JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

Sur la construction des équations du quatrième degré par les géomètres arabes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 57-70.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__57_0>

SUR

LA CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ

PAR

LES GÉOMÈTRES ARABES;

PAR M. WOEPCKE.

On sait que les Grecs ont construit des problèmes du troisième degré par l'intersection de deux coniques. On trouve notamment plusieurs constructions de ce genre dans le commentaire d'Eutocius sur le *Traité de la Sphère et du Cylindre* d'Archimède.

La cinquième proposition du second livre de ce traité a pour objet la division d'une sphère par un plan tel, que les volumes des deux segments soient dans un rapport donné. Archimède démontre que ce problème dépend de la construction suivante : Étant donnés une ligne DZ et sur cette ligne deux points B, T, dont B soit situé entre D et T; déterminer un point X de la ligne DZ tel, que l'on ait

$$\mathrm{XZ} : \mathrm{ZT} = \overline{\mathrm{BD}}^2 : \mathrm{DX}^2.$$

Archimède promet de donner cette construction à la fin de sa proposition, mais elle ne s'y trouve pas. On peut voir dans l'édition d'Oxford des Œuvres d'Archimède, page 163, 2e colonne, lignes 33 à 61, le sentiment d'Eutocius au sujet de cette omission. Quelle qu'en soit d'ailleurs la cause, le problème fut résolu par plusieurs géomètres grecs, de diverses manières, mais toujours au moyen de l'intersection de deux sections coniques.

Le même problème fixa l'attention des géomètres arabes, aussitôt qu'ils se furent initiés aux spéculations supérieures des mathématiques grecques. Mais ils firent dès l'abord ce que les Grecs n'avaient jamais fait, c'est-à-dire qu'ils envisagèrent le problème sous sa forme algébrique. En effet, si l'on désigne dans le problème ci-dessus les segments BD, ZT, ZD, DX par a, b, c, x respectivement, la question énoncée s'exprime par l'équation

$$x^3 + a^2 b = cx^2.$$

Les géomètres arabes ne cherchèrent donc plus à construire une certaine division d'une ligne, mais ils tâchèrent de résoudre une équation du troisième degré. Ils ne tardèrent pas à s'occuper ensuite d'autres équations du troisième degré, différentes de celle que je viens de mentionner, et qui avait servi de point de départ à leurs recherches.

On ne saurait assez faire ressortir cette différence, ni assez insister sur l'importance de ce changement de point de vue. Car, grâce à cette nouvelle manière de traiter les problèmes, les Arabes, quoiqu'ils n'aient pas découvert la résolution algébrique des équations cubiques, purent parvenir à une construction *générale* et *systématique* de *toutes* les équations cubiques, et par là de *tous* les problèmes du troisième degré, conception à laquelle les géomètres grecs ne se sont jamais élevés.

Cette construction systématique des équations du troisième degré est due à Omar Alkhayyâmî, un des hommes les plus éminents parmi les contemporains du célèbre sultan seldjoukide Malic Châh, et qui mourut en 1123 de notre ère.

Il sera utile de faire suivre ici un court aperçu de la méthode d'Alkhayyâmî, parce que cet exposé servira à mettre sous leur vrai jour les observations que j'aurai à présenter plus loin sur la construction des équations du quatrième degré.

1° L'équation binôme

$$x^3 - a = 0$$

est construite par la combinaison des deux paraboles

$$y^2 - ax = 0, \quad x^2 - y = 0.$$

Cette équation est traitée la première, non-seulement parce qu'elle est la plus simple, mais aussi parce que les solutions données pour quelques-unes des équations suivantes dépendent, comme on verra, de celle de l'équation binôme.

2° Les équations où manque le terme en x^2

$$x^3 + \mu bx + \lambda a = 0$$

sont construites au moyen des deux sections coniques

$$y^2 + \mu x^2 + \lambda \frac{a}{b} x = 0, \qquad x^2 - \sqrt{b}.y = 0,$$

où μ et λ désignent des quantités qui ne peuvent prendre que les valeurs $+1$ ou -1. Mais il faut exclure le cas où μ et λ auraient simultanément la valeur $+1$, parce que les Arabes n'admettent pas l'existence de racines négatives, ni, à plus forte raison, de racines imaginaires. Ils n'ont donc pas à s'occuper des équations

$$x^3 + a = 0, \qquad x^3 + bx + a = 0,$$
$$x^3 + cx^2 + a = 0, \qquad x^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

où a, b, c désignent des quantités positives.

3° Parmi les équations privées du terme en x, les deux équations

$$x^3 \pm cx^2 \mp a = 0$$

sont construites au moyen de l'hyperbole et de la parabole

$$yx - \sqrt[3]{a^2} = 0, \qquad y^2 \mp \sqrt[3]{a}.x - \sqrt[3]{a}.c = 0.$$

On remarquera ici que la détermination du terme $\sqrt[3]{a^2}$ dans l'équation de l'hyperbole, et du cofficient $\sqrt[3]{a}$ dans celle de la parabole, dépend de l'équation

$$x^3 - a = 0.$$

Le troisième cas de l'équation où manque le terme en x, savoir :

$$x^3 - cx^2 - a = 0$$

8..

est construit par la combinaison de l'hyperbole et de la parabole

$$yx - \sqrt{ac} = 0, \quad y^2 - cx + c^2 = 0.$$

4° Enfin pour l'équation complète

$$x^3 + \nu c x^2 + \mu b x + \lambda a = 0,$$

où ν, μ, λ signifient de nouveau $+1$ ou -1, l'hyperbole ou le cercle

$$y^2 + \mu x^2 + \left(\lambda \frac{a}{b} + \mu\nu c\right) x + \lambda\nu \frac{ac}{b} = 0$$

est combiné avec l'hyperbole

$$yx \pm \sqrt{b}\,.\,x \pm \lambda\mu \frac{a}{\sqrt{b}} = 0.$$

La combinaison de ces deux courbes donne

$$x^4 + \left(\lambda\mu \frac{a}{b} + \nu c\right) x^3 + \left(\lambda\mu\nu \frac{ac}{b} + \mu b\right) x^2 + \lambda\, 2ax + \mu \frac{a^2}{b}$$
$$= (x^3 + \nu c x^2 + \mu b x + \lambda a)\left(x + \lambda\mu \frac{a}{b}\right) = 0.$$

Passons maintenant aux équations du quatrième degré.

J'ai découvert dans un manuscrit de la bibliothèque de Leyde [*] la construction d'une certaine équation du quatrième degré, due à un géomètre arabe, et je l'ai fait connaître, il y a plus de dix ans, dans les additions à mon édition de l'*Algèbre d'Alkhayyâmî*. L'analyse complète de ce morceau n'y occupe pas tout à fait une page. Peu étendue et placée au milieu de beaucoup d'autres données, cette notice a dû rester à peu près inaperçue, et je n'y reviendrais pas en ce moment, si, soumise à un nouvel examen plus approfondi, la construction dont il s'agit

[*] Je suis heureux de pouvoir, à cette occasion, offrir de nouveau mes plus vifs remercîments à MM. les conservateurs de la bibliothèque de Leyde, pour la bienveillante libéralité avec laquelle ils m'ont communiqué ce manuscrit.

ne m'avait semblé mériter une attention toute particulière. Elle m'a paru, en effet, contenir en germe une construction complète des équations du quatrième degré, et je tâcherai de justifier cette opinion par les considérations que l'on trouve ci-après.

Le géomètre arabe se propose de déterminer le quatrième côté d'un trapèze, dont la base et les côtés non parallèles sont égaux chacun à 10, l'aire devant être égale à 90. Prenant pour inconnue la demi-différence des deux côtés parallèles, il montre que le problème se ramène à l'équation du quatrième degré

$$(10 - x)^2 (10^2 - x^2) = 90^2 \quad \text{ou} \quad x^4 + 2000x = 20x^3 + 1900.$$

Pour construire cette équation, il combine l'hyperbole et le cercle

$$(10 - x)\,y = 90, \qquad 10^2 - x^2 = y^2.$$

Si nous faisons abstraction des valeurs particulières 10 et 90 [*], le géomètre arabe construit donc l'équation

$$x^4 - 2\alpha x^3 + 2\alpha^3 x - (\alpha^4 - \delta^2) = 0$$

par les deux courbes

$$(1) \qquad (\alpha - x)\,y = \delta,$$

$$(2) \qquad \alpha^2 - x^2 = y^2.$$

Or, je dis que, par une modification très-légère et qui se présente en quelque sorte d'elle-même, ces deux courbes pouvaient devenir, entre les mains des géomètres arabes, le moyen d'une construction générale de toutes les équations du quatrième degré.

En effet, remplaçons seulement dans l'équation (2) le premier

[*] Je fais observer que, dans les constructions d'Alkhayyâmî, les coefficients des équations proposées ne sont pas, comme on pourrait le croire, des nombres *déterminés*. L'auteur arabe leur laisse, au contraire, toute leur généralité. Le coefficient de x^2 s'appelle *le nombre des carrés*, le coefficient de x *le nombre des racines* ou *le nombre des côtés*, le terme constant *le nombre donné;* et l'on exécute sur ces *nombres*, que l'on ne détermine pas autrement, toutes les opérations que la construction comporte.

membre $\alpha^2 - x^2$, qui ne peut naturellement servir que pour le cas particulier du problème ci-dessus, par $\beta + \gamma x + x^2$. Ce sera certainement le moyen le plus facile à imaginer, et exigeant le moindre effort d'esprit possible, pour introduire les deux constantes dont on a besoin encore pour faire face aux quatre coefficients de l'équation du quatrième degré.

Combinant alors les deux courbes

$$(\alpha - x)y = \delta, \tag{3}$$
$$\beta + \gamma x + x^2 = y^2, \tag{4}$$

on obtient

$$x^4 + (-2\alpha + \gamma)x^3 + (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \beta)x^2$$
$$+ (-2\alpha\beta + \alpha^2\gamma)x + \alpha^2\beta - \delta^2 = 0;$$

et comparant cette équation à l'équation

$$x^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \tag{1}$$

où d, c, b, a représentent maintenant des quantités positives ou négatives, on a, pour déterminer les coefficients des équations des deux courbes, les relations

$$\alpha^3 + \frac{3d}{4}\alpha^2 + \frac{c}{2}\alpha + \frac{b}{4} = 0, \tag{5}$$
$$\beta = c + 2d\alpha + 3\alpha^2, \tag{6}$$
$$\gamma = d + 2\alpha, \tag{7}$$
$$\delta^2 = \alpha^2\beta - a. \tag{8}$$

Le coefficient α est donné ici par une équation du troisième degré; mais nous venons de voir que les Arabes savaient construire ces équations. Ils pouvaient donc, pour la détermination de ce coefficient, recourir à une construction subsidiaire d'une équation du troisième degré, exactement comme nous l'avons vu ci-dessus dans la méthode d'Alkhayyâmî, à l'occasion de la construction des équations

$$x^3 \pm cx^2 \mp a = 0.$$

Lorsque b, c, d étaient tous les trois positifs, cette équation pouvait offrir une difficulté aux géomètres arabes, en ce sens qu'ils n'étaient pas habitués à considérer des équations de ce genre, comme je l'ai fait observer ci-dessus. Mais, dans ce cas, il suffisait de remplacer, dans le premier membre de l'équation (3), le signe $-$ par $+$, ce qui fait changer de signe, dans les équations (5) à (8), tous les termes affectés de puissances impaires de α. Une autre difficulté pouvait se présenter pour l'équation (8) lorsque le second membre devient négatif; mais on l'écarte tout aussi aisément en remplaçant, dans le second membre de l'équation (4), y^2 par $-y^2$, ce qui revient à changer le signe de δ^2 [*].

On se ferait une idée très-fausse de l'habileté des géomètres arabes, si l'on croyait que des considérations aussi faciles que celles qui précèdent aient pu échapper à leur sagacité. Si leurs raisonnements étaient exprimés dans un langage et conçus dans un esprit différents de ceux de la science moderne, ils n'en savaient pas moins trouver, pour arriver aux mêmes buts, des moyens identiques, au fond, à ceux que nous employons.

Je suis même loin de croire que, si les Arabes avaient réellement abordé le problème d'une construction *générale* des équations du quatrième degré, ils auraient adopté la marche que je viens d'indiquer.

---

[*] Comme les Arabes n'ont à construire que les racines positives, le seul cas où cette méthode pouvait, pour eux, être réellement en défaut, aurait lieu lorsque l'équation (I) aurait des racines positives, et qu'en même temps l'équation (5) n'en eût point. Or, si l'équation (I) a deux, trois ou quatre racines positives, l'équation (5), qui est la dérivée de l'équation (I), a respectivement au moins une, au moins deux ou trois racines positives. C'est donc seulement lorsque l'équation (I) n'a qu'une seule racine positive que la méthode *peut* être en défaut. Mais elle ne l'est pas nécessairement; car la courbe

$$y = x^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a,$$

tout en ne coupant l'axe des abscisses qu'une seule fois du côté des x positifs, peut avoir une, deux et même trois tangentes parallèles à cet axe, dont les points de contact ont des abscisses positives. On peut, du reste, facilement remédier à l'inconvénient que je viens de signaler, en augmentant les x d'une constante; mais il n'est pas probable que les Arabes eussent choisi ce moyen.

Je pense, au contraire, qu'ils auraient su trouver des méthodes beaucoup plus élégantes et plus ingénieuses. Le court exposé qu'on a vu ci-dessus de leur construction des équations du troisième degré est peut-être de nature à justifier cette opinion jusqu'à un certain point, quoiqu'il ne puisse pas montrer la facilité avec laquelle les Arabes maniaient les problèmes qui dépendent de l'intersection de deux coniques, ni l'élégance avec laquelle ils discutaient, par exemple, les questions des limites des solutions réelles [*].

En résumé, je ne dis donc pas que les Arabes ont construit toutes les équations du quatrième degré par la méthode ci-dessus esquissée; mais je dis qu'il est certain qu'ils en ont construit au moins une, et je considère comme très-probable que ce n'est pas là la seule construction de cette nature qu'ils aient faite. Je dis en outre, et je crois avoir prouvé, que les Arabes disposaient de tous les moyens nécessaires pour construire telle équation du quatrième degré qu'ils voulaient [**], du moment qu'ils désiraient s'occuper d'une question de ce genre.

Je ne puis pas m'empêcher de citer, en terminant, l'admirable solution du problème que Descartes a donnée dans le troisième livre de sa *Géométrie*. Après avoir fait disparaître le terme qui contient le cube de l'inconnue, il construit l'équation

$$y^4 = py^2 + qy + r,$$

en combinant la parabole

$$y^2 = x,$$

[*] On en peut voir des exemples p. 96 à 114 de l'édition ci-dessus citée de l'Algèbre d'Alkhayyâmî.

[**] A l'exception près que j'ai signalée moi-même, et qui correspond au cas tout particulier où, pour la courbe

$$y = x^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a,$$

les axes sont placés de telle façon, qu'une seule intersection de la courbe avec l'axe des abscisses est située d'un côté de l'axe des ordonnées, tandis que toutes les autres intersections, de même que tous les maxima et minima de l'ordonnée, sont situées de l'autre côté.

qui est entièrement indépendante des coefficients de la proposée, et qui peut, par conséquent, être construite une fois pour toutes, avec le cercle

$$y^2 + x^2 - qy - (1 + p)x - r = 0.$$

En faisant $r = 0$, on a la construction des équations du troisième degré.

Ce modèle de perfection marque bien le chemin qui restait encore à faire aux Arabes. Mais on ne saurait nier, sans être injuste envers ceux-ci, qu'ils avaient au moins commencé à marcher dans ce chemin. Il faut se rappeler aussi que dans chaque question scientifique les premiers pas et les derniers sont toujours les plus difficiles à faire.

Il ne sera peut-être pas sans intérêt de mettre à présent sous les yeux du lecteur une traduction textuelle du morceau qui a servi de base aux réflexions que l'on vient de lire. Ce morceau est anonyme, mais en jugeant d'après les autres pièces contenues dans le même manuscrit, je suis disposé à croire qu'il a été rédigé dans le courant du XI[e] siècle de notre ère.

« Au nom de Dieu clément et miséricordieux. C'est en Dieu que je » me confie.

» J'ai lu, ô mon frère (puisse Dieu conserver toujours votre salut), » ce que vous avez dit au sujet de la figure, relativement à la- » quelle les algébristes et les géomètres se sont mutuellement proposé, » depuis un certain temps, des questions, sans y trouver de réponse » complétement satisfaisante.

» Il s'agit de la figure ABCD, dont chacun des côtés AB, AD, BC est » dix, tandis que le côté CD est parallèle au côté AB, et dont l'aire est » de quatre-vingt-dix coudées. On désire connaître CD.

» Or, je dis qu'il existe beaucoup de lignes qui n'ont pas des noms » au moyen desquels elles puissent être désignées, comme on peut » désigner la droite qui est commensurable au nombre, et qui ne » sont ni des racines ni des médiales [*] de quantités rationnelles, ni » des binomiales, ni des apotomes, ni des racines de binomiales ou

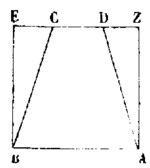
[*] C'est-à-dire racines carrées de racines carrées.

» d'apotomes, c'est-à-dire qu'elles n'appartiennent à aucune des vingt-» sept espèces de lignes discutées par Euclide, dans le dixième livre de » son ouvrage. Les lignes dont je veux parler ne sont pas non plus » commensurables à certaines autres lignes que j'ai indiquées, telles » que le côté de l'heptagone ou le côté de l'ennéagone, inscrits dans » un cercle dont le diamètre est un nombre, car on appelle ces deux » dernières lignes, de même que toutes les autres lignes semblables, » d'après les figures dont ce sont les côtés, de même qu'on appelle » la racine de dix d'après dix, et la racine de vingt d'après vingt, et » l'on obtient de cette manière des noms suffisants pour désigner » ces lignes. Toutes ces lignes existent et sont connues chez les bons » géomètres, aussi bien que les lignes rationnelles commensurables » aux nombres, car nous les rencontrons dans les constructions et » dans les démonstrations, nous les présentons matériellement aux » yeux, et nous opérons sur elles la duplation, la médiation, la » composition, la séparation, la multiplication et la division, exac-» tement comme nous effectuons ces opérations sur les lignes ration-» nelles, grâce à la commensurabilité de celles-ci avec les nombres [*].

» Maintenant voici d'abord en quoi consiste la difficulté que la con-» struction de la figure dont il s'agit offre aux algébristes.

» La méthode la plus expéditive que l'algébriste puisse employer » dans ce problème consiste à élever aux deux points A, B, deux per-

Fig. 1.



» pendiculaires à AB, et à prolonger CD de part et d'autre jusqu'à ce

[*] Il paraît que le savant auquel cette lettre est adressée avait demandé quelle est la nature algébrique de la ligne CD qu'il s'agit de construire, et que le passage qui précède contient la réponse de l'auteur de la lettre. Ce passage me semble offrir un intérêt particulier, parce qu'il montre que les Arabes comprenaient parfaitement que les racines d'équations de degrés différents sont des quantités d'une nature essentiellement et fon-

» qu'il rencontre les deux perpendiculaires aux deux points E, Z, de sorte » que AZ sera égal à BE et DZ égal à CE. Prenons DZ pour racine [*]; » son carré sera le carré (de l'inconnue). Retranchons-le du carré de » AD, qui est cent; le reste, à savoir cent unités moins le carré (de » l'inconnue), sera égal au carré de AZ. En même temps DC est égal » à dix moins deux choses, et il est évident que le produit de sa moitié, » plus la moitié de AB par AZ, est l'aire de la figure. La somme des » deux moitiés est dix moins chose. Il faut donc que nous multipliions » cela par lui-même et ensuite par cent moins le carré (de l'inconnue), » afin que cela devienne égal au carré de l'aire de la figure. Si l'on » multiplie dix moins chose par lui-même, il résulte un carré et cent » unités moins vingt choses; et si l'on multiplie ceci par cent moins un » carré, il vient vingt cubes et dix mille unités moins un carré-carré et » moins deux mille racines égal au carré de quatre-vingt-dix, c'est-à- » dire à huit mille et cent. Si l'on restaure (les quantités retranchées), » et oppose (les quantités positives) les unes aux autres, il vient : un » carré-carré et deux mille racines sont égaux à vingt cubes et mille » neuf cents unités. L'équation a donc lieu entre quatre éléments qui » ne sont pas les trois degrés proportionnels usuellement employés » par les algébristes [**], et qui ne se laissent pas abaisser à des degrés » inférieurs, de sorte que l'on puisse espérer d'en faire disparaître » quelques-uns, parce que parmi ces (termes) se trouve le nombre; » ils ne se laissent pas réduire comme on réduit la racine au nombre

---

damentalement différente. Il laisse entrevoir aussi que les Arabes savaient que la racine d'une équation du troisième degré, telle que le côté de l'ennéagone et de l'heptagone, ne peut pas s'exprimer par des quantités composées de radicaux du second degré, comme le sont les irrationnelles discutées par Euclide; car on voit clairement que l'auteur considère ces deux espèces de quantités comme des genres différents. J'ai analysé dans le tome XIX (1re série) du présent journal (p. 401 et suiv.) une démonstration de l'impossibilité d'exprimer la racine d'une équation du troisième degré au moyen des irrationnelles d'Euclide, démonstration due à Léonard de Pise, qui était le disciple des Arabes.

[*] C'est-à-dire pour inconnue. L'inconnue est appelée par les algébristes arabes « racine » ou « chose. »

[**] Ces trois degrés sont le carré de l'inconnue, l'inconnue et le terme constant.

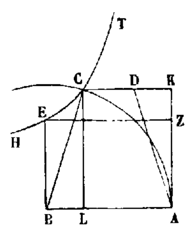
» et le carré à la racine, et le cube au carré; et en même temps ils ne » sont pas proportionnels. Car bien que le carré-carré soit au cube » comme la racine est au nombre, le cube n'est pas à la racine comme » le carré-carré est au cube. Mais si (les termes) ne sont pas propor- » tionnels, ils ne forment pas d'égalité, de sorte que la règle de l'algé- » briste ne s'y applique pas, et que son opération est en défaut.

» Quant au géomètre, ce problème lui présente des difficultés, s'il » ne connaît pas la manière de combiner les sections coniques, et s'il » n'est pas versé dans leur introduction et leur emploi dans les solu- » tions des problèmes.

» Sachez donc, ô mon frère (puisse Dieu conserver toujours votre » salut), que l'intention de celui qui a proposé cette question, re- » lativement à une figure qu'il avait conçue dans son imagination, » sans cependant pouvoir la construire, est de savoir comment il la » construira, et comment il la trouvera, et qu'il n'exige de celui à qui » il propose cette question rien autre chose si ce n'est de trouver la » figure, de sorte qu'il puisse la connaître de science certaine, et qu'il » puisse *de visu* examiner sa position et son tracé. Or, c'est ce que je » vais faire avec l'aide de Dieu.

» Menons donc la ligne AB qui soit égale à dix coudées, et élevons

Fig. 2.



» deux droites perpendiculaires à AB, à savoir AZ et BE, dont chacune » soit égale à neuf dixièmes de AB. Enfin menons EZ. Alors la figure » ABEZ sera un parallélogramme rectangle, et son aire sera de 90 cou- » dées. Construisons une hyperbole passant par le point E, et dont » les asymptotes soient les deux lignes AB, AZ. Que ce soit la section » conique TEH. Comme AB est plus grand que BE, le cercle décrit du » centre B avec un rayon égal à AB coupera la section conique TEH.

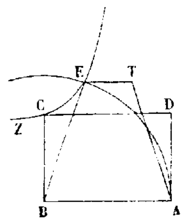
» Qu'il la coupe au point C. Joignons C, B par une ligne droite; elle » sera égale à AB. Plaçons au point A, en prenant pour un des côtés AB, » l'angle BAD égal à l'angle CBA. Faisons la ligne AD égale à la ligne BC, » et menons CD. Je dis que l'aire de la figure ABCD est égale à 90 coudées, que chacun des côtés AB, AD, BC est 10, et que CD est parallèle à AB.

» Démonstration. — Abaissons du point C sur AB la perpendiculaire CL, et prolongeons AZ et CD du côté de Z et de D. Qu'ils se » rencontrent au point K. Alors, puisque les deux angles A et B sont » droits, et que les deux angles DAB, ABC sont égaux, les deux angles KAD, CBE sont égaux. En même temps, l'angle CBE est égal à » l'angle BCL; par conséquent les deux angles KAD, BCL sont égaux, » et les deux angles K, L sont droits, et le côté AD est égal au côté BC. » Donc le triangle AKD est égal au triangle BCL. Ajoutant de part et » d'autre la figure ADCL, nous aurons la surface ABCD égale à la surface AKCL. Mais puisque les deux droites CK, CL sont menées d'un » point de l'hyperbole donnée à ses deux asymptotes AB, AZ parallèlement à celles-ci, elles comprennent un rectangle égal à celui qui » est compris sous ces dernières. Par conséquent, le rectangle ALCK » est égal au rectangle ABEZ. Mais le rectangle ABEZ était égal à 90. » Donc le rectangle ALCK est 90. Or on avait démontré que le rectangle ALCK était égal à la surface ABCD. Par conséquent, la surface » ABCD est de 90 coudées. En même temps chacun des côtés AB, AD, » BC est de 10 coudées, et le côté DC est parallèle à AB. Nous avons » donc fait ce que nous nous étions proposé; nous avons montré » l'existence de la ligne CD par construction et par démonstration, et » nous l'avons tracée tant en indiquant la manière de le faire, qu'en la » mettant matériellement sous les yeux. C'est ce que nous voulions » démontrer.

» Ceci étant démontré, si l'on nous donne un parallélogramme rectangle oblong, nous pouvons mener des deux extrémités de son » plus grand côté deux droites égales à ce côté sous des angles égaux » et telles que si l'on joint leurs extrémités, il résulte une figure égale » à la figure donnée, ayant trois côtés égaux chacun au plus grand côté » de cette dernière, et le quatrième côté parallèle au côté qui lui est » opposé. Car soit la figure donnée ABCD, et construisons une hyper-

» bole passant par le point C, et ayant pour asymptotes les deux lignes
» AB, AD. Que ce soit la section conique ECZ. Alors, si nous décrivons

Fig. 3.



» du centre B, avec un rayon égal à AB, un cercle, la section conique » sera coupée, parce que AB est plus grand que BC. Que le cercle » coupe l'hyperbole au point E. Joignons EB, et menons de A la droite » AT sous un angle égal à l'angle ABE et égale à BE. Enfin joignons TE. » Alors la surface ABET sera égale à la surface ABCD, chacun des deux » côtés AT, BE sera égal à AB, et TE sera parallèle à AB. La démons» tration sera la même que celle dont l'exposé précède.

» Voilà la réponse qui s'est immédiatement présentée à nous pour » la question dont il s'agit; et peut-être, si nous avions cherché avec » un effort d'esprit plus grand et une sollicitude plus sincère, aurions» nous trouvé une solution plus expéditive et plus facile, que nous » aurions offerte au frère dont Dieu fasse durer la prospérité, et qu'il » veuille guider par la plus belle des directions. Dieu est celui qui » inspire le choix des vrais moyens, et qui fait marcher dans les che» mins des réponses satisfaisantes. Louange à Dieu; que sa bénédiction » soit sur son prophète Mohammed et sur les saints de sa famille. »