JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 123-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__123_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2,$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

La réponse à cette question deviendra facile au moyen d'une relation que j'ai obtenue pour rattacher la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, aux deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

et

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

auxquelles j'ai consacré les deux premiers articles du présent cahier.

Je suis parvenu, en effet, à démontrer que la quantité

$$40\,\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2),$$

égale à quarante fois le nombre que nous cherchons, équivaut à la somme

$$\mathrm{N}(3n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$
$$+ 39\,\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)],$$

dont les deux termes sont connus d'après ce qui a été dit dans les articles cités.

2. Pour arriver à des résultats explicites, reprenons les notations introduites au lieu indiqué, et posons à notre ordinaire

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair, premier à 3. La valeur de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$

a été donnée dans l'article qui ouvre ce cahier, où elle est représentée abréviativement par

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m).$$

La valeur de

$$\mathrm{N}(3n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2),$$

c'est-à-dire de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^{\beta+1} m),$$

s'en déduira en changeant β en $\beta + 1$. Quant à la valeur de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)],$$

elle est, comme on l'a vu, égale à celle de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^{\beta-1} m)$$

quand on a $\beta > 0$; de plus, l'expression analytique ainsi obtenue dans l'hypothèse de $\beta = 0$ jouit de la propriété singulière de rester exacte pour $\beta = 0$, et de fournir encore la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^{\alpha} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right].$$

Cela étant, si nous distinguons le cas d'un entier impair et le cas d'un entier pair, nous serons conduits aux conclusions suivantes.

En commençant par un entier impair

$$3^{\beta} m,$$

je trouve que

$$\mathrm{N}\,(3^{\beta} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

s'exprime par

$$\left[3^{2\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

le signe sommatoire portant comme d'ordinaire sur les diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. En particulier, la valeur de

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

est

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Par exemple,

$$\mathrm{N}\,(1 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2) = 4,$$

chose aisée à vérifier. Vient ensuite

$$\mathrm{N}\,(3 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2).$$

Or l'équation

$$3 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2$$

jouit en effet de vingt-huit solutions, dont quatre répondent à des valeurs nulles de x, y, z, t, avec une des indéterminées u, v, égale à zéro, l'autre égale à ± 1; les vingt-quatre autres répondent à $u = 0$, $v = 0$, une des indéterminées x, y étant nulle, l'autre égale à ± 1, et z, t prenant les valeurs suivantes :

$$z = \pm 1, \quad t = 0,$$

ou bien

$$z = 0, \quad t = \pm 1,$$

ou encore

$$z = 1, \quad t = -1,$$

ou enfin

$$z = -1, \quad t = 1.$$

Soit maintenant $\alpha > 0$. Je trouve que

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

s'exprime alors par

$$\frac{1}{5}\left[3^{2\beta+1} + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha . 9\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

En prenant $\beta = 0$, on a la valeur de

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2),$$

savoir :

$$\frac{1}{5}\left[3 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha . 9\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

mais toujours sous la condition de $\alpha > 0$. Soit $\alpha = 1$, par exemple, en sorte qu'on demande la valeur de

$$N(2m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2).$$

Elle est fournie par l'expression

$$5\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

ce qui donne en particulier

$$N(2 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2) = 10;$$

or, l'équation

$$2 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2$$

offre effectivement dix solutions. Dans toutes, on a

$$u = 0, \quad v = 0;$$

mais dans six d'entre elles on a de plus

$$x = 0, \quad y = 0,$$

avec

$$z = \pm 1, \quad t = 0,$$

ou bien avec

$$z = 0, \quad t = \pm 1,$$

ou encore avec

$$z = 1, \quad t = -1,$$

ou enfin avec

$$z = -1, \quad t = 1,$$

tandis que dans les quatre autres on fait

$$z = 0, \quad t = 0$$

et

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1.$$

5. L'égalité que nous avons reconnue entre la valeur de

$$40\,\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

et la somme

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(3n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2) \\ &+ 39\,\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] \end{aligned}$$

paraît fort remarquable; mais ce n'est pas la seule qu'on puisse employer pour arriver à l'expression générale de

$$\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2).$$

Ainsi on peut démontrer *à priori* que la valeur de

$$4\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

équivaut à celle de la somme ci-après :

$$\begin{gathered}\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)\\ + 3\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)].\end{gathered}$$

En joignant cette équation à la précédente, on déterminerait à la fois

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

et

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

au moyen des quantités connues

$$\mathrm{N}(n), \quad \mathrm{N}(3n),$$

qui toutes deux se rapportent à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

égalée à n ou à $3n$. La valeur de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

a été déjà donnée ailleurs. Ajoutons celle de

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2),$$

savoir :

$$\frac{1}{12}[13\mathrm{N}(n) - \mathrm{N}(3n)].$$