JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2+2(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 175-180.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__175_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2);$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme à six variables

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire du nombre

$$N[n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons, comme dans l'article précédent, dont nous conservons toutes les notations,

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro; puis nous introduirons de nouveau la fonction numérique

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

dans l'expression de laquelle le signe sommatoire porte sur les diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

2. Le cas le plus simple est celui d'un entier pair. En effet, dans

l'hypothèse de $\alpha > 0$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

exige que x soit pair, et en faisant

$$x = 2x_1,$$

elle se change en celle-ci

$$2^{\alpha-1} m = 2x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2,$$

qui la remplace complétement et qu'on peut écrire, en changeant de lettres,

$$2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

La valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

est donc égale à celle de

$$\mathrm{N}\left(2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right),$$

que nous avons donnée dans l'article précédent.

Nous sommes ainsi conduits à l'équation suivante

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+1} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right] \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2.$$

Toutefois cette équation n'est démontrée jusqu'ici que dans l'hypothèse de $\alpha > 0$. Mais je me suis assuré qu'elle subsiste même pour $\alpha = 0$, de sorte qu'elle résout la question proposée, même dans le cas d'un nombre impair. Elle devient alors

$$\mathrm{N}\left[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = \frac{2}{3}\left[4 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right] \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{N}\left[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 2 \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3,$$

et

$$N[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{10}{3}\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

quand m est au contraire de l'une des deux formes $8\mu + 5$, $8\mu + 7$. Or j'ai réussi à prouver que ces résultats sont exacts, en démontrant *à priori* que, dans le premier cas, la valeur de

$$N[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2],$$

vaut le cinquième de celle de

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2),$$

tandis que dans le second cas elle est avec elle dans le rapport de 5 à 17. La démonstration est fondée sur les considérations arithmétiques les plus simples.

3. Appliquons la formule

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+1} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

à quelques exemples.

Commençons par les nombres impairs. Notre formule donne d'abord

$$N[1 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 2,$$

résultat évidemment exact. Elle donne ensuite

$$N[3 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 20,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2],$$

où $(\pm 1)^2$ peut occuper cinq places distinctes entre les parenthèses.

L'équation

$$N[5 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 80$$

n'est pas moins facile à vérifier au moyen de l'identité

$$5 = 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables.

Enfin, on trouve

$$N[7 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 160;$$

et l'identité

$$7 = 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2)$$

sert à constater l'exactitude de ce dernier fait.

Terminons par l'équation

$$N[9 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 182.$$

La vérification se tire cette fois des trois identités :

$$9 = 3^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 1^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2).$$

Relativement aux nombres pairs, bornons-nous aux nombres 2, 4, 8. Notre formule donne

$$N[2 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 10,$$

ce qui est confirmé par l'identité

$$2 = 0^2 + 2[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2],$$

où l'on peut mettre $(\pm 1)^2$ à cinq places distinctes. On a ensuite

$$N[4 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 42;$$

or les deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$4 = 0^2 + 2[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2]$$

vérifient ce fait, si l'on a soin d'opérer dans la seconde d'entre elles les permutations convenables. Enfin l'équation

$$N[8 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 170$$

s'accorde avec les identités

$$8 = 2^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$8 = 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$8 = 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2),$$

pourvu qu'on marque du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et qu'on effectue les permutations voulues.

4. La formule

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+1} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

donne le nombre total des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2);$$

mais on peut aussi demander séparément le nombre

$$M[2\ m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions propres, pour lesquelles aucun entier > 1 ne divise jamais à la fois x, y, z, t, u et v. Pour l'obtenir, il faut former le produit

$$\prod\left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-2}\right],$$

relatif aux facteurs premiers a, b, etc., de l'entier

$$m = a^\lambda b^\rho \ldots,$$

puis le multiplier par un facteur convenable, qui dépend de l'exposant α et de la valeur de m (mod. 8). Pour $\alpha = 0$, ce facteur est

$$\frac{2}{3}\left[4 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right];$$

pour $\alpha = 1$, il devient

$$\frac{2}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right];$$

enfin pour $\alpha > 1$, il s'exprime par

$$5 \cdot 2^{2\alpha-1}.$$

Vérifions ces assertions sur quelques exemples.

D'après ce que nous venons de dire,

$$M[9 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 180.$$

Cela est exact. Le nombre total des solutions de l'équation

$$9 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

est cent quatre-vingt-deux ; mais il y a deux solutions impropres, fournies par l'équation

$$9 = (\pm 3)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Il faut aussi que

$$M[4 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 40,$$

et cela est exact. L'équation

$$4 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

offre quarante-deux solutions, mais deux d'entre elles sont impropres : ce sont celles qui répondent à l'identité

$$4 = (\pm 2)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Enfin, il faut que

$$M[8 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 160;$$

or cela est vrai. L'équation

$$8 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

a cent soixante-dix solutions ; mais il y en a dix d'impropres, résultant de l'identité

$$8 = 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs.