JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 145-159.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__145_0>

SUR

LES THÉORÈMES DE M. KRONECKER

RELATIFS AUX FORMES QUADRATIQUES;

Par M. HERMITE.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 7 juillet 1862.)

La théorie des fonctions elliptiques présente deux points principaux où elle vient se lier à l'arithmétique, et spécialement à la théorie des formes quadratiques à deux indéterminées de déterminant négatif. L'un s'offre lorsqu'on développe en séries simples de sinus et de cosinus des quotients de fonctions Θ, et ne suppose que les considérations les plus élémentaires de la théorie; l'autre tient à l'étude beaucoup plus profonde et difficile de ces équations algébriques à coefficients entiers dont dépendent les modules qui donnent lieu à la multiplication complexe. Si différents et éloignés que soient ces deux points de vue, ils présentent néanmoins un ensemble de résultats communs: nous voulons parler des déterminations nouvelles du nombre des classes de même déterminant, découvertes par M. Kronecker, et qui à bien juste titre ont attiré l'attention des géomètres. Dans une Lettre communiquée par M. Liouville à l'Académie l'année dernière, j'ai rapidement indiqué de quelle manière ces résultats pouvaient s'établir par la considération élémentaire du développement en série de sinus et de cosinus. C'est sur cette méthode que je me propose de revenir pour en faire une étude plus complète, en mieux fixer le caractère et les limites, et surtout approfondir la nature des nouveaux éléments arithmétiques qu'elle met en jeu et qui lui semblent propres. Elle repose essentiellement sur l'emploi des expressions en séries de deux systèmes différents de fonctions qu'il est nécessaire de donner avant d'en exposer le principe.

I. Le premier de ces systèmes est, à quelques exceptions près, l'ensemble des fonctions doublement périodiques considérées par Jacobi dans le § 39 des *Fundamenta*. En écrivant, pour abréger, Θ, Θ_1, H,

H_1 au lieu de $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, $\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, $H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, et θ, θ_1, η au lieu de $\Theta(0)$, $\Theta_1(0)$, $H_1(0)$, de sorte qu'on ait :

$$\theta = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \ldots,$$

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \ldots,$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots,$$

je les présenterai groupées de la manière suivante :

$$\textbf{1.}\quad \eta\theta_1\frac{H}{\Theta} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q} + \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

$$\textbf{2.}\quad \eta\theta_1\frac{\Theta}{H} = \frac{1}{\sin x} + \frac{4q\sin x}{1-q} + \frac{4q^3\sin 3x}{1-q^3} + \frac{4q^5\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

$$\textbf{3.}\quad \eta\theta_1\frac{H_1}{\Theta_1} = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\cos 5x}{1-q^5} - \ldots,$$

$$\textbf{4.}\quad \eta\theta_1\frac{\Theta_1}{H_1} = \frac{1}{\cos x} + \frac{4q\cos x}{1-q} - \frac{4q^3\cos 3x}{1-q^3} + \frac{4q^5\cos 5x}{1-q^5} - \ldots;$$

$$\textbf{5.}\quad \eta\theta\frac{H}{\Theta_1} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1+q} - \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1+q^5} - \ldots,$$

$$\textbf{6.}\quad \eta\theta\frac{\Theta_1}{H} = \frac{1}{\sin x} - \frac{4q\sin x}{1+q} - \frac{4q^3\sin 3x}{1+q^3} - \frac{4q^5\sin 5x}{1+q^5} - \ldots,$$

$$\textbf{7.}\quad \eta\theta\frac{H_1}{\Theta} = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\cos 5x}{1+q^5} + \ldots,$$

$$\textbf{8.}\quad \eta\theta\frac{\Theta}{H_1} = \frac{1}{\cos x} - \frac{4q\cos x}{1+q} + \frac{4q^3\cos 3x}{1+q^3} - \frac{4q^5\cos 5x}{1+q^5} + \ldots;$$

$$\textbf{9.}\quad \theta\theta_1\frac{\Theta_1}{\Theta} = 1 + \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} + \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots,$$

$$\textbf{10.}\quad \theta\theta_1\frac{\Theta}{\Theta_1} = 1 - \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} - \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots,$$

$$\textbf{11.}\quad \theta\theta_1\frac{H_1}{H} = \cot x - \frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2} - \frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4} - \frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6} - \ldots,$$

12. $\theta\theta_1 \dfrac{H}{H_1} = \operatorname{tang} x - \dfrac{4q^2 \sin 2x}{1+q^2} + \dfrac{4q^4 \sin 4x}{1+q^4} - \dfrac{4q^6 \sin 6x}{1+q^6} \ldots;$

13. $\theta^2 \dfrac{\Theta_1 H_1}{\Theta H} = \cot x - \dfrac{4q \sin 2x}{1+q} - \dfrac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} - \dfrac{4q^3 \sin 6x}{1+q^3} - \ldots,$

14. $\theta^2 \dfrac{\Theta H}{\Theta_1 H_1} = \operatorname{tang} x - \dfrac{4q \sin 2x}{1+q} + \dfrac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} - \dfrac{4q^3 \sin 6x}{1+q^3} + \ldots;$

15. $\theta_1^2 \dfrac{\Theta H_1}{\Theta_1 H} = \cot x + \dfrac{4q \sin 2x}{1-q} - \dfrac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} + \dfrac{4q^3 \sin 6x}{1-q^3} - \ldots,$

16. $\theta_1^2 \dfrac{\Theta_1 H}{\Theta H_1} = \operatorname{tang} x + \dfrac{4q \sin 2x}{1-q} + \dfrac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} + \dfrac{4q^3 \sin 6x}{1-q^3} + \ldots.$

17. $\eta^2 \dfrac{HH_1}{\Theta\Theta_1} = \dfrac{8q \sin 2x}{1-q^2} + \dfrac{8q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \dfrac{8q^5 \sin 10x}{1-q^{10}} + \ldots,$

18. $\eta^2 \dfrac{\Theta\Theta_1}{HH_1} = \dfrac{1}{\sin x \cos x} + \dfrac{8q^2 \sin 2x}{1-q^2} + \dfrac{8q^6 \sin 6x}{1-q^6} + \dfrac{8q^{10} \sin 10x}{1-q^{10}} + \ldots.$

Je joindrai en outre à ces formules celles qui concernent la fonction seconde espèce, savoir :

19. $\theta_1^2 \dfrac{\Theta'}{\Theta} = \dfrac{4q \sin 2x}{1-q^2} + \dfrac{4q^2 \sin 4x}{1-q^4} + \dfrac{4q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$

20. $\theta_1^2 \dfrac{H'}{H} = \cot x + \dfrac{4q^2 \sin 2x}{1-q^2} + \dfrac{4q^4 \sin 4x}{1-q^4} + \dfrac{4q^6 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$

21. $\theta_1^2 \dfrac{\Theta_1}{\Theta_1} = \dfrac{4q \sin 2x}{1-q^2} + \dfrac{4q^2 \sin 4x}{1-q^4} + \dfrac{4q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$

22. $\theta_1^2 \dfrac{H'_1}{H_1} = \operatorname{tang} x + \dfrac{4q^2 \sin 2x}{1-q^2} + \dfrac{4q^4 \sin 4x}{1-q^4} + \dfrac{4q^6 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots.$

Le second système comprend le développement en série de quotients dont le dénominateur est l'une des fonctions Θ, le numérateur le produit de deux autres et qui par suite ne représentent plus de fonctions doublement périodiques. En supposant différents l'un de l'autre les facteurs du numérateur et posant, pour abréger,

$$\mathfrak{A}_n = q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2n-1)^2}{4}},$$
$$\mathfrak{B}_n = 1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} - \ldots + 2q^{-(n-1)^2},$$
$$\mathfrak{C}_n = 1 - 2q^{-1} + + 2q^{-4} - \ldots + 2(-q)^{-(n-1)^2},$$

on a ce premier groupe de fonctions, savoir :

$$\textbf{1.}\quad \eta\,\frac{\mathrm{HH_1}}{\Theta}=\sum_{n=1} 4\sin 2nx\,q^{n^2}\mathfrak{A}_n,$$

$$\textbf{2.}\quad \eta\,\frac{\mathrm{HH_1}}{\Theta_1}=\sum_{n=1} 4\sin 2nx(-1)^{n-1}q^{n^2}\mathfrak{A}_n,$$

$$\textbf{3.}\quad \eta\,\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}}=\frac{1}{\sin x}+\sum_{n=1} 4\sin(2n+1)x\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{A}_n,$$

$$\textbf{4.}\quad \eta\,\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H_1}}=\frac{1}{\cos x}+\sum_{n=1} 4\cos(2n+1)x(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{A}_n,$$

$$\textbf{5.}\quad \theta_1\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\mathrm{H_1}}=\operatorname{tang}x+\sum_{n=1} 2\sin 2nx(-1)^{n-1}q^{n^2}\mathfrak{B}_n,$$

$$\textbf{6.}\quad \theta_1\frac{\Theta\mathrm{H_1}}{\mathrm{H}}=\cot x+\sum_{n=1} 2\sin 2nx\,q^{n^2}\mathfrak{B}_n,$$

$$\textbf{7.}\quad \theta_1\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\Theta}=\sum_{n=0} 2\sin(2n+1)x\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{B}_{n+1},$$

$$\textbf{8.}\quad \theta_1\frac{\Theta\mathrm{H_1}}{\Theta_1}=\sum_{n=0} 2\cos(2n+1)x(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{B}_{n+1},$$

$$\textbf{9.}\quad \theta\,\frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{H_1}}=\operatorname{tang}x-\sum_{n=1} 2\sin 2nx\,q^{n^2}\mathfrak{C}_n,$$

$$\textbf{10.}\quad \theta\,\frac{\Theta_1\mathrm{H_1}}{\mathrm{H}}=\cot x+\sum_{n=1} 2\sin 2nx(-1)^n q^{n^2}\mathfrak{C}_n,$$

$$\textbf{11.}\quad \theta\,\frac{\Theta\mathrm{H}}{\Theta_1}=\sum_{n=0} 2\sin(2n+1)x\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{C}_{n+1},$$

$$\textbf{12.}\quad \theta\,\frac{\Theta_1\mathrm{H_1}}{\Theta}=\sum_{n=0} 2\cos(2n+1)x(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{C}_{n+1}.$$

Si l'on suppose ensuite que les deux facteurs du numérateur soient égaux, on a un second groupe de douze fonctions où figurent les expressions suivantes. Posons

$$
\begin{aligned}
Z = {} & 4\cos 2xq\left(q^{-\frac{1}{4}}\right) \\
& - 4\cos 4xq^4\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{\frac{9}{4}}\right) \\
& + 4\cos 6xq^9\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}}\right) \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U = {} & \frac{1}{\sin x} - 4\sin 3xq^{\frac{9}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}}\right) \\
& + 4\sin 5xq^{\frac{25}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{4}{9}}\right) \\
& - 4\sin 7xq^{\frac{49}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

En désignant par Z_1 et U_1 ce que deviennent Z et U lorsqu'on met $\frac{\pi}{2} - x$, au lieu de x, on aura

13. $\eta\theta_1 \dfrac{H^2}{\Theta} = A\Theta - \theta Z,$

14. $\eta\theta_1 \dfrac{\Theta^2}{H} = AH + \theta U,$

15. $\eta\theta_1 \dfrac{H_1^2}{\Theta_1} = A\Theta_1 - \vartheta Z_1,$

16. $\eta\theta_1 \dfrac{\Theta_1^2}{H_1} = AH_1 + \theta U_1,$

17. $\eta\theta \dfrac{H^2}{\Theta_1} = B\Theta_1 + \vartheta_1 Z_1,$

18. $\eta\theta \dfrac{\Theta_1^2}{H} = -BH + \vartheta_1 U,$

19. $\eta\theta \dfrac{H_1^2}{\Theta} = B\Theta + \vartheta_1 Z,$

20. $\eta\theta \dfrac{\Theta^2}{H_1} = -BH_1 + \vartheta_1 U_1,$

21. $\vartheta\vartheta_1 \dfrac{\Theta_1^2}{\Theta} = C\Theta + \eta Z,$

22. $\vartheta\vartheta_1 \dfrac{H_1^2}{H} = -CH + \eta U,$

23. $\theta\theta_1 \dfrac{\Theta^2}{\Theta_1} = C\Theta_1 + \eta Z_1,$

24. $\theta\theta_1 \dfrac{H^2}{H_1} = -CH_1 + \eta U_1.$

Les quantités A, B, C sont des constantes, savoir :

$$A = \quad Z(0) = 4\sum a_n q^{\frac{1}{4}n},$$

$$B = -Z_1(0) = 4\sum(-1)^{\frac{n-3}{4}} a_n q^{\frac{1}{4}n},$$

$$C = \quad U_1(0) = 1 + 4\sum(-1)^{\frac{m}{2}} c_m q^m.$$

Dans ces formules m est pair et $n \equiv 3 \bmod. 4$, les coefficients a_n, c_m désignant les fonctions numériques définies par ces égalités :

$$a_n = \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

$$c_m = \sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}} - \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

où d représente tous les diviseurs impairs de n et de m inférieurs à leurs conjugués et d' les diviseurs impairs de m plus grands que leurs conjugués. On a d'ailleurs, en faisant $x = 0$ dans les équations **15**, **16**, **20**, ces relations dont nous ferons usage plus tard :

$$\begin{cases} \eta^3 = A\theta_1 - B\theta, \\ \theta_1^3 = A\eta + C\theta, \\ \theta^3 = B\eta + C\theta_1. \end{cases}$$

Voici maintenant de quelle manière les deux systèmes de fonctions conduisent à la considération des formes quadratiques à deux indéterminées de déterminant négatif.

II. Ayant, à cet effet, distingué quatre espèces de développements en série, suivant qu'ils se composent de termes en $\sin(2n+1)x$, $\cos(2n+1)x$, $\sin 2nx$, $\cos 2nx$, nous multiplierons entre elles toutes les fonctions du premier et du second système qui appartiennent à la même espèce, de manière que les produits obtenus ne comprennent que des termes en $\cos 2nx$. En intégrant ces produits entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$ on donnera naissance à autant d'expressions fonctions de la seule quantitité q, où le coefficient d'un terme quelconque q^Δ ou $q^{\frac{\Delta}{4}}$ dépendra d'une certaine manière du nombre des classes quadratiques de déterminant $-\Delta$. Tel est donc le procédé analytique très-simple qui, en établissant un lien entre les formes quadratiques de déterminant négatif et les transcendantes elliptiques, conduit à l'ensemble de résultats que nous allons passer en revue. Ces résultats d'ailleurs se classent naturellement d'après les intégrales définies de fonctions Θ, d'où ils sont tirés. Ainsi, en premier lieu, s'offrent les combinaisons obtenues en multipliant respectivement les équations **15**, **18**, **1**, **2**, **11** du premier système avec les équations **5**, **1**, **3**, **7**, **5** du second, et où l'intégration s'effectue d'elle-même, savoir :

$$
(\mathrm{A})\left\{
\begin{array}{ll}
(\mathbf{15},\ \mathbf{5}) & \theta_1^3 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta\, dx = \frac{\pi}{2}\theta_1^3, \\[2ex]
(\mathbf{18},\ \mathbf{1}) & \eta^3 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\eta^3, \\[2ex]
(\mathbf{1},\ \mathbf{3}) & \theta_1\eta^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\theta_1\eta^2, \\[2ex]
(\mathbf{2},\ \mathbf{7}) & \eta\theta_1^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\eta\theta_1^2, \\[2ex]
(\mathbf{11},\ \mathbf{5}) & \theta\theta_1^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\theta\theta_1^2.
\end{array}\right.
$$

Celles-ci seront étudiées ensuite, savoir :

$$
(\mathrm{B})\left\{
\begin{array}{ll}
(\mathbf{5},\ \mathbf{7}) \ \text{et}\ (\mathbf{12},\ \mathbf{1}) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta\theta_1 \frac{\mathrm{H}^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{A}\theta, \\[2ex]
(\mathbf{16},\ \mathbf{2}) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta_1^2 \frac{\mathrm{H}^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{A}\theta_1,
\end{array}\right.
$$

(B) (suite)

$$\begin{array}{ll}
(\mathbf{17},\ \mathbf{5}) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta^2\theta_1\frac{H^2}{\Theta}\,dx = \frac{\pi}{2}A\eta, \\
(\mathbf{13},\ \mathbf{5}) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\theta_1\frac{\Theta_1^2}{\Theta}\,dx = \frac{\pi}{2}C\theta, \\
(\mathbf{6},\ \mathbf{7}) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta\theta_1\frac{\Theta_1^2}{\Theta}\,dx = \frac{\pi}{2}C\eta.
\end{array}$$

Elles sont, comme on voit, essentiellement distinctes, et toutes les autres de forme analytique semblable qu'on pourrait obtenir reproduiraient, en changeant suivant les cas le signe de q, les mêmes fonctions.

III. Legendre, comme on sait, a le premier découvert par induction que le nombre des décompositions d'un entier en trois carrés dépendait d'une manière simple du nombre des classes quadratiques ayant pour déterminant ce même entier changé de signe, et Gauss a démontré ensuite ce résultat important dans ses *Recherches arithmétiques*. M. Kronecker a remarqué qu'on y est également amené par la théorie des fonctions elliptiques; mais la méthode du savant géomètre suppose, à son point de départ, et d'une manière essentielle, autant que j'en puis juger, la notion arithmétique de classe, qu'il n'est pas nécessaire d'employer dans la voie que j'ai suivie. Si l'on ne distingue pas les représentations propres et impropres, il suffira, en effet, de la définition seule du système des formes réduites pour un déterminant donné; de sorte que ce théorème, dans l'enchaînement naturel des propositions de l'arithmétique, pourra être placé dès le commencement et à côté des résultats qu'a obtenus Jacobi sur la décomposition en quatre carrés. Pour justifier cette observation, je présenterai en détail ce qui concerne la formation du cube de la fonction

$$\theta_1 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots,$$

afin aussi de pouvoir me borner, à l'égard des autres quantités χ^3.

$\theta_1\eta^2,\ldots$, contenues dans les formules (A), à donner seulement les résultats.

Considérons, à cet effet, les séries **15** et **5** du premier et du second système, dont il faut effectuer le produit, savoir :

$$\vartheta_1^2\frac{\Theta\mathrm{H}_1}{\Theta_1\mathrm{H}} = \cot x + \frac{4q\sin 2x}{1-q} - \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3\sin 6x}{1-q^3} - \ldots$$
$$= \cot x + \sum(-1)^{n-1}\frac{4q^n\sin 2nx}{1+(-q)^n},$$

et en faisant comme précédemment

$$\mathfrak{B}_n = 1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-(n-1)^2},$$
$$\theta_1\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1} = \operatorname{tang} x + \sum(-1)^{n-1}2q^{n^2}\mathfrak{B}_n\sin 2nx.$$

Ce produit devant être ensuite intégré entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, nous ferons usage de ces formules, qu'il est aisé d'obtenir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot x\sin 2nx\,dx = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tang} x\sin 2nx\,dx = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}.$$

On trouvera de cette manière, après avoir supprimé le facteur $\frac{\pi}{2}$,

$$\theta_1^3 = 1 + 4\sum_{n=1}\frac{q^n}{1+(-q)^n} - 2\sum_{n=1}(-1)^n q^{n^2}\mathfrak{B}_n + 4\sum_{n=1}\frac{q^{n^2+n}\mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}.$$

Les deux premières séries qui se présentent dans cette expression se développent sans difficulté suivant les puissances de q. En désignant par m un nombre impair quelconque, par $\varphi(m)$ le nombre de ses diviseurs, on trouvera

$$\sum \frac{q^n}{1+(-q)^n} = \sum \varphi(m) q^m - \sum (\sigma - 3)\varphi(m) q^{2^\sigma m},$$

$$\sum (-1)^n q^{n^2} \mathfrak{B}_n = \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \varphi(m) q^m$$
$$+ \sum \varphi(m) q^{4m}$$
$$+ \sum (\sigma - 3) \varphi(m) q^{4 \cdot 2^\sigma m},$$

l'exposant σ prenant la série des valeurs, 1, 2, 3, etc.

Pour la troisième, en remplaçant d'abord $\frac{1}{1+(-q)^n}$ par le développement $\sum\limits_{a=0} (-1)^{a(a+1)} q^{an}$, elle devient

$$\sum \frac{q^{n^2+n} \mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n} = \sum (-1)^{a(n+1)} q^{n^2+n+an-b^2};$$

ce qui met en évidence dans l'exposant q le déterminant d'une forme quadratique (A, B, C), en posant

$$A = n, \quad B = b, \quad C = n + 1 + a.$$

Laissant de côté pour un instant le facteur $(-1)^{a(n+1)}$, dont nous nous occuperons plus tard, observons que b doit recevoir les valeurs

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots, \quad \pm (n-1);$$

de sorte que cette forme sera réduite, si l'on s'arrête à la limite $\pm\left(\frac{n}{2}\right)$, c'est-à-dire, pour plus de précision, $\pm\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ lorsque n sera pair, et $\pm\left(\frac{n-1}{2}\right)$ lorsque n sera impair. Ce premier groupe de valeurs, si l'on fait

$$n^2 + n + an - b^2 = \Delta,$$

donnera et une seule fois toutes les formes réduites de déterminant

$-\Delta$, en exceptant les formes ambiguës (A, B, C) ou $2B = A$ et $C = A$, et parmi les formes (A, o, C), le seul cas de $A = C$, qui se présente quand Δ est un carré. Dans ces divers cas, en effet, on serait conduit pour le nombre a à une valeur négative.

Considérons ensuite la seconde série des valeurs de b, savoir :

$$\pm b = \frac{n}{2}, \quad \frac{n}{2} + 1, \ldots, \quad n - 1,$$

lorsque n est pair, et

$$\pm b = \frac{n+1}{2}, \quad \frac{n+1}{2} + 1, \ldots, \quad n - 1,$$

lorsque n est impair. Soit ε une quantité égale à l'unité en valeur absolue et de même signe que b ; en faisant la substitution

$$x = \varepsilon X - Y, \quad y = \varepsilon Y$$

dans la forme

$$nx^2 + 2bxy + (n + 1 + a) y^2,$$

on trouvera

$$nX^2 - 2\varepsilon(n - b\varepsilon) XY + (2n - 2b\varepsilon + 1 + a) Y^2,$$

et cette transformée, que nous désignerons par $(A, -\varepsilon B, C)$, en posant

$$(1) \qquad A = n, \quad B = n - b\varepsilon, \quad C = 2n - 2b\varepsilon + 1 + a,$$

remplira les conditions : $2B < A$, $2B < C$, le premier terme A étant tantôt plus grand, tantôt plus petit que le dernier C. On voit donc maintenant se produire une série de formes en nombre double des formes réduites, si l'on excepte celles-ci : (A, o, C), qui ont été précédemment obtenues pour $b = 0$. En effet, on tire des équations (1) :

$$(2) \qquad n = A, \quad b = \varepsilon(A - B), \quad a = C - 2B - 1,$$

et en permutant A et C,

$$(3) \qquad n = C, \quad b = \varepsilon(C - B), \quad a = A - 2B - 1.$$

Ainsi chaque forme réduite non ambiguë donne effectivement deux systèmes différents (n, b, a), où n et a sont positifs et b compris entre les limites assignées. Mais à l'égard des deux formes ambiguës $(A, \varepsilon B, A)$ les équations (2) et (3) coïncident, et pour celles-ci : $(2B, \varepsilon B, C)$, les équations (3) conduisant à une valeur négative de a, on n'a de même et pour chacune d'elles qu'un seul et unique système de nombres, n, b, a. Si l'on avait d'ailleurs à la fois :

$$2B = A = C,$$

on ne pourrait employer ni les équations (2), ni les équations (3), de sorte que cette forme est absolument exclue, comme plus haut le cas de $A = C$ dans le groupe des formes ambiguës $(A, 0, C)$. En résumé, soit, pour un déterminant donné Δ, H le nombre des formes réduites non ambiguës, h le nombre des formes ambiguës de l'espèce $(A, 0, C)$, h' le même nombre à l'égard des deux suivantes : $(2B, B, C)$, (A, B, A), l'expression

$$3H + h + 2h'$$

sera le nombre des systèmes (n, b, a) qui, sous les conditions requises, satisfont à l'équation

$$n^2 + n + an - b^2 = \Delta.$$

Mais si Δ est un carré ou le triple d'un carré, ce nombre, d'après les exceptions relatives aux formes dérivées de $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 2)$, devra être diminué d'une ou de deux unités. On peut d'ailleurs l'écrire de cette autre manière,

$$3\mathfrak{H} - 2h - h',$$

en introduisant le nombre total des classes de déterminant $-\Delta$ qui est

$$\mathfrak{H} = H + h + h'.$$

Maintenant revenons au facteur $(-1)^{a(n+1)}$ qui joue dans la question un rôle essentiel. En posant en premier lieu

$$A = n, \quad B = b, \quad C = n + 1 + a,$$

et en second lieu

$$A = n, \quad B = n - b\varepsilon, \quad C = 2n - 2b\varepsilon + 1 + a,$$

et

$$C = n, \quad B = n - b\varepsilon, \quad A = 2n - 2b\varepsilon + 1 + a,$$

on trouve toujours la même valeur

$$a(n+1) \equiv \Delta + A + B + C + 1 \pmod{2}.$$

Il en résulte que pour tout déterminant le facteur $(-1)^{a(n+1)}$ sera égal à $+1$ si l'un au moins des termes extrêmes A et C est impair, et à -1 si tous deux sont pairs. En faisant cette distinction dans les formes réduites, nommons $\mathfrak{H}_0$ le nombre total de ces formes, h_0, h'_0 celui des formes ambiguës des deux espèces dont nous avons parlé, où l'un des termes extrêmes est impair, et $\mathfrak{H}_1$, h_1, h'_1, les expressions de même signification dans le cas où les deux termes extrêmes sont pairs : on aura évidemment

$$\begin{aligned}\sum(-1)^{a(n+1)} q^{n^2+n+an-b^2} &= \sum[(3\mathfrak{H}_0 - 2h_0 - h'_0) - (3\mathfrak{H}_1 - 2h_1 - h'_1)]q^\Delta, \\ &= 3\sum(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1)q^\Delta + \sum(2h_1 + h'_1 - 2h_0 - h'_0)q^\Delta,\end{aligned}$$

ce qui donne la loi du développement, suivant les puissances de q, de la série $\sum \frac{q^{n^2+n}\mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}$. La partie que nous avons isolée à dessein

$$\sum(2h_1 + h'_1 - 2h_0 - h'_0)q^\Delta$$

s'évalue à l'aide des résultats qui suivent.

Soit d'abord $\Delta = m$, m étant impair, on aura

$$\left\{\begin{aligned} h_0 &= \tfrac{1}{2}\varphi(m), \\ h_1 &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} h'_0 &= \frac{1-(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{4}\varphi(m), \\ h'_1 &= \frac{1+(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{4}\varphi(m). \end{aligned}\right.$$

Et ensuite pour

$$\Delta = 2m,$$

$$\begin{cases} h_0 = \varphi(m), \\ h_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h'_0 = 0, \\ h'_1 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = 4m,$$

$$\begin{cases} h_0 = \varphi(m), \\ h_1 = \frac{1}{2}\varphi(m), \end{cases} \qquad \begin{cases} h'_0 = 0, \\ h'_1 = \frac{1}{2}\varphi(m). \end{cases}$$

$$\Delta = 4.2^\sigma m,$$

$$\begin{cases} h_0 = \varphi(m), \\ h'_1 = \frac{\sigma+1}{2}\varphi(m), \end{cases} \qquad \begin{cases} h'_0 = \varphi(m), \\ h'_1 = \frac{\sigma-1}{2}\varphi'(m). \end{cases}$$

On en conclut

$$\begin{aligned} &\sum (2h_1 + h'_1 - 2h_0 - h'_0)\, q^\Delta \\ &= \sum \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} - 2}{2} \varphi(m)\, q^m \\ &- \sum 2\varphi(m)\, q^{2m} \\ &- \sum \frac{1}{2}\varphi(m) q^{4m} \\ &+ \sum \frac{3\sigma - 5}{2} \varphi(m) q^{4.2^\sigma m}. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'en remplaçant dans l'équation fondamentale

$$\theta_1^3 = 1 + 4\sum \frac{q^n}{1+(-q)^n} - 2\sum (-1)^n q^{n^2} \mathfrak{B}_n + 4\sum \frac{q^{n^2+n}\,\mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}$$

les trois séries par leurs valeurs, on verra les deux premières détruire cette partie qui provient des formes ambiguës, et il restera simplement

$$\theta_1^3 = \sum 12(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1)\, q^\Delta.$$

Toutefois, si Δ est un carré ou le triple d'un carré, le terme général doit être remplacé par

$$12\left(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) q^{n^2}$$

ou

$$12\left(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 + \frac{2}{3}\right) q^{3n^2}.$$

Mais on peut éviter ces deux cas d'exception en ajoutant deux séries de termes de la forme q^{n^2} et q^{3n^2}; si l'on fait, pour abréger,

$$\varepsilon = \sum q^{3n^2} = \theta_1(q^3),$$

on aura de cette manière

$$\theta_1^3 = \sum 12(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1) q^\Delta + 3\theta + 4\varepsilon - 6.$$

C'est le résultat auquel est parvenu M. Kronecker, en employant la considération des modules qui donnent lieu à la multiplication complexe, car, d'après les dénominations de ce savant géomètre, on aura

$$\mathfrak{H}_0 = F(\Delta), \qquad \mathfrak{H}_1 = G(\Delta) - F(\Delta),$$

et, par suite,

$$\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 = 2F(\Delta) - G(\Delta) = E(\Delta).$$

On a donc deux méthodes absolument distinctes qui rattachent par un double lien à la théorie des fonctions elliptiques les propositions de Legendre et de Gauss sur la décomposition des nombres en trois carrés. Ces illustres géomètres, en poursuivant au prix de tant d'efforts leurs profondes recherches sur cette partie de l'arithmétique supérieure, tendaient ainsi à leur insu vers une autre région de la science et donnaient un mémorable exemple de cette mystérieuse unité qui se manifeste parfois dans les travaux analytiques en apparence les plus éloignés.