JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__160_0>

SUR LA FORME $x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 3t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande une expression simple du nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 3t^2,$$

où n est un entier donné, tandis que x, y, z, t sont des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs.

La réponse à cette question est facile, quand on se souvient de ce que nous avons dit dans le cahier de septembre 1863 au sujet d'une autre forme qui se rattache intimement à celle dont nous parlons aujourd'hui.

Posons $n = 2^\alpha 3^\beta m$, m étant un entier impair, non divisible par 3, et désignons par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m; puis distinguons les deux cas de $\alpha = 0$ et de $\alpha > 0$.

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair $3^\beta m$, on a

$$N = 2(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

Mais pour $\alpha > 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier pair, la formule est

$$N = 6(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

Je crois pouvoir me dispenser d'ajouter des exemples.