JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SCHLÖMILCH

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 99-101.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__99_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE PAR M. SCHLÖMILCH.

« Dresde, 24 octobre 1862.

» ... Je profite de cette occasion pour vous communiquer quelques remarques relativement à deux points de la science.

» I. La résolution des équations du quatrième degré devient très-simple quand on se propose de réduire une telle équation à une équation réciproque. En effet, si dans l'équation donnée

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

on fait la substitution

$$x = g\xi + r,$$

on parvient à l'équation

$$\xi^4 + \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta = 0,$$

et les valeurs de α, β, γ, δ seront

$$\alpha = \frac{4r+a}{g}, \quad \beta = \frac{6r^2+3ar+b}{g^2},$$

$$\gamma = \frac{4r^3+3ar^2+2br+c}{g^3}, \quad \delta = \frac{r^4+ar^3+br^2+cr+d}{g^4}.$$

Pour que l'équation en ξ soit réciproque, il faut que l'on ait $\delta = 1$ et $\gamma = \alpha$, c'est-à-dire

$$g^4 = r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d,$$

$$(4r + \alpha)g^2 = 4r^3 + 3ar^2 + 2br + c.$$

L'élimination de g entre ces deux équations donne

$$(4r+a)^2(r^4+ar^3+br^2+cr+d) = (4r^3+3ar^2+2br+c)^2,$$

ou bien

$$\begin{gathered}(a^3 - 4ab + 8c)r^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)r^2\\ + (a^2c + 8ad - 4bc)r + a^2d - c^2 = 0.\end{gathered}$$

Cette équation détermine la valeur de r; les autres formules donnent successivement les valeurs de

$$g,\ \alpha,\ \beta,\ \xi \text{ et } x.$$

» Dans le cas spécial $a = 0$, l'équation en r devient plus simple

$$8cr^3 - 4(b^2 - 4d)r^2 - 4bcr - c^2 = 0,$$

et par substitution de $r = \frac{c}{2s}$ elle se change en celle-ci

$$s^3 + 2bs^2 + (b^2 - 4d)s - c^2 = 0,$$

ce qui est la résolvante d'Euler.

» La résolution donnée est peut-être moins élégante que celle d'Euler, mais elle repose sur une idée très-simple qui est facile à retenir dans la mémoire.

» II. On sait, d'après une remarque de Lambert, que la fonction

$$s = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots$$

étant développée suivant les puissances ascendantes de x, donne la série

$$s = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots,$$

où chaque coefficient contient autant d'unités que l'exposant a de diviseurs. La même fonction a été transformée par Clausen (*Journal de Crelle*, t. III, p. 95) qui trouve

$$s = \frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \ldots$$

» Cette transformation est très-remarquable, et elle offre assez d'avantage pour le cas où x est une petite fraction, mais elle cesse d'être favorable dans le cas contraire où x diffère peu de l'unité. C'est pour le dernier cas que je vais indiquer une transformation convenable, savoir :

$$s = \frac{C - ll\left(\frac{1}{x}\right)}{l\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{4} - C_1 l\left(\frac{1}{x}\right) - C_3\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3 - \ldots,$$

les valeurs des coefficients étant

$$C = 0,5772156649\ldots,$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{1.2.2} = \frac{1}{144},$$

$$C_3 = \frac{\left(\frac{1}{30}\right)^2}{1.2.3.4.4} = \frac{1}{86400},$$

$$C_5 = \frac{\left(\frac{1}{42}\right)^2}{1.2\ldots6.6} = \frac{1}{7620480},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

» La transformation indiquée se déduit aisément de la formule connue

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \ldots + f(mz)$$
$$= \frac{1}{z}\int_0^{mz} f(u)\,du + \frac{1}{2}[f(mz) - f(0)] + \frac{1}{12}[f'(mz) - f'(0)] - \ldots,$$

en y posant

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2},$$

$$m = \infty, \quad z = lx. \text{ »}$$