxx} + a_{yyzz} + a_{zzzz}) z^2 + \\ & + 2(a_{xxyz} + a_{yyyz} + a_{zzyz}) yz + 2(a_{xxzx} + a_{yyzx} + a_{zzzx}) zx + \\ & + (a_{xxyy} + a_{yyxy} + a_{zzxy}) xy, \end{aligned} \right.$$

représentant un ellipsoïde qui a été considéré en 1846 par M. Haughton, et que M. Rankine a appelé *orthotatique*.

Comme, en le rapportant à ses trois axes principaux, les trois derniers termes de son équation manqueront, il se trouve démontré qu'en tout point d'un corps il existe trois directions rectangulaires  $x_1, y_1, z_1$  pour lesquelles on a

$$(46) \quad \begin{cases} a_{x_1x_1y_1z_1} + a_{y_1y_1y_1z_1} + a_{z_1z_1z_1y_1} = 0, \\ a_{x_1x_1x_1z_1} + a_{y_1y_1z_1x_1} + a_{z_1z_1z_1x_1} = 0, \\ a_{x_1x_1x_1y_1} + a_{y_1y_1y_1x_1} + a_{z_1z_1z_1y_1} = 0; \end{cases}$$

d'où résulte, observe M. Haughton (p. 163) qu'on peut toujours, par un choix convenable d'axes coordonnés rectangulaires, diminuer de *trois* le nombre des coefficients dont dépendent les propriétés élastiques d'un corps dans le cas le plus général de contexture, c'est-à-dire les réduire à 18 si l'on en admet 21, ou à 12 si l'on n'en admet que 15 inégaux (n° 2).

M. Rankine en conclut aussi qu'en tout point d'un corps il existe toujours trois plans rectangulaires sur lesquels il n'y a que des pressions normales, sans composante tangentielle, engendrées par une dilatation

$\delta$

supposée égale dans les trois sens  $x_1, y_1, z_1$  normaux à ces plans (et par conséquent aussi égale en tous sens s'il n'y a pas de glissements  $g_{y_1z_1}, g_{z_1x_1}, g_{x_1y_1}$ , car alors pour tout sens  $x$  la dilatation est  $\delta_x = \delta \cdot c_{x,x}^2 + \delta \cdot c_{y,x}^2 + \delta \cdot c_{z,x}^2 = \delta$ ). En effet, toute composante tangentielle due à cette dilatation  $\delta$

$$p_{y_1z_1} = a_{y_1z_1x_1x_1}\delta + a_{y_1z_1y_1y_1}\delta + a_{y_1z_1z_1z_1}\delta$$

est nulle, ainsi que  $p_{z_1x_1}, p_{x_1y_1}$ , si les directions  $x_1, y_1, z_1$  sont choisies de manière à satisfaire aux équations (46) [\*].

---

[\*] M. Rankine appelle *orthotatiques* les trois directions  $x_1, y_1, z_1$  ainsi définies, et *orthotatiquement isotrope* un corps élastique dans lequel, pour toutes les directions rec-



**12. Cas de trois plans de symétrie de contexture.** — Revenons à la surface du quatrième degré (40) et à l'expression (39) de l'élasticité directe.

tangulaires  $x_1, y_1, z_1$  possibles, les trois équations (46) seraient satisfaites. Alors l'ellipsoïde (45) se réduit à une sphère, ou la somme (42)  $S_x$  est égale en tout sens; car l'équation (46),  $0 = a_{x'z'}y'z' + a_{y'y'}z'z' + a_{z'z'}y'y' = (a_{x'z'} + a_{y'y'} + a_{z'z'})a_{y'z'}$  pour tous les systèmes  $x', y', z'$ , revient, vu l'égalité (43) et la formule (33), à

$$0 = (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}) \cdot (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'}) (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'}).$$

Effectuant la multiplication des deux derniers facteurs, multipliant ensuite par le premier et effaçant comme nuls les trinômes de la forme (46), puis désignant analogiquement par  $S_x, S_y, S_z$  les trois premiers coefficients trinômes de l'équation (45), il reste

$$0 = c_{xy'} c_{xz'} S_x + c_{yy'} c_{yz'} S_y + c_{zy'} c_{zz'} S_z = (S_y - S_x) c_{yy'} c_{yz'} + (S_z - S_x) c_{zy'} c_{zz'}.$$

Or cette équation ne peut être satisfaite quels que soient  $c_{yy'}$  et  $c_{zz'}$ , que par

$$S_x = S_y = S_z;$$

par conséquent l'équation (45) de la surface se réduit à  $1 = (x^2 + y^2 + z^2) S_x$ ; et  $S_x$  est égal en tout sens.

Mais M. Rankine observe très-bien qu'en remplissant toutes ces conditions le corps n'est pas pour cela *isotrope* complètement (*pantatically*) ou dans le sens que nous attachons à ce mot avec Cauchy.

Il construit aussi une surface qu'il appelle *hétérotatique*, donnant les valeurs de la différence

$$a_{y'y'}z'z' - a_{y'z'}y'y' = D$$

qu'il croit pouvoir exister entre une *élasticité latérale*

$$a_{y'y'}z'z'$$

et l'**ÉLASTICITÉ TANGENTIELLE** OU DE RIGIDITÉ

$$a_{y'z'}y'y'$$

de mêmes indices. On a pour cette différence, s'il y en a une,

$$D = (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})^2 (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})^2 - [(a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'}) (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})]^2.$$

Si l'on développe, il y a évidemment disparition des termes en  $a_{zzzz}, \dots, a_{zzzy}$ , et

Si la contexture du corps est mécaniquement symétrique par rapport au plan  $yz$ , c'est-à-dire si tous les coefficients d'élasticité restent

autres où tout intervertissement des sous-lettres est permis dans toute hypothèse (n° 2); et si l'on a égard aux relations connues

$$c_{yy'}c_{zz'} - c_{yz'}c_{zy'} = c_{xx'}, \quad c_{zy'}c_{xx'} - c_{zx'}c_{zy'} = c_{y'z'}, \quad c_{xy'}c_{yz'} - c_{xz'}c_{xy'} = c_{zz'},$$

on obtient

$$D = (a_{yy'zz} - a_{yz'yz})c_{xx'}^2 + (a_{zzxx} - a_{zzxx})c_{y'z'}^2 + (a_{xxyy} - a_{xy'xy})c_{zz'}^2 + \\ + 2(a_{xxyz} - a_{zxxy})c_{y'z'}c_{zz'} + 2(a_{yy'zz} - a_{zy'yz})c_{xx'}c_{zz'} + 2(a_{xxyz} - a_{yz'zz})c_{xx'}c_{y'z'}$$

qui donne un *ellipsoïde* pour cette surface dont les rayons vecteurs dans les diverses directions  $x'$  ont des longueurs  $\frac{1}{\sqrt{D}}$ .

Mais on a en tout sens  $D = 0$ , et cette surface n'existe pas, pour ceux qui ne se refusent pas à admettre les six égalités complémentaires (8), ou qui attribuent aux divers coefficients les valeurs résultant du calcul des actions moléculaires.

M. Rankine étudie aussi, sous le nom de *métatitiques*, les directions rectangulaires  $y_1, z_1$  telles qu'on ait

$$a_{y_1y_1y_1z_1} = a_{z_1z_1z_1y_1}.$$

Il en existe, sur tout plan, deux paires dont chacune coupe l'autre à 45 degrés; car si  $y', z'$  sont deux directions rectangulaires tracées sur ce plan, comme on a

$$a_{y_1} = a_{y'} \cos(y', y_1) + a_{z'} \sin(y', y_1), \quad a_{z_1} = -a_{y'} \sin(y', y_1) + a_{z'} \cos(y', y_1),$$

l'on trouve facilement

$$(47) \quad a_{y_1y_1y_1z_1} - a_{z_1z_1z_1y_1} = \frac{1}{4} (4a_{y'z'y'z'} + 2a_{y'y'z'z'} - a_{y'y'y'y'} - a_{z'z'z'z'}) \sin 4(y', y_1) + \\ + (a_{y'y'y'z'} - a_{z'z'z'y'}) \cos 4(y', y_1);$$

d'où, si le premier membre est posé nul, on tire pour l'angle  $(y', y_1)$  huit valeurs différant consécutivement de  $\frac{\pi}{4}$ .

Il nomme axes *métatitiques principaux* ceux dont les directions  $x', y', z'$  sont telles qu'on ait à la fois

$$a_{y'y'y'z'} = a_{z'z'z'y'}, \quad a_{z'z'z'z'} = a_{y'y'y'y'}, \quad a_{z'z'y'y'} = a_{y'y'y'z'}.$$

Comme on peut remplir cette condition en tout point d'un corps, il y existe, par cela seul, six autres pareils axes d'après ce qu'on vient de voir, ce qui fait neuf en tout.

les mêmes quand on prend  $x'$  directement opposé à  $x$ , en laissant  $y$  et  $z$  dans leurs directions, comme on a, alors,

$$c_{xx'} = -1, \quad c_{yy'} = 1, \quad c_{zz'} = 1 \quad \text{et tous les autres cosinus nuls,}$$

d'où

$$a_{x'} = -a_x, \quad a_{y'} = a_y, \quad a_{z'} = a_z,$$

les coefficients  $a_{yyzx}$ ,  $a_{xyyz}$ ,  $a_{zzxy}$ ,  $a_{yzzx}$ ,  $a_{zzzx}$ ,  $a_{xxzx}$ ,  $a_{xxxy}$ ,  $a_{yyyx}$ , qui ont  $x$  comme sous-lettre une ou trois fois, doivent être nuls d'après la formule (33).

S'il y a aussi symétrie par rapport au plan  $zx$ ,  $a_{xxyz}$ ,  $a_{zzxy}$ ,  $a_{yyxz}$ ,  $a_{zzxy}$  doivent également s'annuler, en sorte que les douze coefficients des deux dernières lignes de l'expression (39) ou de l'équation (40) (coefficients que M. Rankine appelle *de tension oblique*, ou *élasticités asymétriques*) disparaissent, et alors la symétrie existe aussi par rapport au troisième plan coordonné.

Faisons donc, pour abrégé,

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} a_{x'x'x'x'} = A, \\ a_{xxxx} = a, \quad a_{yyyy} = b, \quad a_{zzzz} = c, \\ a_{yzyz} = d, \quad a_{zzzx} = e, \quad a_{xyxy} = f, \quad a_{yyzz} = d', \quad a_{zzxx} = e', \quad a_{xxyy} = f'; \end{array} \right.$$

les équations (39) et (40) se réduisent à

$$(49) \quad A = ac_x^4 + bc_y^4 + cc_z^4 + 2(2d + d')c_y^2c_z^2 + 2(2e + e')c_z^2c_x^2 + 2(2f + f')c_x^2c_y^2,$$

$$(50) \quad 1 = ax^4 + by^4 + cz^4 + 2(2d + d')y^2z^2 + 2(2e + e')z^2x^2 + 2(2f + f')x^2y^2.$$

Enfin il appelle *métatatiqnement isotrope* un solide où les lignes de toutes les directions jouissent de cette propriété-là, ce qui entraîne aussi, pour toutes les directions rectangulaires possibles  $y'$ ,  $z'$ , la nullité de ce qu'il appelle la différence métatatique [la première parenthèse du second membre de (47)]; ou ce qui entraîne la relation

$$(47 \text{ bis}) \quad a_{y'y'z'z'} + 2a_{y'z'y'z'} = \frac{a_{y'y'y'y'} + a_{z'z'z'z'}}{2}.$$

Mais (de même qu'on vient de voir pour les directions *orthotatiques*) ce corps est loin d'être isotrope complètement on *pantatiqnement*, comme dit le même savant, auquel on doit un grand nombre d'autres remarques, dont celles qui se rapportent à des coordonnées et *contraordonnées* obliques ne sont pas les moins curieuses, et sont employées ingénieusement par lui à l'explication des diverses formes de cristaux.

Les équations (41) propres à fournir les directions et les grandeurs des demi-diamètres normaux à la surface (50), ou les maxima et minima de la valeur (49) de A, sont

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{[ac_x^2 + (2f+f')c_y^2 + (2e+e')c_z^2]c_x}{c_x} = \frac{[(2f+f')c_x^2 + bc_y^2 + (2d+d')c_z^2]c_y}{c_y} = \\ = \frac{[(2e+e')c_x^2 + (2d+d')c_y^2 + cc_z^2]c_z}{c_z} = A. \end{cases}$$

Elles donnent pour les cosinus ou leurs rapports, et pour A, les treize systèmes suivants de valeurs

$$(52) \quad \begin{cases} c_y = 0, & c_z = 0, & c_x^2 = 1, & A = a, \\ c_z = 0, & c_x = 0, & c_y^2 = 1, & A = b, \\ c_x = 0, & c_y = 0, & c_z^2 = 1, & A = c; \end{cases}$$

$$(53) \quad \begin{cases} c_x = 0, & \frac{c_z}{c_y} = \pm \sqrt{\frac{b-(2d+d')}{c-(2d+d')}}}, & A = \frac{bc-(2d+d')^2}{b+c-2(2d+d')}, \\ c_y = 0, & \text{avec des valeurs analogues de } c_x:c_z \text{ et de } A, \\ c_z = 0, & \text{avec des valeurs analogues de } c_y:c_x \text{ et de } A; \end{cases}$$

Enfin, ce qui résulte des trois parenthèses carrées de (51) égalées entre elles, savoir :

$$(54) \quad \begin{cases} c_x = \pm \sqrt{\frac{N_x}{N_x+N_y+N_z}}, & c_y = \pm \sqrt{\frac{N_y}{N_x+N_y+N_z}}, & c_z = \pm \sqrt{\frac{N_z}{N_x+N_y+N_z}}, \\ \text{si } N_x = (b-2f-f')(c-2e-e') + (2f+f'-2d-d')(2d+d'-2e-e'), \\ N_y = (c-2d-d')(a-2f-f') + (2d+d'-2e-e')(2e+e'-2f-f'), \\ N_z = (a-2e-e')(b-2d-d') + (2e+e'-2f-f')(2f+f'-2d-d'), \\ \text{et } A = \frac{abc - a(2d+d')^2 - b(2e+e')^2 - c(2f+f')^2 + 2(2d+d')(2e+e')(2f+f')}{N_x+N_y+N_z}. \end{cases}$$

Les trois systèmes (52) donnent pour maxima et minima les élasticités suivant les directions des axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Les systèmes (53) donnent six autres maxima ou minima, suivant des directions de lignes tracées deux à deux et symétriquement dans les six paires d'angles plans des axes  $y$  et  $z$ ,  $z$  et  $x$ ,  $x$  et  $y$ .

Enfin les systèmes (54) donnent quatre maxima ou minima, tous égaux en grandeur, et dirigés symétriquement dans l'intérieur des quatre paires d'angles trièdres opposés formés par les trois plans coordonnés.

Les trois solutions (52)  $A = a_{xxxx}, a_{yyyy}, a_{zzzz}$  existent toujours.

Les six solutions (53) dirigées dans les angles plans  $yz, zx, xy$  n'existent point, vu l'imaginarité des rapports des cosinus, lorsque

$$(55) \quad \begin{cases} 2d + d' \text{ est compris entre } b \text{ et } c, \\ 2e + e' \text{ est compris entre } c \text{ et } a, \\ 2f + f' \text{ est compris entre } a \text{ et } b; \end{cases}$$

et elles se confondent avec une ou plusieurs des solutions (52)  $a, b, c$ , quand un ou deux des binômes (55) atteignent une de leurs limites  $a, b, c$ . *Ce sont les conditions*, probablement toujours remplies dans la nature, *pour que les élasticités directes*  $\Lambda = a_{x'x'x'x'}$  *varient graduellement dans les trois plans principaux, c'est-à-dire ne croissent pas d'abord pour décroître ensuite, ou réciproquement, en allant de l'une à l'autre de leurs valeurs principales*  $b$  et  $c$ ,  $c$  et  $a$ ,  $a$  et  $b$ .

Alors, pour que les maxima et minima (54), de l'intérieur des angles trièdres, n'existent pas non plus, il faut, ou qu'une ou plusieurs des quantités  $N_x, N_y, N_z$  s'annulent, car alors ces maxima ou minima se confondent avec  $a$  ou  $b$  ou  $c$ ; ou qu'une des trois mêmes quantités  $N_x, N_y, N_z$  ait un signe différent de ceux des deux autres, en sorte qu'un au moins des deux rapports  $\frac{c_y}{a_x} = \sqrt{\frac{N_y}{N_x}}$ ,  $\frac{c_z}{a_x} = \sqrt{\frac{N_z}{N_x}}$  soit imaginaire. C'est bien ce qui a lieu, par exemple, si, les conditions (55) étant remplies, et les coefficients  $a, b, c$  étant supposés rangés par ordre de grandeur en sorte que

$$a > b > c,$$

$2e + e'$  est ou plus petit que  $2d + d'$  ou plus grand que  $2f + f'$ , car il résulte de  $a > 2f + f' > b > 2d + d' > c$  et de  $a > 2e + e' > c$  que  $N_x$  a ses deux termes positifs quand  $2e + e' < 2d + d'$ , et  $N_z$  les a quand  $2e + e' > 2f + f'$ , tandis que, dans l'un comme dans l'autre cas,  $N_y$  a ses deux termes négatifs.

Mais une pareille relation de grandeur, qui ferait tomber  $2e + e'$  hors de l'intervalle de  $2d + d'$  à  $2f + f'$ , est bizarre et ne saurait guère être non plus dans la nature, car lorsque, les conditions (55) étant remplies, l'on a  $a > b > c$ , on a probablement aussi

$$2d + d' < 2e + e' < f' + f.$$

Or on peut très-bien encore, avec cette dernière relation, avoir  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  de signes non semblables; mais les conditions de cette différence de signe entre l'une et les deux autres de ces trois quantités ne peuvent pas être exprimées d'une manière générale; et il faudra, dans chaque cas, s'assurer *numériquement* qu'elles sont remplies, si l'on veut être certain que les nombres adoptés pour les six coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d = d'$ ,  $e = e'$ ,  $f = f'$ , que l'expérience ne pourra que rarement fournir tous, donnent aux élasticités une loi simple et naturelle de variation dans les divers sens.

**13. Distribution ellipsoïdale des élasticités.** — Si l'on fait, dans les formules du numéro précédent,

$$(56) \quad \text{soit } 2d + d' = \frac{b+c}{2}, \quad 2e + e' = \frac{c+a}{2}, \quad 2f + f' = \frac{a+b}{2},$$

$$(57) \quad \text{soit } 2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab},$$

ce qui remplit bien les conditions (55), les valeurs (54) de  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  sont nulles, et les solutions (54), donnant des maxima et minima dans les angles trièdres, rentrent dans les solutions (52) donnant celles qui sont dirigées suivant les côtés  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de ces angles, en sorte que celles-ci, c'est-à-dire

$$a, \quad b, \quad c,$$

donnent alors les seuls maxima et minima absolus ou *relatifs* de l'élasticité directe  $A$  ou  $a_{x'x'x'x'}$ .

Quand on a les moyennes arithmétiques, ou les relations (56), la valeur (49) de l'élasticité directe dans un sens quelconque ( $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$ ) se réduit, vu  $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$ , à

$$A = ac_x^2 + bc_y^2 + cc_z^2,$$

et l'équation (50) de la surface, à

$$1 = (x^2 + y^2 + z^2)(ax^2 + by^2 + cz^2).$$

Cette surface dont les rayons vecteurs sont les inverses  $\frac{1}{\sqrt[4]{A}}$  des racines quatrièmes des élasticités, est toujours du quatrième degré; mais on voit qu'il y en a une autre, dont les rayons vecteurs sont les inverses  $\frac{1}{\sqrt{A}}$  des simples racines carrées; c'est l'ellipsoïde

$$(58) \quad 1 = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

Quand on a les moyennes géométriques, ou les relations (57), les seconds membres de (49) et de (50) deviennent des carrés parfaits, non plus symboliquement mais réellement, et ces deux équations se réduisent, en extrayant les racines, à

$$(59) \quad \sqrt{A} = c_x^2 \sqrt{a} + c_y^2 \sqrt{b} + c_z^2 \sqrt{c},$$

$$(60) \quad 1 = x^2 \sqrt{a} + y^2 \sqrt{b} + z^2 \sqrt{c}.$$

La surface dont les rayons vecteurs sont les  $\frac{1}{\sqrt[4]{A}}$  se réduit à un ellipsoïde.

Un pareil mode de distribution des élasticités exige, dans le solide, l'existence des trois plans de symétrie de contexture, rectangulaires entre eux, que nous avons supposés au numéro précédent; car comme, en prenant pour axes coordonnés  $x, y, z$  les axes de figure d'un ellipsoïde, il n'y a dans son équation que les termes en  $x^2, y^2, z^2$ , l'équation du quatrième degré (40) n'aura, pour les mêmes axes, que les termes en  $x^4, y^4, z^4, y^2 z^2, z^2 x^2, x^2 y^2$ , en sorte que les six coefficients  $a_{yyyy}, a_{zzzy}, \dots, a_{yyyx}$  de la dernière ligne de cette équation (40) seront nuls pour ces axes, ainsi que les trois sommes telles que  $a_{xxyz} + 2a_{zxxy}$  de l'avant-dernière ligne, ce qui entraîne aussi la nullité des six coefficients qui composent ces sommes, si l'on admet que  $a_{xxyz}$  et  $a_{zxxy}$  sont ou égaux ou seulement de même signe, et ainsi des deux autres couples. Or cette nullité des douze élasticités asymétriques caractérise (numéro précédent) l'existence des trois plans de symétrie.

Observons que l'expression (49)  $a_{x'x'x'x'} = ac_{x'}^4 + \dots$  met en lumière

la condition connue pour que la contexture soit égale en tout sens autour d'un axe, celui des  $x$  par exemple, car cette égalité exige non-seulement  $b = c$ ,  $e = f$ ,  $e' = f'$ , mais encore  $a_{x'x'x'x'} = b = c$  pour toutes directions de  $x'$  perpendiculaires à  $x$ , ou que l'on ait

$$b = b(c_{yx'}^4 + c_{zx'}^4) + 2(2d + d')c_{yx'}^2 c_{zx'}^2 = b(1 - 2c_{yx'}^2 c_{zx'}^2) + (2d + d') \cdot 2c_{yx'}^2 c_{zx'}^2$$

pour toute valeur de  $c_{yx'}^2$ ; d'où l'on tire cette condition

$$(61) \quad b = c = 2d + d'.$$

Et l'isotropie exige

$$(62) \quad a = b = c = 2d + d' = 2e + e' = 2f + f'; \quad d = e = f, \quad d' = e' = f'.$$

**14. Forme intégrable que prennent les équations d'équilibre quand les élasticités directes se distribuent ellipsoïdalement par moyennes géométriques.** — Supposons remplies les deuxièmes conditions du n° 13, c'est-à-dire supposons qu'on ait (57)  $2d + d' = \sqrt{bc}$ , etc.; et, vu la controverse (n° 2) au sujet des égalités  $d = d'$ ,  $e = e'$ ,  $f = f'$  que démontre le calcul des actions moléculaires, laissons inégaux ces coefficients, mais en supposant entre eux un rapport constant pour une même matière; ou posons

$$(63) \quad \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = \frac{f'}{f} = i.$$

Alors, si nous faisons, pour abrégér,

$$\frac{a}{2+i} = a^2, \quad \frac{b}{2+i} = b^2, \quad \frac{c}{2+i} = c^2,$$

les neuf coefficients auront les expressions suivantes :

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = (2+i)a^2, \quad b = (2+i)b^2, \quad c = (2+i)c^2, \\ d = bc, \quad e = ca, \quad f = ab, \quad d' = ibc, \quad e' = ica, \quad f' = iab. \end{array} \right.$$

Les composantes de pression, pour de petits déplacements  $u, v, w$ , et pour le cas ordinaire où il n'y a pas lieu de tenir compte des pressions



antérieures aux déplacements, peuvent être écrites

$$(65) \quad \begin{cases} p_{xx} = a \left[ (2+i)a \frac{du}{dx} + ib \frac{dv}{dy} + ic \frac{dw}{dz} \right], & p_{yz} = bc \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\ p_{yy} = b \left[ ia \frac{du}{dx} + (2+i)b \frac{dv}{dy} + ic \frac{dw}{dz} \right], & p_{zx} = ca \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz} \right), \\ p_{zz} = c \left[ ia \frac{du}{dx} + ib \frac{dv}{dy} + (2+i)c \frac{dw}{dz} \right], & p_{xy} = ab \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) [*]. \end{cases}$$

Substituant dans les équations générales indéfinies d'équilibre d'un élément parallélépipède (18),

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} + \dots = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} + \dots = 0,$$

nous avons

$$(66) \quad \begin{cases} a \left[ a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{d^2 u}{dy^2} + c \frac{d^2 u}{dz^2} + (1+i) \frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz} \right) \right] = 0, \\ b \left[ a \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{d^2 v}{dy^2} + c \frac{d^2 v}{dz^2} + (1+i) \frac{d}{dy} \left( a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz} \right) \right] = 0, \\ c \left[ a \frac{d^2 w}{dx^2} + b \frac{d^2 w}{dy^2} + c \frac{d^2 w}{dz^2} + (1+i) \frac{d}{dz} \left( a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

Or si nous faisons

$$(67) \quad a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz} = \theta$$

(qui, lorsqu'on a  $a = b = c$ , n'est autre chose que la *dilatation cubique* multipliée par  $a$ ), et si nous ajoutons ces équations (66) différenciées respectivement par rapport à  $x$ , à  $y$ , à  $z$ , nous obtenons simplement

$$(68) \quad a \frac{d^2 \theta}{dx^2} + b \frac{d^2 \theta}{dy^2} + c \frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0,$$

[\*] Il est facile de voir que ces valeurs donnent un potentiel (6) ou (7) de la forme

$$\phi = \frac{1+i}{2(2+3i)} \left( \frac{p_{xx}}{a} + \frac{p_{yy}}{b} + \frac{p_{zz}}{c} \right)^2 + \frac{p_{yz}^2 - p_{yy}p_{zz}}{2bc} + \frac{p_{zx}^2 - p_{zz}p_{xx}}{2ca} + \frac{p_{xy}^2 - p_{xx}p_{yy}}{2ab};$$

expression identique avec la moitié de celle de M. Clapeyron [7<sup>e</sup> leçon de M. Lamé, expression (4)] lorsqu'on fait  $a^2 = b^2 = c^2 = \mu$ . Le potentiel mécanique intérieur, ou le travail de déformation qu'il considère, s'exprime donc aussi simplement quand la distribution est ellipsoïdale que quand elle est sphérique ou isotrope.

équation intégrable sous forme finie. En effet,

$f$  désignant une fonction arbitraire,  
 $\alpha, \xi, \gamma$  des variables auxiliaires,

cette équation (68) est satisfaite par

$$(69) \quad \vartheta = \iiint \frac{f(\alpha, \xi, \gamma) d\alpha d\xi d\gamma}{\sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{a} + \frac{(y-\xi)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{c}}},$$

puisqu'il en résulte

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \iiint f(\alpha, \xi, \gamma) d\alpha d\xi d\gamma \left[ -\frac{1}{a(\sqrt{\quad})^3} + 3\frac{(x-\alpha)^2}{a^2(\sqrt{\quad})^5} \right];$$

$\frac{d^2\vartheta}{dy^2}$  et  $\frac{d^2\vartheta}{dz^2}$  = des expressions semblables en  $b$  et  $(y-\xi)^2$  ou  $c$  et  $(z-\gamma)^2$   
au lieu de  $a$  et de  $(x-\alpha)^2$ .

D'autres équations, aussi facilement intégrables, peuvent être obtenues dans ce cas, comme dans celui d'isotropie; car comme on a identiquement

$$\begin{aligned} a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{d^2 u}{dy^2} + c \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{d\vartheta}{dx} + c \frac{d}{dz} \left( \frac{du}{dz} - \frac{dv}{dx} \right) - b \frac{d}{dy} \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right), \\ a \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{d^2 v}{dy^2} + c \frac{d^2 v}{dz^2} &= \frac{d\vartheta}{dy} + a \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) - c \frac{d}{dz} \left( \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right), \\ a \frac{d^2 w}{dx^2} + b \frac{d^2 w}{dy^2} + c \frac{d^2 w}{dz^2} &= \frac{d\vartheta}{dz} + b \frac{d}{dy} \left( \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) - a \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right), \end{aligned}$$

si l'on représente par

$$v_x, \quad v_y, \quad v_z$$

les trois *rotations moyennes* autour des axes des  $x$ , des  $y$ , des  $z$ , que les déplacements imprimant au corps autour du point  $(x, y, z)$ , c'est-

à-dire si l'on fait

$$(70) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) = v_x, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) = v_y, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) = v_z \quad [*],$$

les trois équations différentielles (66) peuvent s'écrire

$$(71) \quad \begin{cases} c \frac{dv_y}{dz} - b \frac{dv_z}{dy} + \frac{2+i}{2} \frac{d\theta}{dx} = 0, \\ a \frac{dv_z}{dx} - c \frac{dv_x}{dz} + \frac{2+i}{2} \frac{d\theta}{dy} = 0, \\ b \frac{dv_x}{dy} - a \frac{dv_y}{dx} + \frac{2+i}{2} \frac{d\theta}{dz} = 0. \end{cases}$$

Retranchant ces équations deux à deux l'une de l'autre après les avoir

[\*] Ces expressions, qui ont été trouvées par M. Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, 1841, p. 321, form. 10), se démontrent facilement en remarquant que si  $p$  est la longueur et  $\alpha$  est l'angle avec le plan  $xy$  d'une perpendiculaire  $mP$  abaissée par un point  $m$  du corps sur la ligne  $Mx$  menée parallèlement aux  $x$  par un autre point  $M(x, y, z)$ , les excès  $v'$  et  $w'$  des déplacements  $v$  et  $w$  du point  $m$  sur ceux du pied  $P$  de la perpendiculaire  $p$  sont :

$$\begin{cases} \text{parallèlement aux } y \dots \dots \quad v' = \frac{dv}{dy} p \cos \alpha + \frac{dw}{dz} p \sin \alpha, \\ \text{parallèlement aux } z \dots \dots \quad w' = \frac{dw}{dy} p \cos \alpha + \frac{dv}{dz} p \sin \alpha. \end{cases}$$

La rotation de  $m$ , et par conséquent du plan  $mPM$  autour de  $Mx$ , est donc

$$\frac{w' \cos \alpha - v' \sin \alpha}{p} = \frac{dw}{dy} \cos^2 \alpha - \frac{dv}{dz} \sin^2 \alpha + \left( \frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dy} \right) \sin \alpha \cos \alpha.$$

La rotation d'un autre plan passant aussi par  $Mx$  et à angle droit sur  $Pm$  s'obtiendra en changeant  $\alpha$  en  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ . La demi-somme de ces rotations de deux plans perpendiculaires est

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right).$$

Comme elle est indépendante de l'angle  $\alpha$ , elle donne bien la rotation moyenne, autour de  $Mx$ , de toute la petite portion du corps qui environne le point  $M$ .

différentiées par rapport à  $x$ ,  $y$  ou  $z$  choisis de manière que la soustraction fasse disparaître les termes en  $\theta$ , et ayant égard à l'égalité identique

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} = 0,$$

l'on obtient les équations

$$(72) \quad \begin{cases} a \frac{d^2 v_x}{dx^2} + b \frac{d^2 v_x}{dy^2} + c \frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0, \\ a \frac{d^2 v_y}{dx^2} + b \frac{d^2 v_y}{dy^2} + c \frac{d^2 v_y}{dz^2} = 0, \\ a \frac{d^2 v_z}{dx^2} + b \frac{d^2 v_z}{dy^2} + c \frac{d^2 v_z}{dz^2} = 0, \end{cases}$$

dont chacune est satisfaite par une expression comme (69).

Enfin, si l'on différencie successivement deux fois par rapport à  $x$ , deux fois par rapport à  $y$ , deux fois par rapport à  $z$ , la première des équations (66), et si l'on ajoute les résultats multipliés respectivement par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , on peut effacer ce qui vient de la partie

$$(1 + i) \frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz} \right) = (1 + i) \frac{d\theta}{dx}$$

puisque l'équation (68) donne

$$\frac{d}{dx} \left( a \frac{d^2 \theta}{dx^2} + b \frac{d^2 \theta}{dy^2} + c \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right) = 0.$$

Il reste

$$(73) \quad \begin{cases} a \frac{d^2}{dx^2} \left( a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{d^2 u}{dy^2} + c \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + b \frac{d^2}{dy^2} (\text{même trinôme}) + c \frac{d^2}{dz^2} (\text{même trinôme}) = 0, \\ \text{et l'on a deux équations semblables avec } v \text{ et } w \text{ au lieu de } u. \end{cases}$$

Elles sont satisfaites,  $f$  étant une autre fonction arbitraire que  $f$ , par

$$(74) \quad \begin{cases} u = \iiint f(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma \sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{a} + \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{c}}, \\ v \text{ et } w = \text{des expressions semblables avec d'autres fonctions au lieu de } f, \end{cases}$$

car il en résulte

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{d^2 u}{dy^2} + c \frac{d^2 u}{dz^2} = 2 \iiint \frac{f(x, y, z) dz dy dx}{\sqrt{\dots\dots\dots}}$$

expression dont nous avons vu que les trois dérivées secondes  $\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2}{dy^2}$ ,  $\frac{d^2}{dz^2}$ , ajoutées ensemble après avoir été multipliées par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , donnent une somme nulle.

On voit donc que les intégrales par fonctions dites potentielles, qu'on trouve à la sixième leçon sur l'élasticité de M. Lamé (§ 27, p. 70) pour le cas rare de l'isotropie parfaite, s'appliquent facilement, avec une légère modification, à ce genre de contexture hétérotrope, qui paraît appartenir au plus grand nombre des corps, comme on va voir au n° 16.

15. *Condition pour que les équations de l'équilibre intérieur d'un solide prennent la forme ainsi intégrable.* — Réciproquement, il est facile de voir que ce n'est qu'autant que les neuf coefficients  $a$  du cas de trois plans de symétrie ont entre eux les relations exprimées par les équations

$$(57) \quad 2d + d' = \sqrt{bc}, \text{ etc.}, \quad \text{et} \quad (63) \quad \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = \frac{f'}{f},$$

que les équations différentielles de l'équilibre peuvent en fournir une de la forme intégrable (68)

$$a \frac{d^2 \theta}{dx^2} + b \frac{d^2 \theta}{dy^2} + c \frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0, \quad \theta \text{ étant de la forme} \quad (67) \quad a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz}.$$

En effet, ces équations différentielles, en laissant  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $d'$ ,  $e'$ ,  $f'$  quelconques, sont

$$(75) \quad \begin{cases} a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{d^2 u}{dy^2} + c \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d}{dx} \left[ (f + f') \frac{dv}{dy} + (e + e') \frac{dw}{dz} \right] = 0, \\ f \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{d^2 v}{dy^2} + d \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{d}{dy} \left[ (d + d') \frac{dw}{dz} + (f + f') \frac{du}{dx} \right] = 0, \\ e \frac{d^2 w}{dx^2} + d \frac{d^2 w}{dy^2} + c \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left[ (e + e') \frac{du}{dy} + (d + d') \frac{dv}{dx} \right] = 0. \end{cases}$$

Partageons les coefficients  $a$  de  $\frac{d^2u}{dx^2}$  dans la première,  $b$  de  $\frac{d^2v}{dy^2}$  dans la deuxième, et  $c$  de  $\frac{d^2w}{dz^2}$  dans la troisième, de manière que les parties entre crochets, soumises aux  $\frac{d}{dx}$ ,  $\frac{d}{dy}$ ,  $\frac{d}{dz}$  soient réductibles à un même trinôme affecté seulement de facteurs différents; ces équations se trouveront écrites

$$(76) \quad \begin{cases} \left[ a - \frac{(e+e')(f+f')}{d+d'} \right] \frac{d^2u}{dx^2} + f \frac{d^2u}{dy^2} + e \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{(e+e')(f+f')}{d+d'} \frac{du}{dx} + (f+f') \frac{dv}{dy} + (e+e') \frac{dw}{dz} \right] = 0, \\ f \frac{d^2v}{dx^2} + \left[ b - \frac{(f+f')(d+d')}{e+e'} \right] \frac{d^2v}{dy^2} + d \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d}{dy} \left[ (f+f') \frac{du}{dx} + \frac{(f+f')(d+d')}{e+e'} \frac{dv}{dy} + (d+d') \frac{dw}{dz} \right] = 0, \\ e \frac{d^2w}{dx^2} + d \frac{d^2w}{dy^2} + \left[ c - \frac{(d+d')(e+e')}{f+f'} \right] \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left[ (e+e') \frac{du}{dx} + (d+d') \frac{dv}{dy} + \frac{(d+d')(e+e')}{f+f'} \frac{dw}{dz} \right] = 0. \end{cases}$$

Or, pour qu'on obtienne, en ajoutant ensemble ces équations, différentiées respectivement par rapport à  $x$ , à  $y$ , à  $z$ , une équation de la forme (68), il faut que les premières parties de (76) ensemble donnent la même fonction du premier degré des dérivées du second ordre d'un certain trinôme, que les deuxièmes parties, ce qui exige que les coefficients les uns au-dessus des autres affectant, dans les premières parties, soit les  $\frac{d^2}{dx^2}$ , soit les  $\frac{d^2}{dy^2}$ , soit les  $\frac{d^2}{dz^2}$  de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , aient entre eux les mêmes rapports que les coefficients affectant  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ ,  $\frac{dw}{dz}$  dans chaque crochet, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{d}{d+d'} = \frac{e}{e+e'} = \frac{f}{f+f'} = \frac{a(d+d')}{(e+e')(f+f')} = \frac{b(e+e')}{(f+f')(d+d')} = \frac{c(f+f')}{(d+d')(e+e')}.$$

La comparaison des trois premiers membres de cette égalité multiple donne les relations (63).

Et si l'on compare successivement le premier membre avec les deux derniers, on tire

$$b = \frac{f+f'}{e+e'} (2d+d'), \quad c = \frac{e+e'}{f+f'} (2d+d'),$$

qui multipliées ensemble donnent la première des relations suivantes

dont les deux autres s'obtiennent de même :

$$(2d + d')^2 = bc, \quad (2e + e')^2 = ca, \quad (2f + f')^2 = ab,$$

c'est-à-dire précisément les relations (57).

Les relations (57) et (63) sont donc nécessaires pour obtenir des intégrales des formes données au numéro précédent.

**16.** *Ce mode de distribution des élasticités doit avoir lieu dans les solides amorphes ou à cristallisation confuse, au moins dans certaines limites d'hétérotropie. Calcul des coefficients d'élasticité d'un corps primitivement isotrope, comprimé ou écroui inégalement en divers sens.*

— Mais la distribution ellipsoïdale des  $\frac{1}{\sqrt{A}}$ , due aux relations par moyennes géométriques (57),

$$2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab},$$

dont nous venons de reconnaître les propriétés analytiques, doit à un autre titre attirer plus particulièrement notre attention. En effet, dans les corps à cristallisation confuse tels que les métaux, etc., employés dans les constructions, où les molécules affectent indistinctement toutes les orientations, si les élasticités sont égales dans trois directions rectangulaires, elles doivent l'être en tous sens, car on ne voit aucune raison pour qu'elles soient plus grandes ou moindres dans les autres directions. Si les élasticités y sont inégales, cela ne peut tenir qu'à des rapprochements moléculaires plus grands dans certains sens que dans d'autres, par suite du forgeage, de l'étirage, du laminage, etc., ou des circonstances de la solidification. Calculons les grandeurs nouvelles que doivent prendre les coefficients d'élasticité dans un corps primitivement isotrope ainsi modifié.

Cauchy a démontré que, de quelque manière qu'un corps ait été dilaté et comprimé, il y a toujours, en chacun de ses points, trois directions *principales*, rectangulaires entre elles, suivant lesquelles les dilatations positives ou négatives ne sont accompagnées d'aucun glissement, en sorte que les trois côtés de chaque élément parallépipède rectangle suivant ces directions sont restés orthogonaux [\*]. Prenons ces direc-

---

[\*] Cela résulte immédiatement, comme on sait, de ce que d'après la première for-

tions pour celles des  $x, y, z$ , et appelons

$$\partial, \partial', \partial''$$

les proportions des augmentations positives ou négatives des côtés de l'élément, parallèles à ces coordonnées.

Le calcul que nous entreprenons ne peut se faire sans attribuer un mode d'action aux forces moléculaires réciproques; admettons, comme aux notes des nos 3 et 4, celui que leur ont attribué tous les géomètres qui ont fait des calculs analogues, et qui laisse arbitraire la loi de variation de ces forces avec les distances où elles agissent, en supposant seulement ces distances insensibles conformément à tous les faits. Nous aurons, comme à la première des notes citées, les expressions (12)

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{xxxx} \text{ ou } a_{yyyy} \text{ ou } a_{xyxy} = \frac{\rho}{2} \sum m F r. (x^4 \text{ ou } y^4 \text{ ou } x^2 y^2), \\ \text{en faisant } \frac{1}{r} \frac{d f r}{d r} = F r. \end{array} \right.$$

Or, en appelant

$$\rho_0, r_0, x_0, y_0, z_0$$

mule (26) on a, pour la dilatation dans une direction quelconque  $r$ ,

$$\partial_r = \partial_x c_{rx}^2 + \partial_y c_{ry}^2 + \partial_z c_{rz}^2 + g_{yz} c_{ry} c_{rz} + g_{zx} c_{rx} c_{rz} + g_{xy} c_{rx} c_{ry};$$

d'où, en faisant

$$c_{rx} = x \sqrt{\pm \partial_r}, \quad c_{ry} = y \sqrt{\pm \partial_r}, \quad c_{rz} = z \sqrt{\pm \partial_r},$$

l'équation

$$\partial_x x^2 + \partial_y y^2 + \partial_z z^2 + g_{yz} yz + g_{zx} zx + g_{xy} xy = \pm 1$$

pour la surface dont les rayons vecteurs sont les inverses  $\frac{1}{\sqrt{\pm \partial_r}}$  des racines carrées des grandeurs, prises positivement, des dilatations positives ou négatives  $\partial_r$  dans leurs sens respectifs  $r$ ; et de ce que, si l'on rapporte à ses axes de figure cette surface du second degré simple ou double (ellipsoïde quand les  $\partial_r$  sont ou toutes positives ou toutes négatives, et système de deux hyperboloïdes conjugués quand elles sont positives dans certaines directions et négatives dans d'autres), les termes en  $yz, zx, xy$  devront manquer, en sorte que, pour les trois directions rectangulaires de ces axes pris pour ceux des  $x, y, z$ , les  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$  seront nuls.



les grandeurs de la densité, de la distance  $r$  et de ses projections sur les  $x$ ,  $y$ ,  $z$  avant que l'isotropie ait été altérée, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0(1 + \delta), \quad y = y_0(1 + \delta'), \quad z = z_0(1 + \delta''), \quad \rho = \frac{\rho_0}{(1 + \delta)(1 + \delta')(1 + \delta'')} \\ \text{et} \quad Fr = Fr_0 + (r - r_0)F'r_0, \quad r - r_0 = \frac{x_0^2}{r_0}\delta + \frac{y_0^2}{r_0}\delta' + \frac{z_0^2}{r_0}\delta''. \end{array} \right.$$

Substituons dans les expressions (77) en négligeant les carrés et produits des  $\delta$ ,  $\delta'$ ,  $\delta''$  et en faisant passer leurs premières puissances hors des signes  $\mathbf{S}$ ; puis posons pour abrégé, en remarquant, vu l'isotropie primitive, que les sommes  $\mathbf{S}$  restent les mêmes quand on y échange entre elles les coordonnées  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ :

$$(78) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_0}{2} \mathbf{S} m F r_0 (x_0^4 \text{ ou } y_0^4) = a_4, \quad \frac{\rho_0}{2} \mathbf{S} m F r_0 \cdot x_0^2 y_0^2 = a_{2,2}, \\ \frac{\rho_0}{2} \mathbf{S} m \frac{F'r_0}{r_0} (x_0^6 \text{ ou } y_0^6) = a_6, \quad \frac{\rho_0}{2} \mathbf{S} m \frac{F'r_0}{r_0} (x_0^4 y_0^2 \text{ ou } x_0^2 z_0^2 \text{ ou } y_0^4 x_0^2 \text{ ou } y_0^2 z_0^2) = a_{4,2}, \\ \frac{\rho_0}{2} \mathbf{S} m \frac{F'r_0}{r_0} x_0^2 y_0^2 z_0^2 = a_{2,2,2}; \end{array} \right.$$

nous obtenons les expressions suivantes :

$$(79) \left\{ \begin{array}{l} a_{xxxx} = \frac{(1 + \delta)^3}{(1 + \delta')(1 + \delta'')} a_4 + a_6 \delta + a_{4,2} \delta' + a_{4,2} \delta'', \\ a_{yyyy} = \frac{(1 + \delta')^3}{(1 + \delta)(1 + \delta'')} a_4 + a_{4,2} \delta + a_6 \delta' + a_{4,2} \delta'', \\ a_{xyxy} = \frac{(1 + \delta)(1 + \delta')}{1 + \delta''} a_{2,2} + a_{4,2} \delta + a_{4,2} \delta' + a_{2,2,2} \delta''. \end{array} \right.$$

Mais, toujours en vertu de l'isotropie primitive, on a les relations

$$(80) \quad a_4 = 3a_{2,2}, \quad a_6 = 15a_{2,2,2}, \quad a_{4,2} = 3a_{2,2,2} \text{ [*]}.$$

Substituant, et multipliant entre elles les deux premières expres-

[\*] Ce sont des particularisations de la formule générale suivante, trouvée par M. Cauchy (*Mémoire sur la dispersion de la lumière, aux Nouveaux Exercices*; Prague,

sions (79), en négligeant toujours les carrés et les produits des  $\delta$ , on trouve

$$(83) \quad a_{xxxx} \times a_{yyyy} = 9 \left[ \frac{(1+\delta)^2(1+\delta')^2}{(1+\delta'')^2} a_{2,2}^2 + a_{2,2} \cdot a_{2,2,2}(6\delta + 6\delta' + 2\delta'') \right],$$

c'est-à-dire précisément *neuf fois* ce qu'on a en élevant au carré la

1835, p. 35),  $fr$  étant une fonction quelconque de la distance moléculaire  $r$  :

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{2} \sum m fr \cdot x^\lambda y^\mu z^\nu = \frac{1 \cdot 3 \dots (\lambda-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (\mu-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (\nu-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (\lambda + \mu + \nu - 1)} \cdot \frac{\rho}{2} \sum m fr \cdot x^{\lambda+\mu+\nu} \\ \text{si } \lambda, \mu, \nu \text{ sont pairs, et } = 0 \text{ si l'un d'eux est impair.} \end{array} \right.$$

Elle résulte de ce que l'isotropie autour d'un point  $M$  exige que si  $r = Mm$  est sa distance à l'une des molécules  $m$  qui l'entourent de toutes parts, la somme  $\sum m \cdot fr \cdot x^{2n}$ , relative à toutes, ne change pas de valeur quand on change à volonté la direction  $x$  sur laquelle les  $x$  sont les projections des  $r$ , en sorte qu'on a  $\sum m fr \cdot x^{2n} = \sum m fr \cdot x'^{2n}$ , les  $x'$  étant leurs projections sur une autre droite quelconque de direction  $x'$ . En effet, cette condition nécessaire à l'isotropie peut être écrite

$$\sum m fr \cdot (xc_{xx'} + yc_{yy'} + zc_{zz'})^{2n} = \sum m fr \cdot x^{2n} (c_{xx'}^2 + c_{yy'}^2 + c_{zz'}^2)^n.$$

Si l'on développe les puissances  $2n$  et  $n$  des deux trinômes, on pourra faire passer les trois cosinus hors des  $\sum$ , et égaliser, dans les deux membres, les termes affectés des mêmes puissances ou des mêmes produits de puissances de ces cosinus; car, si l'on fait successivement chaque cosinus = 1 et les deux autres nuls, on a déjà des termes égaux, qu'on peut retrancher de part et d'autre; faisant ensuite l'un des trois d'entre eux nul, on peut diviser par le produit des deux autres et faire, dans l'équation quotient, l'un des deux restants = 0, l'autre = 1, etc., et obtenir ainsi successivement toutes les égalités de termes des deux membres. Remarquant ensuite que le terme général de  $(x + y + z)^m$  est

$$\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} z^p \cdot \frac{(m-p)(m-p-1)\dots(m-p-q+1)}{1 \cdot 2 \dots q} y^q x^{m-p-q},$$

dont le coefficient est la même chose que

$$\frac{m(m-1)\dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \dots q \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-p-q)},$$

3<sup>e</sup> expression (79) représentant l'élasticité tangentielle ou de glissement

$$a_{xy \ xy}$$

qui, lorsqu'on admet la loi des actions moléculaires, a la même valeur que l'élasticité latérale  $a_{xx \ yy}$ . On a donc, dans un corps ou un milieu élastique primitivement isotrope dont l'égale contexture en tous sens a été altérée d'une manière permanente par des dilatations ou com-

nous aurons, comme résultat de l'assimilation des termes des deux membres affectés du produit  $c_{xx'}^\lambda c_{yy'}^\mu c_{zz'}^\nu$  de puissances de cosinus dont les exposants, tous pairs, ont toujours une somme  $\lambda + \mu + \nu = 2n$ , l'égalité suivante

$$\frac{1.2.3\dots 2n}{1.2\dots\lambda.1.2\dots\mu.1.2\dots\nu} \sum m fr. x^\lambda y^\mu z^\nu = \frac{1.2.3\dots n}{1.2\dots\frac{\lambda}{2}.1.2\dots\frac{\mu}{2}.1.2\dots\frac{\nu}{2}} \sum m fr. x^{\lambda+\mu+\nu},$$

qui est la même chose que l'égalité (81); car, en multipliant haut et bas dans le second membre par  $2^{2n}$ , puis par  $1.3.5\dots(2n-1)$ , le numérateur du coefficient devient  $1.2.3\dots 2n$  comme dans le premier membre, et le dénominateur devient  $1.3.5\dots(2n-1)$  multiplié par  $2.4\dots\lambda.2.4\dots\mu.2.4\dots\nu$  dont l'inverse revient à  $1.3\dots(\lambda-1).1.3\dots(\mu-1).1.3\dots(\nu-1)$  divisé par le dénominateur

$$1.2\dots\lambda.1.2\dots\mu.1.2\dots\nu$$

du premier membre. On voit aussi que si  $\lambda$  ou  $\mu$  ou  $\nu$  est impair, on a zéro dans le second membre.

M. Cauchy démontre aussi, à la page 186 du Mémoire cité, mais d'une manière compliquée, que

$$(82) \quad \sum m fr. x^{2n} = \frac{1}{2n+1} \sum m fr. r^{2n}.$$

On nous saura gré sans doute de le prouver ici d'une manière très-simple, savoir, en remarquant que si cette égalité (82) a lieu pour une certaine valeur de  $n$ , elle a lieu par cela seul pour une valeur plus grande d'une unité; car, comme  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , et vu la formule (81), et celle (82) supposée établie pour l'exposant  $2n$ , on a

$$\begin{aligned} \sum m fr. x^{2n+2} &= \sum m fr. r^2. x^{2n} - \sum m fr. x^{2n} y^2 - \sum m fr. x^{2n} z^2 = \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum m fr. r^2. r^{2n} - \frac{1.3\dots(2n-1)}{1.3\dots(2n+1)} \cdot 2 \cdot \sum m fr. x^{2n+2}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\sum m fr. x^{2n+2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} \sum m fr. r^2. r^{2n},$$

pressions dans les trois sens  $x_0, y_0, z_0$  ou  $x, y, z$ ,

$$2a_{xyxy} + a_{xxyy} = \sqrt{a_{xxxx} \cdot a_{yyyy}},$$

et des égalités semblables en  $y$  et  $z$ ,  $z$  et  $x$ , c'est-à-dire précisément les relations (57) de distribution ellipsoïdale des inverses de racines quatrièmes des *élasticités directes* autour d'un point.

Nous avons, il est vrai, négligé dans le calcul, comme on a fait jusqu'ici dans tous ceux d'un genre analogue, les termes affectés des carrés et produits des dilatations ou compressions permanentes opérées  $\delta, \delta', \delta''$ . On ne pourrait apprécier l'influence de ces termes que si l'on connaissait la forme de la fonction  $fr$ , car leurs coefficients seraient des sommes comme (81) contenant, dans  $fr$ , les dérivées successives de cette fonction inconnue. Mais cette influence négligée ne peut produire que de très-faibles erreurs, si l'on considère que les écrouissages et la trempe, qui changent très-sensiblement la ténacité et les coefficients d'élasticité, altèrent à peine la densité des corps. On peut d'ailleurs s'assurer, par un calcul, que les portions ainsi négligées de l'expression de  $3a_{xyxy}$  sont constamment comprises entre les portions correspondantes de celles de  $a_{xxxx}$  et  $a_{yyyy}$ , en sorte qu'en supposant même qu'elles altèrent légèrement les valeurs absolues de ces trois coefficients, elles n'altéreront pas sensiblement pour cela la relation de moyenne proportionnalité de  $3a_{xyxy}$  entre  $a_{xxxx}$  et  $a_{yyyy}$ , donnée par les termes du premier ordre en  $\delta, \delta', \delta''$  [\*].

La contexture élastique définie par les relations (57), telles que  $3d$  ou  $2d + d' = \sqrt{bc}$ , doit donc être celle des métaux amorphes, et des solides tels que sont les matériaux employés dans les constructions, au moins lorsque leurs élasticités mesurées dans trois sens n'ont pas entre elles des rapports de grandeur considérables (comme de plus de 3 à 2 ou de 2 à 1), et que leurs molécules n'ont évidemment pas affecté de

ou la formule (82) avec  $n + 1$  à la place de  $n$ . Or cette formule est vraie pour  $n = 1$ , car

$$\sum m fr.r^2 = \sum m fr(x^2 + y^2 + z^2) = 3 \sum m fr.x^2.$$

Donc elle est vraie pour toutes les valeurs de  $n$ .

[\*] Conservons en effet seulement dans ce calcul, pour simplifier, celle des trois

préférence certaines orientations en se déposant, ou bien en se rangeant à nouveau par suite de modifications mécaniquement opérées. Et, lors même que cette dernière circonstance peut s'offrir, ou bien que les rapports entre les élasticités sont beaucoup plus considérables qu'on ne vient de dire, c'est encore cette contexture, ou ces relations entre les coefficients, qu'il convient le mieux d'adopter dans la pratique pour les corps non cristallisés, au moins tant que des mesurages d'élasticités dans un certain nombre d'autres sens ne commanderont pas de s'en écarter sensiblement. (*Voyez* § V ci-après, n° 29.)

dilatations ou compressions permanentes qui a été imprimée parallèlement aux  $x$ , ce qui suffira pour la conclusion ; nous avons

$$r - r_0 = \sqrt{x_0^2(1 + \delta)^2 + y_0^2 + z_0^2} - r_0 = r_0 \left[ \left( 1 + \frac{2\delta + \delta^2}{r_0^2} x_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

$$= \frac{x_0^2}{r_0} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right) - \frac{x_0^4}{2r_0^3} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^2 + \frac{x_0^6}{2r_0^5} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^3 - \frac{5x_0^8}{8r_0^7} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^4 + \dots;$$

$$\text{et } Fr = Fr_0 + (r - r_0)F'r_0 + (r - r_0)^2 \frac{F''r_0}{2} + (r - r_0)^3 \frac{F'''r_0}{6} + (r - r_0)^4 \frac{F^{IV}r_0}{24} + \dots,$$

qui, en substituant, et faisant

$$Fr_0 = F_0, \quad \frac{F'r_0}{r_0} = F_2, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{F''r_0}{r_0^2} - \frac{F'r_0}{r_0^3} \right) = F_4, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{F'''r_0}{3r_0^3} - \frac{F''r_0}{r_0^4} + \frac{F'r_0}{r_0^5} \right) = F_6, \text{ etc.},$$

peut être écrit

$$Fr = F_0 + x_0^2 \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right) F_2 + x_0^4 \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^2 F_4 + x_0^6 \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^3 F_6 + \dots$$

Or on a

$$a_{xxxx} \text{ ou } a_{yyyy} \text{ ou } a_{xyxy} = \frac{\rho_0}{2(1 + \delta)} \sum m [x_0^4 (1 + \delta)^4 \text{ ou } y_0^4 \text{ ou } x_0^2 y_0^2 (1 + \delta)^2] Fr.$$

Mettant pour  $Fr$  son développement et faisant pour abrégé, comme tout à l'heure,

$$(84) \quad \frac{\rho_0}{2} \sum m F_{n+n'-1} x_0^n y_0^{n'} = a_{n,n'},$$

nous avons

$$(85) \quad \begin{cases} a_{xxxx} = (1 + \delta)^3 \left[ a_{4,0} + a_{6,0} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right) + a_{8,0} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^2 + a_{10,0} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^3 + \dots \right], \\ a_{yyyy} = \frac{1}{1 + \delta} \left[ a_{4,4} + a_{6,2} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right) + a_{8,0} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^2 + a_{10,0} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^3 + \dots \right], \\ a_{xyxy} = (1 + \delta) \left[ a_{2,2} + a_{4,2} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right) + a_{6,2} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^2 + a_{8,2} \left( \delta + \frac{\delta^2}{2} \right)^3 + \dots \right]. \end{cases}$$

§ IV. — *Conséquence, en ce qui regarde la théorie du mouvement de la lumière dans les milieux non isotropes, en tenant compte des pressions antérieures aux vibrations excitées.*

**17.** *Propagation des ondes planes dans de pareils milieux.* — On sait, depuis les recherches de Cauchy [\*] (et les calculs ci-après vont d'ailleurs le faire voir), qu'une onde plane provoquée par un ébranlement dans un milieu homogène non isotrope, comme doit être le fluide étheré dans les corps transparents qui sont, ou cristallisés en polyèdres non

Mais, en vertu de la formule (81) démontrée à la note précédente, on a aussi

$$a_{2,1} = \frac{1}{3} a_4, \quad a_{4,2} = \frac{1}{5} a_6, \quad a_{6,2} = \frac{1}{7} a_8, \quad a_{8,2} = \frac{1}{9} a_{10}, \quad a_{10,2} = \frac{1}{11} a_{12},$$

$$a_{4,4} = \frac{3}{35} a_8, \quad a_{6,6} = \frac{1}{21} a_{10}, \quad a_{8,8} = \frac{1}{33} a_{12}.$$

Donc, en multipliant par 3 la troisième expression, on obtient

$$(86) \left\{ \begin{aligned} a_{xxx} &= (1 + \partial)^3 a_4 + a_6 \left( \partial + \frac{7}{2} \partial^2 + \frac{9}{2} \partial^3 + \frac{5}{2} \partial^4 \right) + a_8 (\partial^2 + 4\partial^3 + 8\partial^4) + \\ &\quad + a_{10} \left( \partial^3 + \frac{9}{2} \partial^4 \right) + a_{12} \partial^4 + \dots, \\ a_{yyy} &= \frac{1}{1 + \partial} a_4 + a_6 \left( \frac{\partial}{5} - \frac{1}{10} \partial^2 + \frac{1}{10} \partial^3 - \frac{1}{10} \partial^4 \right) + a_8 \left( \frac{3}{35} \partial^2 + \frac{3}{140} \partial^4 \right) + \\ &\quad + a_{10} \left( \frac{1}{21} \partial^3 + \frac{1}{42} \partial^4 \right) + a_{12} \frac{\partial^4}{33} + \dots, \\ 3a_{xyy} &= (1 + \partial) a_4 + a_6 \left( \frac{3}{5} \partial + \frac{9}{10} \partial^2 + \frac{3}{10} \partial^3 \right) + a_8 \left( \frac{3}{7} \partial^2 + \frac{6}{7} \partial^3 + \frac{15}{28} \partial^4 \right) + \\ &\quad + a_{10} \left( \frac{1}{3} \partial^3 + \frac{5}{6} \partial^4 \right) + a_{12} \frac{3\partial^4}{11} + \dots, \end{aligned} \right.$$

où chaque partie de  $3a_{xyy}$  est bien comprise entre les parties correspondantes de  $a_{xxx}$  et  $a_{yyy}$ .

[\*] *Bulletin des Sciences* (Férussac), t. XIII, n° 217, Mémoire lu les 1<sup>er</sup> mai, 7 et 14 juin 1830. — *Exercices de Mathématiques*, 5<sup>e</sup> année (1830), *Application des formules, etc., à la théorie de la lumière*; et ensuite, *Mémoire sur la dispersion* (1830, achevé à Prague en 1835).

réguliers, ou inégalement comprimés en divers sens, se divise généralement, de chaque côté, en trois autres ondes se propageant parallèlement à elles-mêmes avec des vitesses dont les grandeurs sont mesurées par les inverses des trois demi-axes d'un certain ellipsoïde qui dépend, non-seulement des coefficients d'élasticité  $a_{xxxx}, \dots a_{yyyy}$  du milieu, mais encore de l'inclinaison particulière qu'y affectent les plans des ondes, tandis que les directions des mêmes demi-axes donnent celles des mouvements vibratoires rectilignes dont les molécules sont animées dans chaque onde; que, lorsque le milieu est isotrope, deux de ces ondes se réunissent en une seule où les vibrations moléculaires, alors généralement curvilignes, sont *transversales*, c'est-à-dire parallèles aux plans des ondes, ou perpendiculaires à la direction de leur propagation (direction qui est *alors* la même que celle du rayon lumineux résultant de leurs intersections mutuelles), pendant que les vibrations, dans la troisième onde, sont *longitudinales*, et, en vertu d'une constitution de notre organe, ne donnent lieu à aucune sensation de lumière, de sorte que le rayon reste unique dans un milieu de cette espèce; enfin que, réciproquement, le parallélisme des vibrations à toutes les ondes exige l'isotropie; d'où il suit que ce parallélisme ne peut avoir lieu *exactement* dans les cristaux biréfringents, et que la partie de la théorie de Fresnel, qui se base sur son hypothèse de la transversalité des mouvements vibratoires jusque dans l'intérieur de ces cristaux, ne peut être vraie que par approximation.

Or, en 1839, l'illustre géomètre-physicien George Green, attribuant, comme Cauchy et Fresnel, la propagation de la lumière aux actions entre les particules de l'éther, et reconnaissant tout d'abord, comme celui-là, que les vibrations dans les cristaux biréfringents ne sont pas toujours exactement parallèles aux plans des ondes, mais voulant, dit-il [\*], pour ne pas s'engager dans des considérations trop compliquées et sans chances d'application pratique, *borner son analyse aux milieux où ce parallélisme s'observerait rigoureusement*, ce qu'avant

---

[\*] *On the Propagation of Light in crystallised Media*, lu le 20 mai 1839 (*Transactions of the Cambridge Society*, vol. VII, p. 122), faisant suite au Mémoire *On the Reflexion and Refraction of Light*, lu le 11 décembre 1837 (inséré au même volume, p. 2).

tout examen il suppose compatible avec l'hétérotropie, se détermina à rejeter les formules à *quinze* coefficients fournies à Cauchy par l'hypothèse, trop restrictive selon lui, « que les actions entre les particules s'exercent suivant leurs lignes de jonction; » et, en faisant, après quelques considérations et tâtonnements, une autre hypothèse qui, nous le pensons, ne peut être justifiée que par celle-là, à savoir que le potentiel  $\Phi$  (n° 2) est nécessairement développable suivant les puissances entières et positives des six petites quantités que nous avons appelées  $\partial_x, \partial_y, \dots, g_{xy}$  ci-dessus [\*], il adopta pour cette fonction  $\Phi$ , sans autre démonstration, la formule (6) du second degré à *vingt et un* coefficients  $a_{xxxx}, \dots, a_{yyyy}$ , et, au moyen de la latitude que lui fournissait l'expédient d'un tel nombre de constantes, il chercha quelles relations devait exister entre elles *pour que les mouvements vibratoires dans deux des ondes* (car il en reconnaît trois comme Cauchy) [\*\*] *fussent toujours exactement* (accurately, rigorously) *transversaux ou parallèles à leurs plans*, comme l'a supposé Fresnel.

Ces relations ou équations de condition sont, comme on va voir, les suivantes, au nombre de quatorze :

$$(87) \begin{cases} a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz} = 2a_{xyyz} + a_{yyzz} = 2a_{zxzx} + a_{zzxx} = 2a_{xyxy} + a_{xyyy}, \\ a_{xxyz} + 2a_{zxyx} = 0, \quad a_{yyzx} + 2a_{xyyz} = 0, \quad a_{zzyx} + 2a_{yzzx} = 0, \\ a_{yyyz} = 0, \quad a_{zzzy} = 0, \quad a_{zzzx} = 0, \quad a_{xxzx} = 0, \quad a_{xxxy} = 0, \quad a_{yyyx} = 0. \end{cases}$$

Il est facile de reconnaître qu'elles sont les mêmes que celles qui ont

[\*] Le principe regardé par lui comme moins restrictif que celui de Cauchy est (commencement des deux Mémoires cités) « que de quelque manière que les parties d'un système matériel agissent les unes sur les autres, si l'on multiplie toutes les forces s'exerçant ainsi à son intérieur par les éléments de leurs directions, la somme totale des produits, pour une portion déterminée quelconque de la masse, est toujours une différentielle exacte de quelque fonction. » Mais il ne s'en tient pas à ce principe, qui, en effet, est insuffisant; on ne voit même pas qu'il s'en serve ni même l'exprime analytiquement, car il n'est question dans son travail, ni des actions individuelles, ni de leurs *directions*, qu'il a, de prime abord, fait profession d'ignorer complètement.

[\*\*] Il accorde même que, sans l'intervention du rayon non éclairant provenant de la troisième onde, il est impossible de satisfaire aux conditions à remplir à la surface de séparation de deux milieux.



été trouvées par M. Lamé (*Leçons sur l'Élasticité*, 1852, §§ 92 et 93) comme *conditions de biréfringence* avec vibrations transversales. Seulement, le géomètre français exige vingt-quatre conditions parce qu'il suppose trente-six coefficients indépendants (n° 2 ci-dessus) au lieu de vingt et un. (Voir la 1<sup>re</sup> note du numéro suivant 18.)

Or nous pensons et nous espérons montrer que ces conditions n'expriment que l'*isotropie*; d'où l'impossibilité, non pas, comme nous verrons, de l'exacte représentation de la marche des rayons par la surface d'onde à deux nappes découverte par Fresnel, mais de l'exact parallélisme des vibrations aux ondes dans les milieux hétérotropes, excepté pour des directions particulières, au nombre de seize au plus, probablement de trois seulement, du plan des ondes.

Pour le faire voir, montrons d'abord, en reproduisant l'établissement de ces quatorze relations (87), qu'elles sont absolument les mêmes lorsque le milieu n'était pas, avant les ébranlements produits, dans l'état que nous avons appelé *naturel*, c'est-à-dire lorsqu'il y avait des pressions de grandeur et de direction quelconque antérieurement aux déplacements moléculaires relatifs résultant des ébranlements; de sorte qu'on ne puisse pas attribuer à ces pressions primitives, souvent omises, une influence contraire aux conclusions que nous tirerons.

Attribuons donc, avec Green, aux déplacements  $u, v, w$  (n° 2) des points, estimés parallèlement à leurs coordonnées rectangles  $x, y, z$ , les valeurs suivantes qui, si  $f$  est une fonction quelconque, périodique ou non, représentent de la manière la plus générale le mouvement par *ondes planes* parallèles, dont la normale fait avec les  $x, y, z$  des angles dont les cosinus sont

$$l, m, n,$$

et se propageant avec une vitesse uniforme

V

ou parcourant  $Vt$  dans le temps  $t$  :

$$(88) \begin{cases} u = \alpha f(lx + my + nz - Vt), & v = \beta f(lx + my + nz - Vt), \\ w = \gamma f(lx + my + nz - Vt), \end{cases}$$

expressions où

$$\alpha, \beta, \gamma$$

sont les cosinus des angles formés avec les  $x, y, z$  par le déplacement moléculaire  $f(\dots)$  qui, comme on voit, dans cette sorte de mouvement, est de même direction comme de même grandeur à chaque instant pour tous les points situés dans chaque plan d'onde représenté par

$$lx + my + nz = \text{une constante (qui est la distance de ce plan à l'origine)};$$

déplacement le même aussi, pour ce plan, à l'époque actuelle marquée par le temps  $t$ , qu'il sera à l'époque  $t + T$ , sur un second plan qui est actuellement moins distant de  $VT$  à l'origine, ce qui donne bien  $V$  pour la vitesse de propagation des déplacements (88) dans le milieu.

En mettant les expressions (88) pour  $u, v, w$  dans les équations générales d'équilibre (19), ou, symboliquement écrites, (38), après avoir substitué les *inerties* par unité de volume

$$-\rho \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad -\rho \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad -\rho \frac{d^2 w}{dt^2}$$

aux forces  $\rho X, \rho Y, \rho Z$ , et en divisant tout, ensuite, par

$$2\rho f''(lx + my + nz - Vt),$$

faisons, pour abrégér,

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= (p_x^0 l + p_y^0 m + p_z^0 n)^2 \\ &= p_{xx}^0 l^2 + p_{yy}^0 m^2 + p_{zz}^0 n^2 + 2p_{yz}^0 mn + 2p_{zx}^0 nl + 2p_{xy}^0 lm; \end{aligned} \right.$$

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= a_x(a_x l + a_y m + a_z n) \cdot a_x(a_x l + a_y m + a_z n) = \\ &= a_{xxxx} l^2 + a_{xyxy} m^2 + a_{zxxz} n^2 + 2a_{zxyx} mn + 2a_{xxzx} nl + 2a_{xyxa} lm, \\ B &= a_y(\dots) \cdot a_y(\dots) \\ &= a_{xyxy} l^2 + a_{yyyy} m^2 + a_{yzyz} n^2 + 2a_{yyyz} mn + 2a_{xyyz} nl + 2a_{yyyx} lm, \\ C &= a_z(\dots) \cdot a_z(\dots) \\ &= a_{zxxz} l^2 + a_{yzyz} m^2 + a_{zzzz} n^2 + 2a_{zzyz} mn + 2a_{zzzx} nl + 2a_{yzzx} lm, \\ D &= a_y(a_x l + a_y m + a_z n) \cdot a_z(a_x l + a_y m + a_z n) = \\ &= a_{zxxy} l^2 + a_{yyyz} m^2 + a_{zzzy} n^2 + \\ &\quad + (a_{yyz} + a_{yzyz}) mn + (a_{zzxy} + a_{yzzx}) nl + (a_{yyzx} + a_{xyyz}) lm, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 (90) \quad E &= a_z(\dots) \cdot a_x(\dots) = \\
 &= a_{xxzz} l^2 + a_{xyyz} m^2 + a_{zzzz} n^2 \\
 &+ (a_{zzxy} + a_{yzzx}) mn + (a_{zzxx} + a_{zxzx}) nl + (a_{xxyz} + a_{zxxy}) lm, \\
 (suite) \quad F &= a_x(\dots) \cdot a_y(\dots) = \\
 &= a_{xxyy} l^2 + a_{yyyz} m^2 + a_{yzzz} n^2 \\
 &+ (a_{yyzx} + a_{xyyz}) mn + (a_{xxyz} + a_{zxxy}) nl + (a_{xyxy} + a_{xxyy}) lm,
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

ce qui revient à construire, avec M. Haughton, *six ellipsoïdes fixes* dont les équations en coordonnées rectanglées sont données par les formules (90) en mettant 1 pour les premiers membres et  $x, y, z$  pour  $l, m, n$ , puis à mesurer leurs rayons vecteurs tous de même direction  $(l, m, n)$  normale aux plans des ondes, et à appeler A, B, ..., F les *inverses des carrés de ces rayons* [\*]. Nous obtenons, avec ces notations, trois équations contenues dans

$$(91) \quad \frac{A\alpha + F\beta + E\gamma}{\alpha} = \frac{F\alpha + B\beta + D\gamma}{\beta} = \frac{E\alpha + D\beta + C\gamma}{\gamma} = \rho V^2 - P.$$

Ce sont les conditions du mouvement par ondes planes qu'expriment les équations (88), ou les relations nécessaires entre les coefficients d'élasticité  $a$  du milieu, la vitesse  $V$  de propagation et les deux directions  $(\alpha, \beta, \gamma)$  du mouvement moléculaire, et  $(l, m, n)$  des normales aux ondes.

[\*] *On Equilibrium and Motion, etc.*, p. 170. Ces six quantités A, B, ..., F, si l'on admet l'intervention possible des sous-lettres dans les coefficients de leurs développements, ou le principe des égalités complémentaires (8), peuvent être aussi écrites

$$(a_{xx} \text{ ou } a_{yy} \dots \text{ ou } a_{xy})(a_x l + a_y m + a_z n)^2 = a_{xx'x'} \text{ ou } a_{yy'x'} \text{ ou } \dots a_{xy'x'},$$

en appelant  $x'$  la direction de la normale à l'onde; et elles ne sont autre chose que les six composantes de pression  $p_{xx}^1, p_{yy}^1, \dots, p_{xy}^1$  sur les faces perpendiculaires aux  $x, y, z$ , produites par une dilatation  $\partial_{x'} = 1$  perpendiculaire à l'onde, ou, ce qui revient au même quant aux valeurs, celles de la pression normale  $p_{x'x'}$  à l'onde engendrée successivement par des dilatations et des glissements  $\partial_x, \partial_y, \dots, g_{xy}$  d'une grandeur = 1.

Ce sont aussi, comme l'a remarqué Cauchy, les six dérivées secondes, par rapport à  $l, m, n$ , d'une même expression en  $l, m, n$ , qui n'est autre chose que le  $\frac{1}{12}$  de celle (39) de  $A = a_{x'x'x'x'}$  quand on remplace  $c_{xx'}, c_{yy'}, c_{zz'}$  par  $l, m, n$ .

En les écrivant

$$\begin{aligned} (A + P - \rho V^2)\alpha &= -F\epsilon - E\gamma, \\ (B + P - \rho V^2)\epsilon &= -D\gamma - F\alpha, \\ (C + P - \rho V^2)\gamma &= -E\alpha - D\epsilon, \end{aligned}$$

et en les multipliant l'une par l'autre, puis en remplaçant, dans les produits tels que  $D^2 \epsilon \gamma (-F\epsilon - E\gamma)$ , la parenthèse, qui est un second membre, par le premier membre équivalent, les cosinus inconnus  $\alpha, \epsilon, \gamma$  disparaissent, et l'on obtient l'équation du troisième degré en  $V^2$  seul

$$(92) \left\{ \begin{aligned} &(A + P - \rho V^2)(B + P - \rho V^2)(C + P - \rho V^2) - D^2(A + P - \rho V^2) - \\ &- E^2(B + P - \rho V^2) - F^2(C + P - \rho V^2) + 2DEF = 0; \end{aligned} \right.$$

d'où résulte bien la division d'une onde plane, en général, en trois autres qui se propagent avec des vitesses différentes.

Et, comme on obtient une quatrième fraction égale à celles qui forment les trois premiers membres de l'égalité multiple (91), en prenant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs, après les avoir multipliées haut et bas par  $\alpha$ , par  $\epsilon$ , par  $\gamma$  respectivement, ce qui donne

$$(93) \quad A\alpha^2 + B\epsilon^2 + C\gamma^2 + 2D\epsilon\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\epsilon = \rho V^2 - P,$$

équation en coordonnées polaires d'un ellipsoïde dont le rayon vecteur

$\frac{1}{\sqrt{\rho V^2 - P}}$  fait avec les  $x, y, z$  des angles dont les cosinus sont  $\alpha, \epsilon, \gamma$ ; d'où, de nouveau, les équations (91) comme conditions de maximum ou de minimum du rayon vecteur en combinant avec  $\alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 = 1$ , d'où  $\alpha d\alpha + \epsilon d\epsilon + \gamma d\gamma = 0$ , la différentielle de (93) égalée à zéro, l'on voit, et la forme connue des équations (91) et (92) montre d'ailleurs :

1° Que les trois demi-axes de cet ellipsoïde, dont l'équation en coordonnées ordinaires est

$$(94) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1,$$

donneront, en grandeur, les inverses des trois valeurs de  $\sqrt{\rho V^2 - P}$ .

2° Que leurs directions, rectangulaires entre elles, donneront celles des mouvements moléculaires dans chaque onde, ou les trois systèmes correspondants de valeurs des cosinus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

On voit que les résultats sont les mêmes que ceux qui sont déjà connus et relatifs au cas où les pressions antérieures  $p^0$  sont nulles, sauf

$$\sqrt{V^2 - \frac{P}{\rho}} \text{ au lieu des vitesses de propagation } V.$$

On voit aussi, d'après la formule générale (25) de changement de plan de pression, qui donne  $p_{x'x'} = p_{xx} c_{xx'}^2 + \dots + 2p_{xy} c_{xx'} c_{yx'}$ , que la quantité (89)

$$P$$

n'est autre chose que la *composante normale de la pression supportée, avant les déplacements, par l'unité d'une face menée parallèlement aux ondes par le point*  $(x, y, z)$ .

Si cette pression primitive est égale en tous sens et si le milieu est isotrope, il résulte des conditions d'isotropie (62)  $a=b=c=2d+d'=\dots$  que les équations (92), (94) peuvent être mises sous la forme

$$\begin{cases} \left(V^2 - \frac{P+a}{\rho}\right) \left(V^2 - \frac{P+d}{\rho}\right)^2 = 0, \\ d(x^2 + y^2 + z^2) + (a-d)(lx + my + nz)^2 = 1, \end{cases}$$

montrant bien que deux des trois ondes planes se réduisent à une, dont la vitesse de propagation est  $\sqrt{\frac{P+d}{\rho}}$ , et que l'ellipsoïde (94) est coupé suivant des cercles par leurs plans  $lx + my + nz = \text{const.}$ , en sorte que leurs vibrations s'exécutent parallèlement à ces plans.

Mais voyons si le même parallélisme est possible sans l'isotropie.

**18.** *Sur les conditions pour que les mouvements moléculaires dans deux des ondes soient toujours parallèles à leurs plans.* — Il faut pour cela, comme l'observe Green, que dans la troisième onde ils soient normaux, et que par conséquent les équations (91) subsistent en met-

tant  $l, m, n$  au lieu de  $\alpha, \beta, \gamma$ , c'est-à-dire qu'on ait

$$(95) \quad \frac{Al + Fm + En}{l} = \frac{Fl + Bm + Dn}{m} = \frac{El + Dm + Cn}{n},$$

ce qui est d'ailleurs aussi la condition pour que le plan d'onde  $lx + my + nz = 0$  soit bissecteur de toutes les cordes de l'ellipsoïde (94) qui lui sont perpendiculaires, et contienne par conséquent deux de ses axes [\*].

Nous voyons que

$$P = p_{xx}^0 l^2 + p_{yy}^0 m^2 + \dots + 2p_{xy}^0 lm$$

n'y entre pas. Ces conditions (95) de transversalité de deux des directions des mouvements moléculaires sont donc indépendantes des six composantes  $p^0$ , quelles qu'elles soient, des *pressions antérieures*; en

[\*] Si l'on élimine les deux rapports  $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$  entre les équations (91) sans le dernier membre, combinées avec  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  qui exprime le *parallélisme des mouvements moléculaires aux plans des ondes*, on obtient facilement,  $\xi, \eta, \zeta$  représentant les trois excès, divisés respectivement par  $l, m, n$ , de la seconde sur la troisième fraction (95), de la troisième sur la première et de la première sur la deuxième de ces mêmes fractions (d'où  $l\xi + m\eta + n\zeta = 0$ ),

$$\frac{A\xi + F\eta + E\zeta}{\xi} = \frac{F\xi + B\eta + D\zeta}{\eta} = \frac{E\xi + D\eta + C\zeta}{\zeta},$$

ou une seule équation

$$(B - C)\eta\zeta + D(\zeta^2 - \eta^2) + (F\zeta - E\eta)\xi = 0,$$

car les deux autres de même forme que fournit cette égalité multiple rentrent dans celle-ci. Cette équation n'est pas satisfaite seulement par  $\eta = 0, \zeta = 0$ , c'est-à-dire par les égalités (95); elle l'est aussi de plusieurs autres manières donnant, entre les coefficients  $a_{xxxx}$ , etc., si elle doit l'être quelles que soient  $\frac{m}{l}, \frac{n}{l}$  ou les directions des ondes, des relations du troisième degré nombreuses et fort compliquées. Mais on doit observer que ces relations sont inutiles à considérer dans la théorie de la double réfraction ainsi présentée; car, comme l'observe M. Lamé, quand on remplit la condition de *transversalité*  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  sans que ce soit par les égalités (95), on n'a qu'une seule valeur de chacun des deux rapports  $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$ ; par conséquent une seule onde, et pas de biréfringence.

sorte qu'on ne peut pas chercher, dans l'existence possible de pareilles pressions, la réponse aux difficultés auxquelles il va être montré que conduit l'hypothèse d'exacte transversalité des mouvements pour toutes les directions des ondes.

Elles peuvent être satisfaites de deux manières, savoir :

1° *Pour certains systèmes seulement de valeurs des cosinus  $l, m, n$ , c'est-à-dire pour certaines directions de la normale au plan des ondes, dans un milieu quelconque.*

Ces directions de la normale aux ondes sont précisément *celles de maxima et minima des élasticités directes  $a_{x'x'x'x'}$*  que nous avons considérées au n° 10.

En effet, si l'on substitue à A, F, E leurs expressions (90) du numéro précédent dans le premier membre de l'équation (95), on a

$$(96) \quad \frac{Al + Fm + En}{l} = \frac{a_x(a_x l + a_y m + a_z n) \cdot (a_x l + a_y m + a_z n)^2}{l}$$

C'est, eu égard à la formule symbolique (33), et en mettant

$$c_{xx'}, c_{yy'}, c_{zz'} \text{ pour } l, m, n,$$

la même chose que le premier membre  $\frac{a_x a_{x'} \cdot a_{x'} a_{x'}}{c_{xx'}}$  de la triple équation (41) donnant les directions  $x'$  des maxima et minima de  $a_{x'x'x'x'}$ , car  $a_{x'} = a_x c_{xx'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zz'}$ . Et il y a également parité entre les seconds membres comme entre les troisièmes membres de (41) et de (95).

Donc il existe toujours des plans d'ondes auxquels deux des mouvements moléculaires correspondants sont exactement parallèles, le troisième exactement perpendiculaire. Ce sont les plans parallèles à ceux qui touchent la surface dont les rayons vecteurs sont les inverses des  $\sqrt[4]{a_{x'x'x'x'}}$ , aux extrémités des divers diamètres principaux ou coupant cette surface normalement. Il y a toujours *trois* directions de ces plans d'onde. Il y en aurait même (n° 10) jusqu'à *seize* ou (n° 12) *treize* si l'éther, dans les corps cristallisés, avait une contexture aussi variée que ces corps eux-mêmes.

2° *Pour toutes les ondes possibles*, si l'on fait remplir aux coefficients  $a_{xxxx}, \dots, a_{xyxy}$  certaines conditions. On les détermine en chas-

sant les dénominateurs des équations (95), ce qui donne

$$(a_{xx}l^2 + a_{yy}m^2 + a_{zz}n^2 + 2a_{yz}mn + 2a_{zx}nl + 2a_{xy}lm) \times \\ \times (a_xl + a_y m + a_z n) (a_y n - a_z m) = 0$$

et deux autres égalités semblables où le dernier facteur sera

$$a_z l - a_x n \quad \text{ou} \quad a_x m - a_y l,$$

puis développant et égalant à zéro ce qui affecte une même puissance ou un même produit des cosinus  $l, m, n$  dont les rapports  $\frac{m}{l}, \frac{n}{l}$  doivent être indépendants l'un de l'autre. Or on trouve ainsi les équations de condition (87) de Green.

En supposant pour un instant ces quatorze équations, entre les vingt et un coefficients, compatibles avec l'hétérotropie, on en tire les lois de Fresnel (sauf le parallélisme au lieu de la perpendicularité des mouvements aux plans de polarisation) sans être nullement obligé d'introduire dans l'analyse ci-dessus, comme a fait le premier M. Mac-Cullagh [\*], l'hypothèse peu justifiée de Fresnel « que les vibrations ne changent nulle part la densité de l'éther, » ou de faire  $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$  dans les formules, ce qui revient à effacer tous les termes affectés des coefficients d'élasticité directe  $a_{xxxx}, a_{yyyy}, a_{zzzz}$ , comme si ces coefficients étaient nuls [\*\*].

[\*] *An Essay towards a dynamical Theory of crystalline Reflexion and Refraction*, read december 1839 (*Trans. of Irish Academy*, vol. XXI, p. 18 et 25).

[\*\*] Car, au moyen des égalités de Green (87)  $a_{xxxx} = 2a_{yyxy} + a_{zzzy} = 2a_{xxzx} + a_{zzzx}$ , l'on a, par exemple, d'après la première expression (1),

$$p_{xx}^1 = a_{xxxx} \partial_x + (a_{xxxx} - 2a_{xyxy}) \partial_y + (a_{xxxx} - 2a_{zzzx}) \partial_z + a_{xyyz} \xi_y + a_{xxzx} \xi_z + a_{xxxy} \xi_y,$$

qui, si  $\partial_x + \partial_y + \partial_z = 0$ , se réduit à

$$p_{xx}^1 = -2a_{xyxy} \partial_y - 2a_{zzzx} \partial_z + a_{xyyz} \xi_y + \dots,$$

absolument comme si  $a_{xxxx}$  était  $= 0$ .

M. Haughton, à la fin de son Mémoire *A Classification of elastic Media* (*Irish Aca-*



En effet, prenons, pour simplifier, comme font tous les auteurs, trois nouveaux axes rectangulaires  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  de manière à avoir

$$a_{x'x'y'z'} = 0, \quad a_{y'y'z'x'} = 0, \quad a_{z'z'x'y'} = 0,$$

ce qui est possible puisqu'on dispose de trois des neuf angles  $(x, x')$ ,  $(x, y')$ , etc., et ce qui entraîne, d'après les conditions (87),

$$a_{z'x'x'y'} = 0, \quad a_{x'y'y'z'} = 0, \quad a_{y'z'z'x'} = 0.$$

Cela revient à ne conserver que les neuf coefficients de la première ligne des conditions (87), ou à rapporter le milieu aux trois plans de symétrie de texture qu'il possède, comme on voit, quand ces conditions de Green sont supposées remplies. Alors, en se servant des notations abrégées (48)  $a_{xxxx} = a, \dots, a_{yzyz} = d, \dots$ , les expressions (90) se réduisent à

$$(97) \begin{cases} A = al^2 + fm^2 + en^2, & B = fl^2 + am^2 + dn^2, & C = el^2 + dm^2 + an^2, \\ D = (a - d)mn, & E = (a - e)nl, & F = (a - f)lm; \end{cases}$$

l'équation du troisième degré (92) en  $V^2$  devient divisible par  $\rho V^2 - P - a$  et peut être écrite, comme il est facile de le vérifier par un développement comparatif,

$$(98) (\rho V^2 - P - a) \left\{ (\rho V^2 - P)^2 - [(e+f)l^2 + (f+d)m^2 + (d+e)n^2](\rho V^2 - P) + (efl^2 + fdm^2 + den^2)(l^2 + m^2 + n^2) \right\} = 0,$$

dont le premier facteur, égalé à zéro, donne pour  $V$  la vitesse du son dans l'intérieur des solides élastiques, et, pour le milieu éthéré supposé constitué d'après les conditions (87), donne ces ondes à vibrations lon-

*demy*, vol. XXI, p. 40-41), représente le peu de légitimité et l'inconvénient de cette supposition  $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$ . Elle n'évite nullement d'avoir, en  $V^2$ , une équation du troisième degré affectée d'un facteur (voyez ci-après)  $\rho V^2 - P$  qui fournit, si  $P = 0$ , une solution absurde  $V = 0$ , et, si  $P$  n'est pas nul, une onde sphérique à vibrations longitudinales, tout comme quand on n'efface pas  $a_{xxxx}$ , dont la conservation donne au moins à cette onde son vrai rayon.

gitudinales qui doivent s'y former, bien que notre œil ne les perçoive pas, de même que notre oreille n'est pas constituée pour percevoir les vibrations transversales excitées dans l'air; et dont le second facteur égalé à zéro donne, après une analyse connue, l'onde de Fresnel. (*Voyez n° 21.*)

**19.** *Ces conditions, quand elles sont remplies quelle que soit la direction des ondes planes, reviennent à l'isotropie du milieu, et excluent la biréfringence.* — Cela est évident quand on admet entre les coefficients, outre les quinze égalités (5) qui les réduisent à vingt et un distincts, les six égalités complémentaires (8) telles que  $a_{yyzz} = a_{yzyz}$ ,  $a_{xxyz} = a_{zxyx}$  fournies par le calcul des forces moléculaires, car il en résulte que les six coefficients figurant dans la seconde ligne des quatorze conditions (87) sont tous nuls comme ceux de la troisième, et que, pour les autres, on a

$$(99) \quad a_{yzyz} = a_{zxcz} = a_{xyxy} = a_{yyzz} = a_{zzxx} = a_{xxyy} = \frac{1}{3} a_{xxxx} = \frac{1}{3} a_{yyyy} = \frac{1}{3} a_{zzzz},$$

rentrant bien dans les conditions d'isotropie (62), d'où, comme on a vu à la fin du n° 17, deux ondes qui se réunissent en se propageant avec la vitesse  $\sqrt{\frac{p+d}{\rho}}$ , et le milieu est uniréfringent.

Mais vu la controverse dont ces égalités complémentaires (8) sont le sujet, examinons, au moyen de la formule de transformation (33) du n° 6,

$$(100) \quad a_{ns\ xy} = a_n a_s \cdot a_x' a_y', \quad \text{où} \quad a_i = a_x c_{ix} + a_y c_{iy} + a_z c_{iz},$$

en l'appliquant à un milieu élastique dont les vingt et un coefficients relatifs à certains axes  $x, y, z$  remplissent les quatorze conditions (87), quelles valeurs prennent les divers coefficients d'élasticité relatifs à d'autres axes quelconques  $x', y', z'$ .

1° Ces conditions (87) annulent les deux dernières lignes de l'expression (39)  $a_{x'x'x'x'} = a_{xxxx} c_x^4 + \text{etc.}$ , particularisation de l'expression (33) ou (100), et la réduisent à

$$(101) \quad a_{x'x'x'x'} = a_{xxxx} (c_{xx'}^2 + c_{yy'}^2 + c_{zz'}^2)^2 = a_{xxxx}.$$

Donc, si les conditions Green (87) de constante transversalité des vibrations de deux ondes sont remplies dans un milieu, *son élasticité directe est la même en tous sens*; c'est-à-dire qu'une égale dilatation  $\partial_{x'}$   $y$  produit, quelle que soit la direction  $x'$ , une égale pression normale  $p_{x'x'}$  sur une face perpendiculaire à cette direction.

2° La même formule générale (33) ou (100), en y remplaçant  $n$ ,  $s$  par  $x'$ ,  $x'$  et  $x'$ ,  $y'$  par  $x'$ ,  $y'$ , donne

$$a_{x'x'x'y'} = (a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'})^2 \cdot (a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'}) (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'}).$$

Développant, les conditions (87) annulent une partie des termes et réduisent l'expression à

$$(102) \quad a_{x'x'x'y'} \text{ ou } a_{x'y'x'x'} = a_{xxxx} (c_{xx'}^2 + c_{yx'}^2 + c_{zx'}^2) (c_{xx'} c_{xy'} + c_{yx'} c_{yy'} + c_{zx'} c_{zy'}) = 0.$$

Donc les coefficients tels que  $a_{x'x'x'y'}$  sont tous nuls dans un pareil milieu. Ainsi, en tous sens, comme dans un milieu isotrope, *une dilatation  $\partial_{x'}$  n'y produit aucune composante  $p_{x'y'}$* . Et aussi, comme dans ce dernier milieu, *un glissement  $g_{x'y'}$  n'engendre, sur une face perpendiculaire, soit à  $x'$ , soit à  $y'$ , qu'une force tangentielle, sans aucune composante normale de pression*.

3° Si l'on développe les deux expressions suivantes, tirées de la même formule générale (100),

$$\begin{aligned} a_{y'y'z'z'} &= (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})^2 \cdot (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})^2, \\ a_{y'z'y'z'} &= [(a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'}) (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})]^2, \end{aligned}$$

et si, dans les développements, on fait  $a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz}$ , en remplaçant aussi, en vertu des relations (87),  $2 a_{yzyz}$  par  $a_{xxxx} - a_{yyzz}$  et  $2 a_{zxxy}$  par  $- a_{xxyz}$  et ainsi des autres, on obtient, en ayant égard aux relations connues entre les cosinus, notamment à

$$c_{yx'} c_{zy'} - c_{yy'} c_{zx'} = c_{xz'},$$

et autres semblables (où, dans les seconds membres, les indices  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  répondent aux combinaisons  $yz, zx, xy$  et  $y'z', z'x', x'y'$

de ceux des premiers membres), on obtient

$$(103) \begin{cases} a_{y'y'z'z'} = a_{yyzz}c_{xx'}^2 + a_{zzxx}c_{yx'}^2 + a_{xxyy}c_{zx'}^2 \\ \quad - 2a_{axyz}c_{yx'}c_{zx'} - 2a_{yyzx}c_{zx'}c_{xx'} - 2a_{zzxy}c_{xx'}c_{yx'}, \\ a_{y'z'y'z'} = a_{yzyz}c_{xx'}^2 + a_{zxxz}c_{yx'}^2 + a_{xyxy}c_{zx'}^2 \\ \quad + a_{axyz}c_{yx'}c_{zx'} + a_{yyzx}c_{zx'}c_{xx'} + a_{zzxy}c_{xx'}c_{yx'}. \end{cases}$$

Ajoutant la première de ces équations à la seconde doublée, on a, encore en vertu des relations (87),

$$(104) \quad a_{y'y'z'z'} + 2a_{y'z'y'z'} = a_{yyyy} \text{ et par conséquent } = a_{y'y'y'y'} = a_{z'z'z'z'},$$

c'est-à-dire que pour toutes les directions rectangulaires entre elles il y a entre les trois espèces de coefficients  $a_{y'y'y'y'}$ ,  $a_{y'y'z'z'}$ ,  $a_{y'z'y'z'}$ , les mêmes relations, qui sont, comme l'on sait, précisément celles qui ont lieu pour l'isotropie.

4° On obtient de la même manière

$$(105) \quad a_{x'x'y'z'} + 2a_{x'x'x'y'} = 0,$$

en sorte que ces coefficients, qui sont nuls dans un système isotrope pour tous les axes orthogonaux qu'on peut y tracer, le sont aussi dans le système élastique que nous considérons s'ils ont le même signe; et, en tous cas, ils ont des sommes (105) nulles.

5° Toutes les réciproques sont vraies. Les quatorze équations (87) ont lieu entre les coefficients d'élasticité d'un milieu, et pour toutes les directions  $x, y, z$ , et  $x', y', z'$  des axes coordonnés rectangulaires, si, seulement, l'on y a aussi pour toutes,

$$a_{x'x'x'x'} = a_{xxxx} \quad [*];$$

---

[\*] On le prouve en écrivant cette équation  $a_{x'x'x'x'} - a_{xxxx}(c_{xx'}^2 + c_{yx'}^2 + c_{zx'}^2) = 0$ , substituant à  $a_{x'x'x'x'}$  sa valeur (39) et plaçant  $x'$  d'abord dans le plan  $xy$ ; car, alors, l'équation réduite et divisée par  $c_{xx'}c_{yx'}$  donne  $a_{zzxy} = 0$ ,  $a_{yyyz} = 0$  quand on y fait successivement  $c_{xx'} = 1$  et  $c_{xx'} = 0$ ; la même équation donne, par suite,  $2a_{xyxy} + a_{xxyy} - a_{xxxx} = 0$ , ce qui permet d'effacer, dans l'équation particularisée, tout excepté la troisième ligne de l'expression (39), susceptible alors d'être divisée par  $c_{xx'}c_{yx'}c_{zx'}$ , et qui donne alors  $a_{zzyz} + 2a_{zxyx} = 0$  en faisant  $c_{xx'} = 1$ .

ou si l'on y a

$$a_{x'x'y'y'} = 0 \quad [*],$$

ou bien si l'on y a

$$a_{x'x'y'z'} + 2a_{z'x'y'y'} = 0 \quad [**],$$

ou encore si l'on y a, toujours pour toutes les directions  $x', y', z'$ ,

$$a_{x'x'x'x'} - a_{z'x'y'y'} - 2a_{x'y'y'y'} = 0 \quad [***];$$

en sorte que l'une quelconque des quatre espèces de conditions (87), si elle est remplie en tous sens, entraîne toutes les autres [\*\*\*\*].

Il en résulte que l'exacte *transversalité* des mouvements moléculaires,

[\*] En effet, en plaçant  $x', y'$  dans le plan  $xy$ , l'équation  $a_{x'x'y'y'} = 0$ , en composant son premier membre avec la formule (100) ou (33), se réduit à

$$-a_{xxxx}c_{xx'}^3c_{y'x'} + a_{yyyy}c_{y'x'}^3c_{xx'} + (2a_{xyxy} + a_{xzyy})(c_{xx'}^3c_{y'x'} - c_{y'x'}^3c_{xx'}) = 0$$

qui, divisée par  $c_{y'x'}$ , donne, en faisant ensuite  $c_{y'x'} = 0$ ,  $c_{xx'} = 1$ ,

$$a_{xxxx} = 2a_{xyxy} + a_{xzyy}, \text{ d'où } a_{xxzz} = a_{yyyy} \text{ et de même } = a_{zzzz};$$

ce qui réduit l'équation  $a_{x'x'y'y'} = 0$  aux termes affectés des trois binômes tels que  $a_{xzyz} + 2a_{xxzy}$ , et la nullité de celui-ci se prouve en faisant les angles  $(x, x')$ ,  $(y, y')$ ,  $(z, z')$  infiniment petits.

[\*\*] Car, en développant cette équation et plaçant  $x', y'$  dans le plan  $xy$ , elle se réduit, en divisant par  $c_{xx'}c_{y'x'}$ , à

$$a_{yyyz}c_{y'x'} - a_{zzzz}c_{xx'} + 2a_{yyyz}c_{y'x'} - 2a_{xxzz}c_{xx'} = 0,$$

qui, particularisée, conduit à l'annulation de tous les coefficients qui y sont compris; d'où toutes les autres équations de condition (87).

[\*\*\*] Car il en résulte, en mettant toujours  $x', y'$  dans le plan  $xy$ , et effaçant tous les termes affectés d'un trinôme semblable à celui qu'on suppose nul pour toutes les directions, ce qui entraîne  $a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz}$ , il en résulte, dis-je,

$$a_{xxzy}(6c_{y'x'}^2 - 10c_{xx'}^2) + a_{yyyz}(6c_{xx'}^2 - 10c_{y'x'}^2) = 0;$$

d'où, en faisant successivement nuls  $c_{xx'}$  et  $c_{y'x'}$ , deux équations qui, combinées, donnent  $a_{xxzy} = 0$  et  $a_{yyyz} = 0$ : or cela emporte les autres conditions (87).

[\*\*\*\*] Les formules (105) montrent aussi que si les élasticités latérales telles que  $a_{yyzz}$ , ou bien les élasticités tangentielles  $a_{yzyz}$ , sont égales pour trois directions rectan-

ou leur parallélisme à des ondes de toutes les directions dans un milieu transparent, exige une foule de conditions qu'on ne voit remplies que dans les corps isotropes. On remarque, surtout, que non-seulement *une dilatation*  $\delta_{x'}$  *ne produit qu'une pression exactement normale*  $p_{x'x'}$ , ou aucune composante tangentielle de pression sur une face qui est perpendiculaire à sa direction ( $a_{x'y'x'x'} = 0$ ,  $a_{x'z'x'x'} = 0$ ) et, aussi, qu'un glissement sur une face n'y engendre jamais que des composantes tangentielles ( $a_{x'x'y'y'} = 0$ ), mais encore qu'en tout sens, ou quelle que soit la direction  $x'$  dans ce milieu, *une égale dilatation*  $\delta_{x'}$  *produit une pression d'égale intensité*  $p_{x'x'}$  ( $a_{x'x'x'x'}$  constant).

Or une pareille égalité est contraire à toutes les idées qu'on peut se former, d'après les faits, des corps doués de la double réfraction. Ils sont cristallisés sous des formes polyédriques non régulières et variées; ils offrent des clivages suivant certaines directions; ils sont, en un mot, d'une contexture essentiellement inégale dans les divers sens, et qui doit, tout porte à le faire présumer, rendre inégaux les rapports  $\frac{p_{x'x'}}{\delta_{x'}} = a_{x'x'x'x'}$  des pressions  $p$  dans l'éther dont ils sont imprégnés, aux petites dilatations  $\delta$  qui les engendrent, et rendre les pressions obliques aux dilatations, excepté pour certains sens principaux.

Cette présomption est changée en certitude, si l'on considère la biréfringence artificiellement produite par une compression donnée dans un seul sens, ou inégalement dans plusieurs, à un corps amorphe primitivement isotrope et uniréfringent, tel que le verre. On a en effet calculé, au n° 16, l'inégalité des coefficients  $a_{xxxx}$ ,  $a_{yyyy}$  due à l'inégalité des rapprochements moléculaires dans les sens  $x$  et  $y$ . Ce calcul était fondé, il est vrai, sur les expressions (12) assignées aux deux coefficients par l'analyse des actions s'exerçant entre les points matériels suivant leurs lignes de jonction deux à deux, et proportionnellement à une fonction de leur distance. Mais quelque motif qu'on puisse s'alléguer de révoquer en doute cette grande loi qui ne préjuge pourtant rien quant à la forme de la fonction, et quelque chose qu'on puisse concevoir à sa place, il est impossible de ne point convenir que l'iné-

---

gulaires, et, s'il en est de même des élasticités asymétriques telles que  $a_{xxyz}$  ou bien  $a_{zxyz}$ , les premières sont égales aussi pour toutes les directions possibles  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

gal rapprochement moléculaire en divers sens doit influencer sur la grandeur des *élasticités directes*  $a_{xxx} = \frac{p_{xx}}{\delta_x}$  comme elle influe, bien certainement, sur celle des autres élasticités, dites *latérales*,  $a_{xxy} = \frac{p_{xx}}{\delta_y}$ , ou tangentielles,  $a_{xyx} = \frac{p_{xy}}{\delta_{xy}}$ , etc., puisque, sans les inégalités au moins de celles-ci en divers sens, les formules ne donneraient pas de double réfraction. Un milieu ne peut être élastique et vibrant si ses parties n'agissent pas les unes sur les autres, et, quel que soit le mode de leur action, il n'est pas possible d'imaginer qu'elles engendrent des élasticités directes parfaitement égales, lorsqu'il y a une inégalité de contexture qui rend inégales les élasticités latérales ou tangentielles.

La double réfraction est, par tous ces motifs, incompatible avec les quatorze conditions (87) de l'exacte *transversalité* des mouvements moléculaires du fluide éthéré, ou de leur constant et rigoureux parallélisme aux plans des ondes qui s'y propagent sans altération, pour toutes les directions que ces plans peuvent affecter dans un milieu transparent. Ces conditions ne font, au demeurant, qu'exprimer l'*isotropie* de tout milieu où elles sont remplies, et par conséquent son uniréfringence.

**20.** *Sur la manière de présenter rigoureusement la théorie de la lumière.* — Puisqu'il faut renoncer à regarder, avec Green, comme possible l'exact parallélisme des vibrations lumineuses aux ondes planes qui se propagent dans l'intérieur d'un corps doué de la double réfraction, comment expliquer la conformité de toute une série de phénomènes avec les lois que le génie de Fresnel lui a révélées, et qu'il a reliées par une théorie construite en admettant à priori ce parallélisme jusque dans les cristaux, quoique l'expérience ne le montre que dans l'air; et comment déduire ces mêmes lois de l'analyse plus rationnelle qui vient d'être exposée?

L'objet de notre travail ne nous impose point de répondre à cette question, si importante pour les physiciens. Il devrait nous suffire d'ajouter que quand bien même une réponse complète se ferait longtemps attendre, ce ne serait pas une raison de s'arrêter à une théorie reconnue défectueuse dès son apparition, et encore moins de faire flé-

chir illogiquement, pour s'en rapprocher, une analyse plus juste dans ses bases, telle que celle qui se fonde sur les équations de l'élasticité. Et si, au lieu de l'onde de Fresnel, cette analyse exacte ne pouvait fournir qu'une surface plus compliquée, dont on ne sût représenter par une équation qu'une polaire réciproque (*voyez* le numéro suivant), ce serait sur cette dernière qu'il conviendrait d'étudier la marche des ondes planes et des rayons réfractés, en en faisant ensuite voir l'accord seulement approché avec ce qu'a déterminé Fresnel.

Mais quelque chose de plus simple est possible, et est même tout trouvé. Les conditions Green et la supposition de rigoureuse *transversalité* qu'elles énoncent ne sont nullement nécessaires pour obtenir, même exactement, *la surface d'onde de Fresnel*, qui résume en quelque sorte la partie la mieux confirmée de ses immortelles découvertes. On obtient cette surface en posant des conditions moins nombreuses, plus générales, exprimant des relations qui n'ont rien que de plausible et de conforme même à ce que fournissent très-approximativement d'autres considérations, et qui, loin d'entraîner l'isotropie, laissent subsister, à tel degré qu'on veut, l'inégalité si probable et on peut dire certaine des élasticités directes dans deux ou trois sens principaux; en un mot, *en revenant aux résultats des premières recherches de Cauchy*, présentées en 1830, sauf à en changer un peu la forme et à y ajouter quelques développements, et ensuite à emprunter à ses travaux ultérieurs et à ceux de ses émules ce qui est relatif au calcul des *quantités* de lumière réfléchies et réfractées, ainsi qu'à l'explication, peut-être à compléter, des phénomènes de dispersion et autres dont le Mémoire fondamental de 1830 ne s'occupait pas encore.

Si les travaux de Cauchy, souvent cités, mais pas assez étudiés, et qui n'ont jamais eu de réfutation quoiqu'il en ait lui-même provoqué la critique [\*], n'ont point passé dans l'enseignement, ce n'est pas surtout, nous le pensons, en raison de leur forme analytique, dont on serait peut-être parvenu à les dégager, ni à cause de ce *troisième rayon* à vibrations longitudinales ou presque longitudinales invisibles, dont l'existence est indirectement manifestée dans plusieurs phénomènes[\*\*], et que les physiciens commencent à ne plus éluder. C'est, plus proba-

---

[\*] *Comptes rendus*, 24 juillet 1848, t. XXVII, p. 94.

[\*\*] *Comptes rendus*, 18 décembre, p. 622; et aussi les Mémoires cités de Green.



blement, à cause de la forme d'apparence compliquée et bizarre de ces quatre relations que Cauchy impose entre les coefficients d'élasticité comme condition pour arriver aux résultats de Fresnel.

Mais si nous prouvons que ces relations (n° 23 ci après), dont celles de Green ne sont qu'un cas très-particulier, ne diffèrent pas sensiblement de celles (57) de la distribution ellipsoïdale des élasticités, du n° 15, distribution si naturelle et qui doit appartenir sensiblement (n° 16) aux corps ou aux milieux dont l'isotropie a été altérée par des condensations inégales en divers sens; qu'ainsi elles doivent exister d'une manière ou exacte ou extrêmement approchée dans l'éther à l'état où il se trouve entre les molécules des corps transparents biréfringents, alors le lien entre la théorie de Fresnel et la théorie rationnelle, instaurée par Cauchy, aura été trouvé, et rien ne s'opposera plus à ce qu'on s'appuie généralement sur cette dernière, susceptible, au reste, comme on va voir, d'être présentée sans invoquer explicitement la loi controversée des actions moléculaires, et sans admettre par conséquent, entre les coefficients, les égalités complémentaires (8) dont un certain nombre de géomètres refusent de reconnaître la réalité.

21. *Suite. Équation de la surface polaire réciproque de celle d'onde courbe.* — Remarquons d'abord que si, lorsque les vingt et un coefficients d'élasticité sont absolument quelconques, l'équation de la surface d'onde courbe, touchée à un instant donné par toutes les ondes planes qui passaient par son centre à un instant antérieur, est impossible à établir, il n'en est pas de même d'une autre surface courbe, considérée par Cauchy dès 1830, et sur laquelle on peut étudier aussi, comme on a dit tout à l'heure, la propagation de la lumière et les circonstances de sa réfraction.

C'est la surface appelée, dans des Mémoires ultérieurs, *caractéristique* par le même Cauchy, *surface des lenteurs d'onde* (*wave-slowness*) par sir W. Hamilton, et *surface de réfraction* ou plutôt *surface-index* ou *des indices* (parce que ses rayons vecteurs, inverses des vitesses, donnent par cela seul les indices de réfraction) par M. Mac-Cullagh [\*], qui a reconnu qu'elle n'était autre chose que la *réciproque* (polaire

---

[\*] *On the Laws of crystalline Reflexion and Refraction* (*Transactions of Irish Society*, vol. XVIII, p. 38).

réciroque par rapport à une sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) de la surface d'onde courbe.

L'équation de cette surface réciroque est, *en coordonnées polaires* ou sphériques, simplement l'équation (92) du troisième degré en  $V^2$ , en y regardant  $\frac{1}{V}$  comme représentant la longueur de son rayon vecteur, et  $l, m, n$  (qui entrent au second degré dans les sextinômes P, A, B, ..., F) comme les cosinus des angles de ce rayon avec trois axes rectangulaires; d'où résulte qu'en divisant tous les termes par  $\rho^3 V^6$  et en appelant

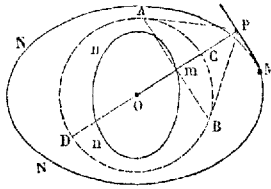
$$\left\{ \begin{array}{l} P', A', B', C', D', E', F', \\ \text{ce que deviennent } P, A, B, C, D, E, F, \end{array} \right.$$

lorsqu'on y divise tous les coefficients a par la densité  $\rho$  et qu'on y remplace  $l, m, n$  par  $x, y, z$ , l'équation de cette surface du sixième degré en coordonnées ordinaires est

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A' + P' - 1)(B' + P' - 1)(C' + P' - 1) - \\ - D'^2(A' + P' - 1)y^2z^2 - E'^2(B' + P' - 1)z^2x^2 - \\ - F'^2(C' + P' - 1)x^2y^2 + 2D'E'F'x^2y^2z^2 = 0. \end{array} \right.$$

En effet, les rayons vecteurs de cette surface ayant des grandeurs  $\frac{1}{V}$ , sont les inverses des perpendiculaires de même direction  $(l, m, n)$  abaissées du centre sur les plans tangents à la surface inconnue de l'onde courbe, puisque ces perpendiculaires ont pour longueurs les espaces V parcourus au bout de l'unité de temps par les ondes planes correspondantes. Or, c'est bien la propriété caractéristique d'une surface polaire réciroque de celle-ci par rapport à une sphère de rayon = 1[\*]. L'onde

[\*] Rappelons en effet que si DACB, NNM, nnm sont les coupes, par un même plan mené du centre commun O, de la sphère, d'une nappe de la surface d'onde, et de la nappe correspondante de la surface (106) qui a ses rayons vecteurs Om inverses des perpendiculaires OP = V de même direction, abaissées de O sur les plans tangents MP à l'onde, le point m se trouvera à l'intersection de OP avec la ligne de jonction AB des points de contact des deux tangentes menées de P au grand cercle de coupe de la sphère, dont le rayon est supposé égal à l'unité; car



courbe est, réciproquement, polaire de cette surface (106), en sorte que leurs particularités sont symétriques [\*], et l'on peut, quels que soient les vingt et un (ou quinze) coefficients d'élasticité  $a_{xxxx}$ , etc., ainsi que les composantes  $p_{xx}^0$  des pressions antérieures aux ébranlements, étudier sur la surface (106) les diverses circonstances de la propagation des ondes planes et de la marche des rayons qu'engendrent leurs intersections mutuelles.

**22. Suite. Décomposition possible de cette surface, et de celle de l'onde elle-même, en un ellipsoïde et une surface du quatrième degré.** — Poursuivons l'emprunt fait à l'analyse de Cauchy, mais en la modifiant et en nous abstenant, comme nous avons dit, de supposer entre les coefficients les égalités complémentaires controversées (8) qui résultent de ses calculs, et en maintenant par conséquent, pour une contexture à trois plans de symétrie, la seule qui soit à considérer pour l'éther, neuf coefficients indépendants que nous désignerons, comme au n° 12, par (48)

$$(107) \quad \begin{cases} a = a_{xxxx}, & b = a_{yyyy}, & c = a_{zzzz}, \\ d = a_{yyzz}, & e = a_{zzxx}, & f = a_{xyxy}, \\ d' = a_{yyzz}, & e' = a_{zzxx}, & f' = a_{xxyy}. \end{cases}$$

L'équation du troisième degré (92) en  $V^2$ , qui est pour ce cas

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} & (al^2 + fm^2 + en^2 + P - \rho V^2)(fl^2 + bm^2 + dn^2 + P - \rho V^2) \times \\ & \quad \times (el^2 + dm^2 + cn^2 + P - \rho V^2) - \\ & - (d + d')^2 (al^2 + fm^2 + en^2 + P - \rho V^2) m^2 n^2 - \\ & - (e + e')^2 (fl^2 + bm^2 + dn^2 + P - \rho V^2) n^2 l^2 - \\ & - (f + f')^2 (el^2 + dm^2 + cn^2 + P - \rho V^2) l^2 m^2 + \\ & + 2(d + d')(e + e')(f + f') l^2 m^2 n^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

$\overline{OA}^2 = 1 = Om \times OP$  prouve que  $Am$  est perpendiculaire à  $OP$ ;  $m$  est donc bien le pôle du plan  $PM$  par rapport à cette sphère.

[\*] Cette propriété paraît n'avoir rien de commun avec celle que possède l'onde de Fresnel ou la surface (120) ci-après, d'être sa propre polaire réciproque par rapport à un ellipsoïde  $\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ca} + \frac{z^2}{ab} = 1$  (18<sup>e</sup> Leçon sur l'Élasticité, de M. Lamé).

peut être écrite, en changeant les signes, sous la forme suivante (109), comme il est facile de le vérifier par un développement comparatif du premier terme de l'équation (108) et de la partie de l'équation (109) étrangère à ses quatre derniers termes; et, cela, en laissant  $l, m, n$  quelconques ou sans avoir besoin de les supposer liés par  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ :

$$(109) \left\{ \begin{aligned} & (\rho V^2 - P - a l^2 - b m^2 - c n^2) \left\{ (\rho V^2 - P)^2 - [(e+f)l^2 + (f+d)m^2 + (d+e)n^2] (\rho V^2 - P) + \right. \\ & \quad \left. + (efl^2 + fdm^2 + den^2)(l^2 + m^2 + n^2) \right\} \\ & - [(b-d)(c-d) - (d+d')^2] (al^2 + fm^2 + cn^2 + P - \rho V^2) m^2 n^2 \\ & - [(c-e)(a-e) - (e+e')^2] (fl^2 + bm^2 + dn^2 + P - \rho V^2) n^2 l^2 \\ & - [(a-f)(b-f) - (f+f')^2] (el^2 + dm^2 + cn^2 + P - \rho V^2) l^2 m^2 \\ & + [(a-e)(b-f)c-d] + (a-f)(b-d)(c-e) - 2(d+d')(e+e')(f+f')] l^2 m^2 n^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Elle donne immédiatement les trois systèmes suivants de valeurs des carrés des vitesses de propagation pour des plans d'onde perpendiculaires aux coordonnées :

$$(110) \left\{ \begin{aligned} & V^2 = \frac{a+P}{\rho}, \frac{e+P}{\rho}, \frac{f+P}{\rho} \text{ pour } l=1, m=0, n=0 \text{ (ondes perp. aux } x), \\ & V^2 = \frac{b+P}{\rho}, \frac{f+P}{\rho}, \frac{d+P}{\rho} \text{ pour } l=0, m=1, n=0 \text{ (ondes perp. aux } y), \\ & V^2 = \frac{c+P}{\rho}, \frac{d+P}{\rho}, \frac{e+P}{\rho} \text{ pour } l=0, m=0, n=1 \text{ (ondes perp. aux } z). \end{aligned} \right.$$

Comme elle représente la surface réciproque de celle d'onde quand  $\frac{1}{V}$  est le rayon vecteur et  $l, m, n$  sont les cosinus de ses angles avec trois axes fixes, surface représentée aussi en coordonnées ordinaires par la même équation lorsqu'on y remplace

$$V^2 \text{ par } 1, \text{ et } l, m, n \text{ par } x, y, z,$$

la coupe de cette surface réciproque par le plan des  $yz$ , pour lequel

$$l=0 \text{ ou } x=0,$$

sera, quand il y aura entre les coefficients  $b, c, d, d'$  la relation

$$(b-d)(c-d) = (d+d')^2,$$

représentée par la première ligne de l'équation (109) égalée à zéro, ou

par l'équation

$$(111) (\rho V^2 - P - b m^2 - c n^2)(\rho V^2 - P - f m^2 - e n^2)[\rho V^2 - P - d(m^2 + n^2)] = 0.$$

Cette coupe se composera par conséquent de *trois ellipses* (et même deux ellipses et un cercle si la pression primitive  $P = p_{xx}^0 l^2 + p_{yy}^0 m^2 + p_{zz}^0 n^2$  est égale dans tous les sens également inclinés sur les  $x$ , ou si  $p_{yy}^0 = p_{zz}^0$ ).

Comme les coupes diamétrales principales d'une pareille surface et de sa polaire réciproque sont elles-mêmes polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à un cercle concentrique de rayon = 1, la coupe de la *surface d'onde* par le plan  $yz$  se composera également d'une ellipse pour la nappe donnant dans les sens  $y$  et  $z$  des vitesses de propagation de vibrations longitudinales produites par les élasticités directes  $b, c$ , et, pour les deux autres nappes, donnant, dans les mêmes sens, des vitesses de propagation de vibrations transversales dues aux élasticités tangentielles  $d, e, f$ , une ellipse et un cercle (toujours si  $P$  ne dépend que de  $l$ ) comme la surface de Fresnel.

Deux autres conditions ou relations analogues donneront des coupes elliptiques ou circulaires par les plans  $zx$  et  $xy$ .

Si toutes trois sont remplies et si, en outre, le dernier terme de l'équation (109) s'annule, c'est-à-dire si l'on a à la fois

$$(112) \begin{cases} (b - d)(c - d) = (d + d')^2, & (c - e)(a - e) = (e + e')^2, \\ (a - f)(b - f) = (f + f')^2, \end{cases}$$

$$(113) \begin{cases} (a - e)(b - f)(c - d) + (a - f)(b - d)(c - e) = \\ = 2(d + d')(e + e')(f + f'), \end{cases}$$

l'équation (109) de la surface réciproque de l'onde se réduit à la première ligne. Cette surface se compose en conséquence

$$(114) \begin{cases} \text{D'un ellipsoïde . . . . . } P + a l^2 + b m^2 + c n^2 = \rho V^2, \\ \text{et d'une surface } \left\{ \begin{array}{l} (\rho V^2 - P)^2 - [(e + f)l^2 + (f + d)m^2 + (d + e)n^2](\rho V^2 - P) + \\ \text{du quatrième degré } \left\{ \begin{array}{l} + (efl^2 + fdm^2 + den^2)(l^2 + m^2 + n^2) = 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}$$

dont les équations, toujours en coordonnées polaires, si la pression primitive  $P = p_{xx}^0 l^2 + p_{yy}^0 m^2 + \dots$  est constante  $= p_{xx}^0 = p_{yy}^0 = p_{zz}^0$ , c'est-à-dire si elle est indépendante de  $l, m, n$ , ou égale en tous sens, peuvent, en représentant ainsi les carrés des vitesses de propagation

principales

$$(115) \quad \begin{cases} \frac{a+P}{\rho} = A^2, & \frac{b+P}{\rho} = B^2, & \frac{c+P}{\rho} = C^2, \\ \frac{d+P}{\rho} = a^2, & \frac{e+P}{\rho} = b^2, & \frac{f+P}{\rho} = c^2, \end{cases}$$

être écrites, comme il est facile de le vérifier pour la seconde en la développant,

$$(116) \quad \begin{cases} A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 = V^2, \\ V^4 - [(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2]V^2 + \\ + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2)(l^2 + m^2 + n^2) = 0; \end{cases}$$

ce qui donne, en coordonnées rectangles, en divisant par  $V^2$  et  $V^4$ , et mettant  $x, y, z$  pour les trois projections orthogonales  $\frac{1}{V}l, \frac{1}{V}m, \frac{1}{V}n$  du rayon vecteur  $\frac{1}{V}$ :

$$(117) \quad A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = 1,$$

$$(118) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)(b^2 c^2 x^2 + c^2 a^2 y^2 + a^2 b^2 z^2) - \\ - (b^2 + c^2)x^2 - (c^2 + a^2)y^2 - (a^2 + b^2)z^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

La surface d'onde, polaire réciproque de la double surface (117), (118) se composera de même d'un ellipsoïde et d'une surface du quatrième degré dont les équations s'obtiendront en mettant

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \quad \text{à la place de } A, B, C, a, b, c,$$

car on a reconnu que la surface du quatrième degré (118) partageait avec toute surface du second degré pourvue de centre la propriété de fournir sa polaire réciproque par rapport à une sphère concentrique de rayon 1 lorsqu'on change, dans son équation, les trois paramètres en leurs inverses [\*]. Il en résultera, pour l'onde,

$$(119) \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \quad \text{avec}$$

$$(120) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - \\ - (b^2 + c^2)a^2 x^2 - (c^2 + a^2)b^2 y^2 - (a^2 + b^2)c^2 z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0. \end{cases}$$

---

[\*] On connaît l'ingénieuse démonstration, en partie synthétique, mais encore com-

On a ainsi, lorsque les relations (112), (113) de Cauchy existent entre les neuf coefficients d'élasticité du milieu, pour l'onde courbe, un *ellipsoïde* (119) et la surface d'onde (120) de Fresnel.

**23.** *Examen des conditions trouvées par Cauchy pour que l'équation de l'onde courbe se décompose en deux autres dont l'une donne la surface de Fresnel.* — Observons d'abord que ces quatre conditions (112), (113) comprennent comme cas particulier les conditions (87) de Green; car celles-ci, pour un milieu à trois plans de symétrie, se

pliquée, qu'a donnée M. Mac-Cullagh (Mémoire cité, p. 33) de cette remarquable dépendance réciproque de la surface (118) et de la surface (120) de Fresnel, démonstration qui a été encore plus dégagée de calcul par M. Plucker (*Journal de Crelle*, t. XIX, 1839, p. 91). La démonstration analytique la plus simple que nous en connaissions est celle que Cauchy a donnée, non pas au Mémoire de 1830, où il se borne au seul cas de différences très-petites entre les trois paramètres  $a, b, c$ , mais au § III d'un *Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction*, du 20 mai 1839, inséré au tome XVIII (1842) des *Mémoires de l'Institut*.

Nous avons présenté, au reste (*Comptes rendus*, 17 août 1863, t. LVII, p. 387), des observations sur le § I<sup>er</sup> de ce même Mémoire, où Cauchy, pour montrer que son analyse s'adaptait à diverses opinions, a cru pouvoir faire aux partisans de la perpendicularité des vibrations aux plans de polarisation, jusque-là combattue par lui, une concession qui nous paraît impossible, car elle consiste à prendre, pour établir l'équation (118),

$$\frac{p_{zz}^0 + e}{\rho} = \frac{p_{yy}^0 + f}{\rho} = a^2, \quad \frac{p_{xx}^0 + f}{\rho} = \frac{p_{zz}^0 + d}{\rho} = b^2, \quad \frac{p_{yy}^0 + d}{\rho} = \frac{p_{xx}^0 + e}{\rho} = c^2,$$

ce qui exigerait entre les coefficients d'élasticité tangentielle  $d = a_{yzyz}$ ,  $e = a_{zxzx}$ ,  $f = a_{xyxy}$  dans les trois sens, et les trois composantes  $p^0$  des pressions qui sont antérieures aux vibrations, ou qui ont lieu à l'intérieur d'un cristal dans l'état de repos, les relations singulières suivantes

$$e - f = p_{yy}^0 - p_{zz}^0, \quad f - d = p_{zz}^0 - p_{xx}^0, \quad d - e = p_{xx}^0 - p_{yy}^0$$

qu'on peut hardiment regarder comme ne pouvant pas exister; car les pressions de l'éther dans l'état naturel à l'intérieur d'un cristal doivent se régler d'après les pressions de l'éther qui l'environne, et, si elles offrent en divers sens quelques différences, elles ne peuvent être constamment égales à celles des coefficients d'élasticité dans ces mêmes sens.

réduisent aux cinq suivantes

$$(121) \quad a = b = c = 2d + d' = 2e + e' = 2f + f',$$

qui, introduites dans les quatre équations Cauchy (112), (113), y satisfont identiquement. Il suffit même de faire  $b = c$  dans la première pour que cela entraîne  $b = 2d + d'$ , et réciproquement.

Quelle que soit la signification intrinsèque de ces conditions ou relations, il vaut évidemment mieux les admettre entre les coefficients que les conditions ou relations Green (87) pour obtenir l'onde de Fresnel, supposée fournie par l'expérience, car elles sont, comme on a dit, moins nombreuses, plus générales, compatibles, non-seulement avec les égalités  $d = d'$ ,  $e = e'$ ,  $f = f'$  que fournit le calcul des forces moléculaires, et aussi avec tout autre rapport que l'égalité entre  $d'$  et  $d$ ,  $e'$  et  $e$ ,  $f'$  et  $f$  si on le croit possible, mais aussi avec des rapports mutuels quelconques entre les grandeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des trois élasticités directes principales; en sorte qu'elles n'entraînent pas, comme les conditions Green, l'égalité élasticité en tous sens, d'où (n° 19) l'impossibilité de la double réfraction ou de toute surface d'onde autre que la sphère.

Mais examinons ce que sont en elles-mêmes ces conditions (112), (113) de Cauchy.

Nous avons vu (n° 15) que lorsqu'on a les suivantes (57)

$$(122) \quad 2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab},$$

les élasticités directes se distribuent autour de chaque point suivant une loi *ellipsoïdale* simple et entraînant des propriétés particulières et remarquables, et que ce mode de distribution est, ou exactement ou à cela près de quantités du second ordre qui sont négligeables quand les élasticités  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ne diffèrent pas trop considérablement entre elles, le mode qui doit avoir lieu dans les corps primitivement isotropes dont on a rapproché inégalement les molécules en divers sens par des compressions permanentes, ou par la trempe, l'étirage, etc., c'est-à-dire généralement dans les corps amorphes ou à cristallisation confuse.

Or, tous les physiciens admettent que cet état moléculaire est celui où se trouve l'éther dans l'intérieur des divers corps transparents



biréfringents. En effet, 1° un cristal dont la forme primitive est un cube ou tout autre polyèdre régulier ne produit pas la double réfraction, en sorte que l'éther contenu doit y être isotrope comme dans l'air; 2° si l'une des coupes du cristal est un polygone régulier, tout s'y passe de la même manière autour des perpendiculaires à cette coupe, et le cristal est à *un axe*; 3° enfin, quelque grande que soit la variété des autres formes cristallines, elles n'offrent qu'une seule deuxième espèce de biréfringence, dite à *deux axes*, comme celle que présente le verre comprimé inégalement dans deux sens.

Comparons donc l'une des relations (112), la première par exemple, avec la première (122) qui contient les mêmes lettres. Si nous faisons, comme au n° 13,

$$\frac{d}{d'} = i,$$

rapport qui est = 1 quand on admet les résultats du calcul des actions moléculaires, et si nous appelons  $d_1$ ,  $d_2$  les valeurs de  $d$  tirées de l'équation (112)  $(b-d)(c-d) = (d+d')^2$ , et de l'équation (122)  $2d + d' = \sqrt{bc}$ , nous avons

$$(123) \quad d_1 = \frac{-(b+c) + \sqrt{4bc(1+i)^2 + (b-c)^2}}{2i(2+i)}, \quad d_2 = \frac{\sqrt{bc}}{2+i},$$

d'où l'on déduit facilement que le rapport de  $d_1$  à  $d_2$ , développé suivant les puissances de  $\frac{b-c}{c}$ , est

$$1 - \frac{1}{8(1+i)} \left(\frac{b-c}{c}\right)^2 + \frac{1}{8(1+i)} \left(\frac{b-c}{c}\right)^3 - \dots,$$

ou ne diffère de 1 que d'une petite fraction du carré de  $\frac{b-c}{c}$ . Mais on tire directement des expressions (123)

|            |                              |              |                   |
|------------|------------------------------|--------------|-------------------|
| que pour   | $b = 1,1c,$                  | $b = 1,25c,$ | $b = 1,50c,$      |
| en faisant | $i = 1$                      | $i = 2$      | $i = \frac{1}{2}$ |
|            | l'on a                       |              |                   |
|            | $\frac{d_1}{d_2} = 0,99943,$ | $0,99689,$   | $0,98777,$        |
|            | $0,99788,$                   | $0,99586,$   | $0,98641,$        |
|            | $0,99962,$                   | $0,99793,$   | $0,99316.$        |

D'où il suit que quelque valeur qu'on veuille attribuer au rapport  $i = \frac{d'}{d}$ , et pour des différences même très-notables entre les élasticités directes  $a, b, c$  du milieu dans les trois sens principaux, il y a presque *égalité* entre les deux valeurs, telles que  $d_1$  et  $d_2$ , tirées des conditions (112) Cauchy et (122) de distribution ellipsoïdale, pour chacune des trois élasticités tangentielles, telles que  $d$ , dont les racines carrées sont proportionnelles aux vitesses de la lumière dans les trois mêmes sens [\*].

Et on peut même voir que les valeurs (79) que nous avons trouvées au n° 16 pour  $a_{xxxx} = a, a_{yyyy} = b, a_{xyxy} = f$  en fonction de trois augmentations permanentes  $\delta, \delta', \delta''$  des distances moléculaires en trois sens, satisfont tout aussi bien (pour  $i = 1$ ) à l'équation (112)  $(a - f)(b - f) = 4f^2$  qu'à l'équation (122)  $3f = \sqrt{ab}$ ; car la substitution prouve que le premier membre de (112) ne diffère du second que de

$$-\frac{1}{3} \left[ \frac{(1 + \delta)^2 - (1 + \delta')^2}{1 + \delta''} \right]^2 a_4^2,$$

qui est de l'ordre des quantités négligées au n° 16.

Quant à la quatrième condition Cauchy, ou à la relation (113), elle est, avec une grande approximation, une conséquence des trois (112); car, lorsque celles-ci sont remplies, on déduit de leur multiplication l'une par l'autre que le produit des deux termes

$$(a - e)(b - f)(c - d), \quad (a - f)(b - d)(c - e)$$

du premier membre de l'équation (113) est égal au quart du carré du

[\*] Nous avons vu au n° 13 que si l'on a  $2d + d' = \frac{b+c}{2}$ , il en résulte une autre espèce de distribution ellipsoïdale, mais ne donnant pas l'intégrabilité reconnue au n° 15. On en tirerait  $d = \frac{b+c}{2(2+i)}$ . En appelant  $d_1$  cette valeur de  $d$ , on trouverait, pour  $i = 1$ , en supposant successivement  $b = 1,1c, 1,25c, 1,5c$ , le rapport  $\frac{d_1}{d_2} = 0,99954, 0,99072, 0,96977$ . Elles sont, quand  $b$  excède  $1,1c$ , moins approchées de l'unité que les rapports de  $d_1$  à  $d_2$  tirés de  $2d + d' = \sqrt{bc}$ .

second membre, d'où il suit que ces deux termes sont égaux entre eux et à  $(d + d')(e + e')(f + f')$ . Or, si dans l'égalité qui en résulte

$$(124) \quad (a - e)(b - f)(c - d) - (d + d')(e + e')(f + f') = 0$$

on fait, comme tout à l'heure,  $\frac{d'}{d}$ , et aussi  $\frac{e'}{e}$  et  $\frac{f'}{f} = i$ , et l'on remplace  $d, e, f$  par leurs valeurs, telles que celle (123) de  $d$ , tirées des trois équations (112), valeurs qui, si l'on pose

$$(125) \quad \frac{b - c}{c} = \varepsilon, \quad \frac{c - a}{a} = \varepsilon', \quad \frac{a - b}{b} = \varepsilon'',$$

sont, étant développées suivant les puissances de  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ ,

$$d = c \left[ \frac{1}{2+i} + \frac{\varepsilon}{2(2+i)} - \frac{\varepsilon^2}{8(1+i)} + \frac{\varepsilon^3}{16(1+i)} - \dots \right],$$

$$e = a \left[ \frac{1}{2+i} + \frac{\varepsilon'}{2(2+i)} - \dots \right], \quad f = b \left[ \frac{1}{2+i} + \frac{\varepsilon''}{2(2+i)} - \dots \right],$$

l'on trouve, pour le premier membre de l'équation (124),

$$\frac{1+i}{8(2+i)} abc \left\{ -\frac{4+4i}{2+i} (\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'') - \frac{2i}{2+i} (\varepsilon' \varepsilon'' + \varepsilon'' \varepsilon + \varepsilon \varepsilon') + \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 \right\} + \text{termes du troisième ordre en } \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$$

Mais les équations (125) donnent

$$(126) \quad \begin{cases} (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')(1 + \varepsilon'') = 1, \text{ d'où} \\ \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' = -(\varepsilon' \varepsilon'' + \varepsilon'' \varepsilon + \varepsilon \varepsilon') - \varepsilon \varepsilon' \varepsilon''; \end{cases}$$

substituant, il vient pour ce même premier membre de l'équation (124), en n'écrivant pas les termes du troisième ordre :

$$\frac{1+i}{8(2+i)} abc \text{ multiplié par } (\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'')^2 \text{ qui est du quatrième ordre d'après la valeur de } \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' \text{ qu'on vient d'écrire.}$$

Les deux membres de la quatrième équation de condition (113)

donnée par M. Cauchy ne diffèrent donc entre eux que de produits généralement négligeables.

Aussi, en faisant dans l'équation (113)

$$a = 1,4, \quad b = 1,2, \quad c = 1, \quad \text{avec} \quad i = 1 \quad \text{ou} \quad d = d', \quad e = e', \quad f = f'$$

et

$$e = 0,391623, \quad f = 0,431408,$$

valeurs fournies alors par les deux dernières équations (112), on tire de cette équation (113)

$$d = 0,364375,$$

qui diffère à peine de 0,364390 déduite de la première (112) pour les mêmes suppositions. Et, si l'on fait

$$a = 1,2, \quad b = 1,1, \quad c = 1, \quad \text{d'où} \quad e = 0,364390, \quad f = 0,382790,$$

on tire de l'équation (113)

$$d = 0,349419$$

sensiblement égal à 0,3494045 déduit de (112).

Les conditions Cauchy (112), (113) expriment donc très-approximativement, et peut-être presque exactement (vu qu'il n'est pas impossible que les termes d'ordre supérieur en  $\delta, \delta', \delta''$  négligés au n° 16, et dont la grandeur dépend de la fonction inconnue  $f(r)$ , compensent ceux de même ordre qu'on néglige ici), l'état réel des élasticités, en divers sens, du fluide éthéré dans l'intérieur des corps transparents non isotropes ou isophanes.

**24. Conséquences et conclusion de ce paragraphe.** — On voit que la surface du quatrième degré dont l'importante découverte est due à Fresnel, et dont MM. Hamilton, etc., ont étudié les particularités avec leurs conséquences singulières que l'expérience a confirmées si admirablement, peut, sans contredire aucunement la théorie mathématique due à Cauchy, continuer de servir à déterminer la marche de deux des trois systèmes d'ondes planes, ou celle des deux rayons éclairants. Cette théorie de Cauchy, rationnellement fondée sur les équations de

l'élasticité, sera, il est vrai, un peu moins concordante avec celle de Fresnel en ce qui regarde les directions des vibrations éthérées, et, par suite, les *quantités* de lumière réfractées, etc., qu'en ce qui regarde la marche des rayons, car, d'après elle, lorsqu'un faisceau lumineux aura passé de l'air dans un cristal, les vibrations primitivement perpendiculaires à la direction de ce faisceau y seront devenues un peu obliques, sauf pour les directions où les élasticités directes sont des maxima ou des minima (nos 10 et 18), et ne redeviendront exactement transversales à l'émergence qu'avec diminution d'une certaine proportion, changée en vibrations longitudinales et invisibles. Ce résultat a été même la matière d'une objection contre la théorie mathématique qui le fournit, car des mesurages ont semblé donner l'égalité entre la quantité de lumière reçue sur un cristal et la somme des quantités qu'il transmet en deux rayons, et qu'il réfléchit à ses faces d'incidence et d'émergence. On a objecté aussi le fait de l'invisibilité du *troisième rayon*, dont les vibrations, généralement un peu obliques dans le cristal, doivent, à sa sortie, se changer partiellement en vibrations transversales ou lumineuses. Mais Cauchy a répondu, en 1830 [\*], que la proportion engendrée de ces dernières vibrations était trop faible pour faire impression, vu que le degré d'obliquité des vibrations dans le cristal, nul pour les directions de plus grande et de plus petite élasticité, est fort peu considérable pour les directions intermédiaires; et, d'ailleurs, des recherches plus particulières qu'il a faites depuis (et qui seraient à compléter) sur ce qui se passe tout auprès des surfaces de séparation de deux milieux transparents paraîtraient prouver que certains exposants des formules peuvent passer de l'imaginaire au réel, ce qui change certains mouvements périodiques en mouvements rapidement décroissants ou *évanescents*, comme ceux qui ont lieu à la pénétration dans un corps opaque, etc. Et, à l'autre objection, tirée des expériences de non-déperdition de la quantité totale, on peut très-bien répondre que des vibrations longitudinales ou invisibles, envoyées par le corps lumineux en même temps que les autres, ont dû se changer partiellement en vibrations transversales ou visibles, et compenser les petites pertes

---

[\*] *Bulletin des Sciences* (Ferussac), t. XIII, n° 217, p. 425.

de celles-ci [\*], au degré d'approximation que comportent les procédés photométriques, toujours imparfaits malgré leurs perfectionnements récents, surtout quand il faut recueillir, pour les y appliquer, des rayons plusieurs fois réfléchis dans l'intérieur du cristal, etc.

Il n'est pas besoin d'insister sur les avantages, on peut dire la nécessité, de la substitution, dans l'enseignement d'une branche de la physique, d'une théorie rationnelle à une théorie en partie inexacte ou fondée sur des hypothèses offrant entre elles des contradictions. Si les faits semblent d'abord y cadrer moins bien, on devra y voir seulement un motif de se livrer à des recherches plus particulières qui ouvriront peut-être un champ nouveau de découvertes, resté inexploré sans cela; et sans doute on y sera aidé par l'étude de la polaire réciproque de l'onde à trois nappes (*caractéristique, index-surface, wave-slowness*), utile à examiner dès à présent dans ses propriétés et particularités, ainsi que dans les conséquences où sa considération peut conduire [\*\*].

Telles sont les remarques suggérées par l'étude ci-dessus, que nous

[\*] *Bulletin de la Société Philomathique*, 22 décembre 1855, ou journal *l'Institut* du 23 janvier 1856, n° 1151.

[\*\*] Déjà M. Haughton, en 1846 (*On the Equilibrium and Motion of Bodies, Irish Society*, vol. XXI, Part II, a indiqué l'usage de cette surface réciproque pour construire les trois ondes réfractées, et a montré (p. 182-186) que quand on prend pour plans coordonnés les trois plans de symétrie que le milieu offre toujours, chacune de ses trois intersections par ces plans se compose de trois courbes fermées ayant le même centre et les mêmes deux axes de symétrie, courbes dont l'une est une ellipse et dont les deux autres sont représentées par une même équation du quatrième degré. Celles-ci ne se coupent jamais; mais, sur un des trois plans (et un seul par la raison que a, b, c sont toujours plus grands que d, e, f), l'une d'elles est coupée par l'ellipse en quatre points qui sont des *nœuds* ou *ombilics* analogues à ceux de la surface Fresnel, et qui conduisent à des conséquences si bien vérifiées. La seconde courbe non elliptique est entièrement intérieure aux deux autres courbes fermées, et elle répond, pour l'onde, à la

nappe *entièrement extérieure* dont les demi-axes sont  $\sqrt{\frac{a+P}{\rho}} = A$ ,  $\sqrt{\frac{b+P}{\rho}} = B$ ,  $\sqrt{\frac{c+P}{\rho}} = C$ , et qui donne les vitesses des rayons dont les vibrations sont exactement longitudinales quand ils sont dans les directions de ces axes, et presque longitudinales quand ils sont dans les autres directions.

soumettons aux physiciens et aux géomètres, et dont plusieurs, sans doute, ne leur ont pas échappé [\*].

§ V. — *Distribution, en divers sens, des modules ou coefficients d'élasticité définis à la manière de Young et de Navier.*

25. *En quoi les modules diffèrent des élasticités directes.* — Supposons que d'une petite portion d'un corps élastique, ayant son milieu au point d'un corps dont les coordonnées rectangulaires sont  $x, y, z$ , l'on extraie un prisme très-mince dont les arêtes aient la direction arbitraire désignée par  $x'$ ; le quotient

$$E = \frac{P}{\delta_{x'}}$$

d'une force de traction de même direction, appliquée et uniformément répartie aux divers points de ses deux bases, et dont l'intensité  $p$  ou  $p_{x'x'}$  est rapportée à l'unité de leurs superficies, divisée par la proportion  $\delta_{x'}$  de l'allongement qu'elle fera subir au petit prisme, pourra être pris pour mesure de l'élasticité du corps au point  $(x, y, z)$  dans la direction  $x'$ .

C'est, comme on sait, le *module* ou *coefficient* d'élasticité introduit

[\*] Dans des Mémoires présentés les 5 décembre 1859, 16 janvier 1860 et 4 mars 1861 (*Comptes rendus*, t. XLIX, p. 888; t. L, p. 141; t. LII, p. 393), et, aussi, dans un ouvrage publié il y a quelques jours (*Essai sur la théorie de la Lumière*), M. Briot, regardant aussi l'éther comme simplement contracté ou dilaté d'une manière inégale dans les corps biréfringents, conclut comme ci-dessus à ce qu'on ne regarde les vibrations que comme *quasi transversales* et *quasi longitudinales* au passage de la lumière à travers ces corps, bien qu'il s'impose pour condition d'arriver *exactement* à l'onde de Fresnel. Il croit devoir faire, pour atteindre ce dernier but, une hypothèse  $f(r) = -\frac{\mu}{r^n}$  sur la forme de la fonction de la distance  $r$  des molécules qui représente leurs répulsions mutuelles, et même assigner la valeur 6 à l'exposant  $n$ ; nous croyons que ce qui précède dispense de cette supposition hardie, qu'il lui sera peut-être difficile de faire accepter.

M. Émile Mathieu, dans un Mémoire tout récent où il considère la surface (40) (*Comptes rendus*, 9 février 1863, t. LVI, p. 255), conclut aussi à conserver l'onde à vibrations invisibles (qu'il regarde, avec Green, comme sphérique, même dans les cristaux).

par Young et par Navier, facile à évaluer expérimentalement, et entrant dans toutes les formules pratiques de l'extension et de la flexion des pièces solides dont la longueur excède beaucoup les dimensions transversales.

Ce coefficient E est différent de celui que nous avons appelé, avec M. Rankine, l'élasticité directe, savoir  $a_{x'x'x'x'}$  des §§ III, IV (nos 5, 19), bien qu'il soit aussi quotient d'une pression  $p_{x'x'}$  par la dilatation correspondante  $\delta_{x'}$ , car cette dilatation, lorsqu'on veut évaluer  $a_{x'x'x'x'}$ , est supposée la seule déformation que subisse la portion de corps où on la considère, tandis que lorsqu'on étend longitudinalement un petit prisme isolé, il s'y opère naturellement des contractions transversales et même quelquefois des glissements intérieurs, nécessaires pour qu'il n'y ait, sur ses faces latérales supposées libres, ni pressions normales, ni pressions tangentielles, et que ses bases n'éprouvent de pressions ou tractions que normalement.

Le module E est aussi le nombre qui, divisé par la densité  $\rho$ , donne le carré de la vitesse du son dans le prisme isolé. Si  $\Omega$  est cette vitesse, on a

$$(127) \quad E = \rho \Omega^2;$$

et c'est comme loi des produits  $\rho \Omega^2$  que Cauchy a calculé, dans un beau Mémoire [\*], les relations qu'ont entre elles en divers sens les valeurs de E.

**26. Formule et surface donnant la loi de variation du module d'élasticité en divers sens.** — Comme les faces du petit prisme tiré dans la direction  $x'$  ne doivent éprouver aucune autre action extérieure, on aura,  $y'$  et  $z'$  étant deux directions rectangulaires à  $x'$ , et normalement auxquelles on peut supposer taillées ses quatre faces latérales,

$$(128) \quad p_{x'x'} = p, \quad p_{y'y'} = 0, \quad p_{z'z'} = 0, \quad p_{y'z'} = 0, \quad p_{z'x'} = 0, \quad p_{x'y'} = 0;$$

d'où, d'après la formule générale (25) de changement de plan de pression, en mettant  $x', y', z'$  pour  $x, y, z$  dans son second membre, ce qui, d'après (128), le réduit à son premier terme, et en remplaçant

[\*] *Exercices*, 4<sup>e</sup> année (1829), p. 30 à 42.



successivement les directions arbitraires  $n, s$  par  $x, y, z,$

$$(129) \quad \begin{cases} p_{xx} = p c_{xx'}^2, & p_{yy} = p c_{yy'}^2, & p_{zz} = p c_{zz'}^2, \\ p_{yz} = p c_{yy'} c_{zz'}, & p_{zx} = p c_{zz'} c_{xx'}, & p_{xy} = p c_{xx'} c_{yy'}. \end{cases}$$

Égalant les seconds membres à ceux des expressions générales (1) des mêmes composantes de pression  $p_{xx},$  etc., nous aurons six équations

$$(130) \quad \begin{cases} p c_{xx'}^2 = a_{xxxx} \partial_x + a_{xxyy} \partial_y + \dots + a_{xyxy} g_{xy}; \\ p c_{yy'}^2 = a_{yyxx} \partial_x + \dots; \text{ etc...}, & p c_{xx'} c_{yy'} = a_{xyxx} \partial_x + \dots + a_{xyxy} g_{xy}, \end{cases}$$

dont on pourra, en les résolvant, tirer les valeurs des six inconnues

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}.$$

Substituant celles-ci dans l'expression, semblable à la première (26) de  $\partial_{x'}$ , en fonction des mêmes déformations parallèles aux  $x, y, z,$  savoir

$$(131) \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_{x'} \text{ ou } \frac{p}{E} &= \partial_x c_{xx'}^2 + \partial_y c_{yy'}^2 + \partial_z c_{zz'}^2 + \\ &+ g_{yz} c_{yy'} c_{zz'} + g_{zx} c_{zz'} c_{xx'} + g_{xy} c_{xx'} c_{yy'}, \end{aligned} \right.$$

on obtiendra, en divisant par  $p,$

$$(132) \quad \frac{1}{E} = \left\{ \begin{aligned} &\text{une expression à 15 termes en } c_{xx'}^4, c_{yy'}^4, c_{zz'}^4, c_{yy'}^2 c_{zz'}^2, \dots, c_{yy'}^3 c_{xx'}, \\ &\text{affectés de fonctions des 21 coefficients } a_{xxxx}, \dots, a_{xyxy}. \end{aligned} \right.$$

C'est la formule générale donnant la distribution des modules  $E$  autour d'un point.

Si, à partir de ce point, l'on porte sur chaque droite de direction  $x'$  une longueur

$$\sqrt[4]{E},$$

l'ensemble des extrémités formera une surface dont on obtient l'équation en coordonnées rectangulaires si l'on fait, dans l'équation (132)

$$(133) \quad c_{xx'} = \frac{x}{\sqrt[4]{E}}, \quad c_{yy'} = \frac{y}{\sqrt[4]{E}}, \quad c_{zz'} = \frac{z}{\sqrt[4]{E}},$$

car E disparaît, et l'on a

$$(134) \quad 1 = (\text{une expression homogène du } 4^{\text{e}} \text{ degré en } x, y, z \text{ à } 15 \text{ termes}),$$

où les trois coefficients de  $x^4, y^4, z^4$  sont les inverses des modules d'élasticité dans les sens  $x, y, z$ .

Comme les valeurs de  $\partial_x, \partial_y, \dots, g_{xy}$  tirées de (130) auraient pour dénominateur commun une expression à 720 termes, nous ne développerons le calcul que pour le cas où les  $yz, zx, xy$  sont trois plans de symétrie de contexture. En écrivant, avec les notations (48),

$$(135) \quad \begin{cases} p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z, & p_{yz} = dg_{yz}, \\ p_{yy} = f'\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z, & \text{et } p_{zx} = eg_{zx}, \\ p_{zz} = e'\partial_x + d'\partial_y + c\partial_z, & p_{xy} = fg_{xy}, \end{cases}$$

puis remplaçant les premiers membres par (129) avec  $\partial, c_x, c_y, c_z$  écrits pour abrégé au lieu de  $\partial_{x'}, c_{xx'}, c_{yy'}, c_{zz'}, c'_{zx'}$ , c'est-à-dire par

$$(136) \quad E\partial c_x^2, E\partial c_y^2, E\partial c_z^2, E\partial c_y c_x, E\partial c_z c_x, E\partial c_x c_y,$$

et faisant, après résolution, le dénominateur commun

$$(137) \quad abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f' = D,$$

puis

$$(138) \quad \begin{cases} \frac{bc - d'^2}{D} = \frac{1}{E_x}, & \frac{ca - e'^2}{D} = \frac{1}{E_y}, & \frac{ab - f'^2}{D} = \frac{1}{E_z}, \\ \frac{1}{2d} - \frac{ad' - e'f'}{D} = \frac{1}{F_1}, & \frac{1}{2e} - \frac{be' - f'd'}{D} = \frac{1}{F_2}, & \frac{1}{2f} - \frac{cf' - d'e'}{D} = \frac{1}{F_3}, \end{cases}$$

on obtient

$$(139) \quad \begin{cases} \partial_x = E\partial \left[ \frac{c_x^2}{E_x} + \left( \frac{1}{F_3} - \frac{1}{2f} \right) c_y^2 + \left( \frac{1}{F_2} - \frac{1}{2e} \right) c_z^2 \right], & g_{yz} = \frac{E\partial}{d} c_y c_z, \\ \partial_y = E\partial \left[ \left( \frac{1}{F_3} - \frac{1}{2f} \right) c_x^2 + \frac{c_y^2}{E_y} + \left( \frac{1}{F_1} - \frac{1}{2d} \right) c_z^2 \right], & g_{zx} = \frac{E\partial}{e} c_z c_x, \\ \partial_z = E\partial \left[ \left( \frac{1}{F_2} - \frac{1}{2e} \right) c_x^2 + \left( \frac{1}{F_1} - \frac{1}{2d} \right) c_y^2 + \frac{c_z^2}{E_z} \right], & g_{xy} = \frac{E\partial}{f} c_x c_y, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en substituant dans (131), la formule

$$(140) \quad \frac{1}{E} = \frac{c_x^4}{E_x} + \frac{c_y^4}{E_y} + \frac{c_z^4}{E_z} + 2 \frac{c_x^2 c_z^2}{F_1} + 2 \frac{c_z^2 c_y^2}{F_2} + 2 \frac{c_x^2 c_y^2}{F_3},$$

et l'équation de la surface dont les rayons vecteurs sont les racines quatrièmes des modules  $E$  dans leurs sens est

$$(141) \quad 1 = \frac{x^4}{E_x} + \frac{y^4}{E_y} + \frac{z^4}{E_z} + \frac{2y^2 z^2}{F_1} + \frac{2z^2 x^2}{F_2} + \frac{2x^2 y^2}{F_3}.$$

Les constantes  $E_x, E_y, E_z$  peuvent se déterminer, comme on a dit, en taillant trois prismes dans les directions  $x, y, z$ .

Cauchy observe qu'on peut, par le même moyen expérimental, déterminer les trois autres constantes que nous appelons  $F_1, F_2, F_3$ ; car si l'on taille trois prismes dans des directions bissectrices des angles droits

$$(y, z), \quad (z, x), \quad (x, y)$$

et si l'on appelle leurs modules d'élasticité

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3,$$

on a, en faisant  $c_x = 0, c_y = c_z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  dans (140), la première des expressions suivantes dont les deux autres s'obtiennent de même :

$$(142) \quad \begin{cases} \frac{1}{E_1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{E_y} + \frac{1}{E_z} \right) + \frac{1}{2F_1}, \\ \frac{1}{E_2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{E_z} + \frac{1}{E_x} \right) + \frac{1}{2F_2}, \\ \frac{1}{E_3} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} \right) + \frac{1}{2F_3}. \end{cases}$$

d'où l'on peut tirer  $F_1, F_2, F_3$ .

Il observe aussi qu'en appelant  $c$  le module d'élasticité dans les quatre directions faisant, avec les trois axes, des angles égaux, ou pour lesquelles

$$c_x^2 = c_y^2 = c_z^2 = \frac{1}{3},$$

on a

$$(143) \quad \frac{1}{\bar{c}} = \frac{1}{9} \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{1}{E_z} + \frac{2}{F_1} + \frac{2}{F_2} + \frac{2}{F_3} \right) = \frac{4}{9} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} \right) - \frac{1}{9} \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{1}{E_z} \right).$$

**27. Limites des valeurs relatives de quelques-uns des coefficients  $a_{xxxx}$ , etc.** — Les formules précédentes peuvent nous fournir à cet égard quelques documents.

Supposons en effet la contexture la même, non pas en tous sens, mais dans les trois directions rectangulaires  $x, y, z$ , d'où

$$(144) \quad \begin{cases} a = b = c, & d = e = f, & d' = e' = f', \\ E_x = E_y = E_z, & F_1 = F_2 = F_3, & E_1 = E_2 = E_3; \end{cases}$$

on trouve alors

$$(145) \quad E_x = \frac{(a-d')(a+2d')}{a+d'}, \quad E_1 = 4d \cdot \frac{(a-d')(a+2d')}{(a-d')(a+2d') + 2ad}.$$

Les corps solides dont on se sert n'offrent, dans aucune de leurs parties, une contexture instable comme celle que peut avoir l'intérieur des larmes bataviques, etc. Les modules d'élasticité tels que  $E_x, E_1$  des petits prismes qu'on y taille doivent donc être positifs. Cela exige qu'on ait

$$a > d', \quad \text{ou} \quad a_{xxxx} > a_{xyy} \quad \text{ou} \quad a_{xxz},$$

ou que l'élasticité directe soit plus grande que l'élasticité latérale, ce qui est d'ailleurs évident pour peu qu'on les attribue au jeu des actions entre molécules.

On conçoit aussi que dans les corps dont les modules d'élasticité sont égaux en trois sens orthogonaux, les modules des sens intermédiaires ne s'élèveront guère à une fois et demie ceux-ci, ou ne descendront guère aux deux tiers. Or, en faisant  $d' = d$  conformément à la théorie moléculaire, on trouve

$$(146) \quad \frac{E_1}{E_x} = \frac{4d(a+d)}{a^2 + 3ad - 2d^2}, \quad \frac{c}{E_x} = \frac{3d(a+d)}{(a-d)(a+3d)}.$$

Pour que ces deux rapports restent entre  $\frac{3}{2}$  et  $\frac{2}{3}$  il faut respectivement que

$$\frac{a}{d} \text{ reste entre } 2 \text{ et } 4,702, \text{ et entre } 2,236 \text{ et } 4,260.$$

D'où l'on peut inférer jusqu'à un certain point que lorsque  $a, b, c$  ne sont pas égaux,  $d, e, f$  ne varient guère qu'entre

$$\frac{1}{2,2} \text{ et } \frac{1}{4,3} \text{ de } \sqrt{bc}, \text{ de } \sqrt{ca} \text{ et de } \sqrt{ab} \text{ respectivement.}$$

On trouverait, aussi, en raisonnant comme au n° 12, que si l'on s'impose que les  $E$  varient graduellement, c'est-à-dire augmentent ou diminuent constamment, de l'une à l'autre de leurs trois valeurs principales  $E_x, E_y, E_z$ , sans offrir d'autres maxima et minima ni dans les plans  $yz, zx, xy$ , ni dans l'intérieur de leurs quatre angles trièdres. et offrent une marche de variation simple, il faut :

$$(147) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ Que } F_1 \text{ ne sorte pas de l'intervalle de } E_y \text{ à } E_z; F_2 \text{ de } E_z \text{ à } E_x; \\ F_3 \text{ de } E_x \text{ à } E_y; \\ 2^\circ \text{ Que si } E_x > E_y > E_z \text{ on ait en même temps } F_1 < F_2 < F_3; \\ 3^\circ \text{ Que, malgré ces deux premières relations, les quantités} \\ \left( \frac{1}{E_y} - \frac{1}{F_3} \right) \left( \frac{1}{E_z} - \frac{1}{F_2} \right) + \left( \frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_1} \right) \left( \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} \right), \\ \left( \frac{1}{E_z} - \frac{1}{F_1} \right) \left( \frac{1}{E_x} - \frac{1}{F_3} \right) + \left( \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} \right) \left( \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_3} \right), \\ \left( \frac{1}{E_x} - \frac{1}{F_2} \right) \left( \frac{1}{E_y} - \frac{1}{F_1} \right) + \left( \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_3} \right) \left( \frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_1} \right), \\ \text{n'aient pas trois valeurs de même signe.} \end{array} \right.$$

Les limites de valeurs relatives qui en résulteront pour les rapports mutuels entre les coefficients  $a, b, c, d$  ou  $d', e$  ou  $e', f$  ou  $f'$ , différeront peu de celles qui résultent des conditions analogues posées au n° 12.

Il est possible que ces conditions d'inégalité ou de  $>$  et  $<$  entre les coefficients soient applicables, jusqu'à un certain point, *aux bois*.

Mais, pour les métaux, nous pensons que les élasticités doivent suivre



équations qui sont satisfaites par

$$a = \frac{(2e + e')(2f + f')}{2d + d'}, \quad b = \frac{(2f + f')(2d + d')}{2e + e'}, \quad c = \frac{(2d + d')(2e + e')}{2f + f'},$$

ou, ce qui revient au même, par

$$(152) \quad \begin{cases} 2d + d' = \sqrt{bc}, & 2e + e' = \sqrt{ca}, & 2f + f' = \sqrt{ab}, \\ \text{si l'on a en même temps} \\ \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = \frac{f'}{f} = \text{constante } i; \end{cases}$$

c'est-à-dire précisément par les conditions (57) de réduction à un ellipsoïde de la surface dont les rayons sont les inverses des  $\sqrt[4]{a_{x'x'x'x}}$ , pourvu qu'on y joigne les conditions (63), sous lesquelles les neuf coefficients  $a, b, \dots, d, \dots, f'$  peuvent être mis sous la forme (64)  $(2+i)a^2, \dots, bc, \dots, \dots iab$ , et les équations d'équilibre sous la forme (66) [\*].

Ainsi, dans ce cas, qui est celui de l'intégrabilité des équations différentielles sous forme finie par des potentiels analytiques de deux espèces, aussi facilement que quand il y a isotropie, la distribution des modules d'élasticité  $E$  est ellipsoïdale comme celle des élasticités directes  $a_{x'x'x'x}$ .

Au reste, pour la surface dont les rayons sont les  $\sqrt[4]{E}$ , comme pour

---

[\*] En faisant  $d' = id$ ,  $e' = ie$ ,  $f' = if$  dans les équations (151) et éliminant  $b, c$  au moyen de celles que donnent les trois derniers membres, on obtient l'équation en  $a$

$$\left(\frac{ad}{ef}\right)^3 - (3i^2 + 4i + 4)\frac{ad}{ef} + 2i^2(i + 2) = 0,$$

résolue non-seulement par  $\frac{ad}{ef} = 2 + i$ , qui, répété avec les autres lettres, entraîne les premières (152), mais encore par  $\frac{ad}{ef} = \frac{-2 - i + \sqrt{9i^2 + 4i + 4}}{2}$ . Mais cette dernière valeur ne convient pas à la question, car quand  $d = e = f$ , et quand on fait  $i = 1$  comme l'indique la théorie moléculaire, il en résulte

$$a = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} d = 0,562d,$$

ce qui est impossible, car on a vu qu'on ne pouvait pas prendre  $a < d$ .

la surface presque inverse dont les rayons sont les  $\frac{1}{\sqrt{a_{x'x'x'x'}}$ , la coupe par un ou deux des trois plans  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$  peut être elliptique sans l'être dans l'autre ou les deux autres.

**29.** *Surface dont les rayons vecteurs sont les modules E eux-mêmes.*  
 — Cette surface est du huitième degré, car son équation se déduit de l'équation (132) ou (140) en y faisant

$$E = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{et} \quad c_{xx'}, c_{yy'}, c_{zz'} = \frac{x, y, z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

ce qui donne, si c'est de (140),

$$(153) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \left( \frac{x^4}{E_x} + \frac{y^4}{E_y} + \dots + \frac{x^2 y^2}{E_3} \right)^2.$$

Pour en tracer autant qu'on veut de coupes par points, ce qu'il y a de plus facile est de calculer directement les rayons vecteurs E au moyen de

$$(140) \quad \frac{1}{E} = \frac{c_{xx'}}{E_x} + \frac{c_{yy'}}{E_y} + \dots$$

en se donnant les angles  $(x, x')$ ,  $(y, y')$ ,  $(z, z')$  de ces rayons avec les  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

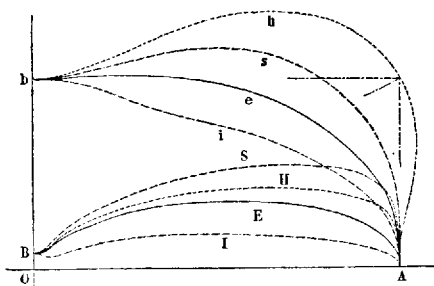
Dans le cas de distribution du n° 28 où l'on a un ellipsoïde quand ce sont les  $\sqrt[4]{E}$  qu'on prend pour rayons, c'est-à-dire où l'on a (149)

$$(154) \quad \frac{1}{E} = \left( \frac{c_{xx'}}{\sqrt{E_x}} + \frac{c_{yy'}}{\sqrt{E_y}} + \frac{c_{zz'}}{\sqrt{E_z}} \right)^2,$$

cette surface du huitième degré (153), dont les rayons sont les E, diffère peu d'un ellipsoïde de mêmes diamètres dans les sens  $x$ ,  $y$ ,  $z$  lorsque les trois élasticités principales  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  n'ont pas entre elles des rapports de plus de 3 à 2. Mais elle en diffère très-sensiblement quand ces rapports mutuels sont plus considérables, comme on peut voir à la figure ci-après, où la ligne courbe pleine AEB représente un quart de coupe de la surface par un plan coordonné, quand on a un rapport de 20 à 1 pour celui des demi-axes  $OA = E_x$  et  $OB = E_y$ , tandis qu'on a Aeb lorsque ce rapport n'est que de 2 à 1.



Et les différences avec l'ellipse sont *dans le sens des expériences connues*, car M. Hagen [\*], après avoir mesuré les modules d'élasticité de



cinq espèces de bois dans le sens longitudinal et dans le sens transversal supposés être  $x$  et  $y$ , et avoir trouvé

$$E_x : E_y = 48, \quad 83, \quad 15, \quad 22, \quad 23$$

pour les bois de            pin,    sapin,    chêne,    hêtre rouge,    hêtre blanc,

soit moyennement  $= 20$ , a fait aussi quelques mesurages de modules dans des sens obliques  $x'$ , et a proposé, pour représenter à peu près ses expériences *dont il ne donne pas le détail*, l'expression

$$(155) \quad \frac{1}{E} = \frac{c_{xx'}^2}{E_x} + \frac{c_{yy'}^2}{E_y},$$

qui fournirait la courbe AHB en petit ponctué; or la courbe pleine AEB donnée par la distribution elliptique des  $\sqrt[4]{E}$ , ou par

$$\frac{1}{E} = \left( \frac{c_{xx'}^2}{\sqrt{E_x}} + \frac{c_{yy'}^2}{\sqrt{E_y}} \right)^2$$

n'en diffère pas dans les limites d'exactitude des expériences de ce genre.

La formule empirique de M. Hagen ne saurait être adoptée, car elle donne, quand  $\frac{E_x}{E_y} = 2$ , la courbe Abb, qui est tout à fait inacceptable; et, en général, comme cette courbe (155) est circonscrite au rectangle

---

[\*] *Ueber die Elasticität des Holzes* (*Annales de Poggendorf*, t. LVIII, p. 125), et *Annales des Ponts et Chaussées*, 1845, 2<sup>e</sup> semestre, p. 276.

dont les demi-côtés sont  $E_x$  et  $E_y$ , elle donne pour  $E$  un maximum qui est en grandeur et en direction la demi-diagonale  $\sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ , ce qui ferait  $E_x \sqrt{2}$  quand les élasticités sont égales dans les directions  $x$  et  $y$ , tandis que dans ce cas  $E_x = E_y$ ,  $E$  devrait être  $= E_x$ , ou égal en tous sens.

Sur la même figure, les courbes en ponctué long AIB, ASB représentent ce que serait la coupe  $xy$  de la surface du huitième degré (153) pour  $\frac{E_x}{E_y} = 20$ , si, au lieu de l'expression (148)  $F_3 = \sqrt{E_x E_y}$  on prenait successivement, pour la constante  $F_3$ , sa limite inférieure  $E_y$  et sa limite supérieure  $E_x$  déterminées par les premières conditions (147). La deuxième courbe, ASB, exagère encore l'inconvénient signalé dans la courbe empirique (155) AHB; et la première, AIB, s'en écarte trop et offrirait une loi bizarre et tout à fait improbable. Ces inconvénients subsistent dans la courbe Aib, analogue à AIB mais relative à  $\frac{E_x}{E_y} = 2$ ; et la courbe Asb, analogue à ASB pour ce même cas qui n'a pas été celui des expériences, offre toujours une loi moins simple et moins probable que Aeb.

Ainsi, quoique la loi de distribution ellipsoïdale des  $\sqrt[4]{E}$ , répondant à (148)  $F_1 = \sqrt{E_y E_x}$ , etc., et aussi à (152) ou (57)  $2d + d' = \sqrt{bc}$ , etc., et représentée par les équations (149) ou (154), ne soit pas prouvée pour les corps amorphes dans lesquels, comme pour les bois, les élasticités sont très-différentes dans différents sens, cependant il conviendra d'en essayer toujours l'emploi dans la pratique; et, lorsqu'on ne pourra pas l'adopter exactement, il ne faudra pas s'en écarter beaucoup.

#### § VI. — *Résumé et conclusions pratiques.*

30. Nous avons (§ II, nos 2 à 4), dans un préambule qui devait servir aux considérations et à la discussion du § IV, rappelé l'établissement des formules d'élasticité, y compris celle du *potentiel* des forces intérieures, employé dès le principe par Navier (et dont les géomètres de l'Angleterre et de l'Allemagne font un grand usage), et nous avons compris dans toutes ces formules et établi de diverses manières les termes qui dépendent d'un élément ordinairement omis, savoir, les

*pressions primitives* ( $p_{xx}^0, \dots, p_{xy}^0$ ) pouvant exister dans le corps ou dans le milieu élastique avant les déplacements, déformations ou mouvements vibratoires, qui sont l'objet des calculs.

Nous avons montré qu'entre les trente-six coefficients  $a_{xxxx}$ , etc. qu'elles contiennent outre les six composantes primitives  $p^0$ , il y a au moins *quinze égalités deux à deux* (5) qui les réduisent à *vingt et un* au plus, sans compter les *six égalités complémentaires* (8) encore contestées quoiqu'elles soient fournies, avec ou sans calcul, par la loi des actions moléculaires, qu'il est inévitable d'invoquer de toute manière, ouvertement ou tacitement, pour établir toute formule d'équilibre d'élasticité.

Nous avons ensuite (§ III, nos 5 à 16) démontré la formule symbolique très-simple (33) qui donne les vingt et un coefficients d'élasticité  $a_{x'x'x'x'} \dots a_{y'z'y'z'} \dots a_{y'y'y'x'}$  pour de nouveaux axes coordonnés en fonction des vingt et un  $a_{xxxx} \dots a_{yyyx}$  pour des axes anciens, et qui fournit même, plus généralement, les coefficients qui entreraient dans l'expression d'une composante oblique de pression sur une face quelconque. Les mêmes notations symboliques expriment très-brièvement la plupart des formules de l'élasticité.

La loi des élasticités directes  $a_{x'x'x'x'}$  en divers sens est donnée (n° 5) par les inverses des quatrièmes puissances des rayons vecteurs ou des diamètres d'une surface du quatrième degré, dont les termes ont une grande analogie avec ceux qui composent l'expression du potentiel (n° 2), et qui offre, dans le cas de trois plans de symétrie, treize diamètres normaux ou treize directions de maximum et de minimum, se réduisant à trois lorsque les coefficients ont entre eux certaines relations d'inégalité, probablement toujours vérifiées.

Dans un cas encore plus particulier, exprimé par trois relations d'égalité telles que  $2d + d' = \sqrt{bc}$ , l'équation du quatrième degré se réduit au second; la distribution des élasticités directes, ou plutôt de leurs racines quatrièmes inversées, est ellipsoïdale. Lorsqu'elle a lieu, les équations de l'équilibre d'élasticité sont intégrables sous forme finie par des expressions analogues au *potentiel analytique* de Green, aussi facilement que quand il y a isotropie; et réciproquement une pareille intégrabilité exige la distribution en question. Mais ce mode de distri-

bution doit être remarqué à un autre titre, car c'est, comme le prouve un calcul facile des forces moléculaires en jeu, celui qui doit s'observer, au moins à très-peu près entre certaines limites d'inégalité des élasticités en divers sens, dans les corps solides amorphes ou à cristallisation confuse, ou dans les milieux élastiques dont l'isotropie a été altérée par des compressions ou dilatations inégales rapprochant plus les molécules dans certaines directions que dans d'autres.

Au § IV (nos 17 à 24) nous avons appliqué la formule (33) de transformation des coefficients à l'examen de certaines conditions ou relations, au nombre de quatorze, auxquelles l'illustre physicien Green assujettit les vingt et un coefficients d'élasticité du fluide étheré dans l'intérieur des corps transparents biréfringents pour que les vibrations moléculaires y soient, comme dans l'air ou le verre, exactement parallèles aux plans des ondes lumineuses de toute direction, afin de se conformer à l'hypothèse que Fresnel a prise pour base de sa théorie évidemment défectueuse quoique unie à d'aussi brillantes découvertes, et bien que Green reconnaisse que cet exact parallélisme ne doit pas s'observer dans tous les corps transparents. Nous avons montré d'abord que ces quatorze conditions sont absolument les mêmes lorsqu'il y avait, antérieurement à tout ébranlement, des pressions primitives  $p^0$  de grandeur et de direction quelconque dans l'éther, en sorte qu'on ne peut pas chercher, dans l'existence possible de ces pressions ordinairement omises, la solution des difficultés auxquelles conduit l'hypothèse que Green et Fresnel se sont imposée. Nous avons reconnu ensuite que d'après les conditions en question l'élasticité directe de l'éther dans le cristal serait *égale en tous sens*; qu'une même dilatation y produirait, dans toutes les directions, une pression, non-seulement de même intensité, mais, aussi, constamment normale à la face où elle s'exercerait comme dans les corps isotropes; qu'il y aurait, entre les élasticités directe, latérale et tangentielle, les mêmes relations que dans ces corps, etc.; enfin que chacune des conditions, si elle s'observe dans toutes les directions, entraîne toutes les autres.

Il est impossible de ne pas en conclure que les quatorze conditions de transversalité des vibrations sont simplement celles de l'isotropie du milieu. Le calcul le montre d'une manière évidente, si l'on admet comme Fresnel, Cauchy, etc., que les particules de l'éther agissent

entre elles suivant leurs lignes de jonction et proportionnellement à une fonction de leurs distances ; mais si l'on rejette l'usage de cette grande loi physique, non-seulement pour l'établissement des équations de l'élasticité, mais encore pour le calcul des inégalités d'élasticité dans un corps ou un milieu où les molécules ont des degrés divers de rapprochement, il est toujours évident que toute autre loi qu'on lui substituerait donnerait nécessairement des inégalités entre les élasticités directes tout aussi bien qu'entre les élasticités latérales ou tangentielles dans les directions où les intervalles moléculaires sont différents, comme cela doit avoir lieu dans le verre comprimé ou trempé, et même dans les cristaux dont la forme est polyédrique *non régulière*, comme celle de cristaux biréfringents.

De là l'impossibilité de la double réfraction dans un corps transparent, si les vibrations lumineuses sont *exactement* transversales, pour *toutes* les inclinaisons qu'on peut supposer aux plans des ondes, et non pas seulement pour certaines directions principales telles que celles des maxima et minima des élasticités directes.

Mais cette transversalité, ou ces quatorze conditions de Green, ne sont nullement nécessaires pour que l'onde courbe enveloppée par toutes les ondes planes qui se sont croisées au même instant en un même point soit exactement la surface du quatrième degré de Fresnel, dont l'étude a révélé des particularités curieuses, si bien confirmées par l'expérience. Il suffit, pour cela, de conditions ou relations moins nombreuses et plus générales, et qui, malgré un peu moins de simplicité dans leur expression, n'ont rien de bizarre ni d'arbitraire, et au contraire s'observent très-probablement dans la réalité, car on reconnaît facilement qu'elles coïncident, exactement peut-être, mais en tous cas très-approximativement, avec les conditions (de distribution ellipsoïdale) qui sont remplies pour un corps élastique dont l'isotropie primitive a été altérée par des compressions inégales ; or c'est précisément l'état où tous les physiciens admettent que se trouve l'éther, non-seulement dans le verre comprimé, mais aussi dans l'intérieur des cristaux des formes polyédriques non régulières les plus diverses.

Ces conditions (112), (113) sont celles qui ont été trouvées par Cauchy, dont on peut présenter l'analyse d'une manière simple et en même temps plus générale, car on peut y conserver les vingt et un

coefficients que plusieurs géomètres croient indépendants ; et comme ce nombre de coefficients n'est pas nécessaire pour obtenir la surface de Fresnel, qui se construit aussi bien quand on n'en conserve que quinze, on ne trouve aucun motif de rejeter les six égalités dites complémentaires (8) des coefficients deux à deux, dans la considération des phénomènes de la double réfraction.

Une légère obliquité des vibrations lumineuses aux rayons et même aux ondes à leur passage à travers les corps biréfringents n'est contredite par aucune expérience, et elle n'a rien d'incompatible avec l'onde de Fresnel, ni même avec les expériences photométriques faites sur les quantités de lumière reçues et transmises. Si, d'ailleurs, on reconnaît par la suite que cette onde du quatrième degré à deux nappes, jointe à une onde ellipsoïdale pour les rayons non lumineux, ne fournit qu'une simple approximation dont on ne puisse plus se contenter, et qu'elle n'explique pas certains faits nouvellement acquis, on pourra toujours, faute de savoir poser l'équation de l'onde Cauchy à trois nappes, étudier toutes les particularités de la marche des ondes sur sa *polaire réciproque* (par rapport à une sphère ayant le même centre), dont l'équation du sixième degré est simple et toute posée, et dont M. Haughton a déjà reconnu les nœuds et étudié en partie les propriétés, fort analogues à celles de la polaire de l'onde Fresnel ; et cette étude rationnelle conduira peut-être à d'autres découvertes plus délicates qui auraient échappé en persistant à baser l'optique théorique sur des expédients impliquant contradiction à plusieurs égards.

Enfin nous avons reconnu (§ V), en prenant pour base un travail de Cauchy, que les *modules d'élasticité*  $E$ , définis à la manière de Young et de Navier, et qui entrent dans les formules d'extension et de flexion des solides, se distribuaient dans les diverses directions suivant une surface du quatrième degré, inverse à quelques égards de celle qui nous a manifesté la loi de distribution des élasticités directes  $a_{x'x'x'x'}$  en tous sens. On tire de leur considération certaines limites des rapports entre les élasticités directes et les élasticités latérales ou tangentielles dans les solides en général.

La distribution des racines quatrièmes des modules  $E$  est *ellipsoïdale* dans les mêmes cas que celle des inverses des racines quatrièmes des élasticités directes  $a_{x'x'x'x'}$ .

Ces considérations ne sont pas de pure spéculation. On a reconnu que divers faits de l'élasticité des métaux, du verre, etc., ne pouvaient être suffisamment bien représentés par les formules d'isotropie à un seul coefficient, fournies par les premiers travaux des géomètres sur la théorie de l'élasticité. Bien que le désaccord ait été exagéré, et disparaisse bien des fois devant une discussion des expériences, il est très-vrai que l'interprétation exige d'autres fois qu'on puisse disposer de plusieurs constantes. Quelques savants ont cru satisfaire convenablement à cette condition en employant des formules qui *supposent encore l'isotropie*, mais où l'on admet deux coefficients indépendants, malgré le résultat contraire fourni logiquement par la loi des actions entre molécules qui est, disons-nous, toujours tacitement invoquée, même quand on en veut repousser les conséquences. Mais, ainsi que nous l'exprimons à la fin du n° 2, et espérons le démontrer complètement ailleurs, c'est là un expédient conduisant à se faire illusion sur la vraie cause des faits à interpréter. Il faut plutôt recourir aux formules d'hétérotropie, en reconnaissant une différence d'élasticité suivant trois ou au moins deux sens rectangulaires. Or la loi de variation des élasticités dans les sens obliques n'est pas arbitraire, et, pour les corps amorphes généralement employés dans les constructions, le nombre des coefficients indépendants a besoin d'être réduit. Notre loi ellipsoïdale, qui lie les élasticités tangentielles  $d, e, f$  aux élasticités directes  $a, b, c$ , et qui donne ainsi trois constantes seulement dans les cas ordinaires de con-texture symétrique par rapport à trois plans, est la plus convenable à adopter, non pas seulement comme la plus simple et prêtant le mieux aux calculs analytiques (n° 15), mais comme offrant un haut degré de probabilité, qui devient de la certitude (au moins à une approximation qui suffit) si l'hétérotropie des corps métalliques, vitreux, etc., dont on s'occupe, résulte de ce que l'écroutissage, l'étirage, etc., ou les circonstances de la solidification, n'ont fait que rapprocher plus leurs molécules dans certains sens que dans d'autres; et, d'après quelques expériences faites en Allemagne, elle offre encore ce qu'il y a de mieux à adopter même pour les bois, dans lesquels les différences d'élasticité en divers sens sont très-considérables.

---