JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 5\left(y^2 + z^2 + t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 17-22.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__17_0>

SUR LA FORME $x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)$$

dont nous voulons nous occuper ici, n'offre pas de très-grandes difficultés quand on regarde comme connu pour tout entier n le nombre

$$\mathrm{N}(n)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$

que nous avons étudiée dans les premières pages de ce cahier.

Et d'abord, s'il s'agit d'un multiple de 5, on a évidemment

$$\mathrm{N}(5n = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \mathrm{N}(n).$$

En effet l'équation

$$5n = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2$$

exige que x soit multiple de 5; il faut donc faire

$$x = 5x_1,$$

et alors l'équation proposée se change en celle-ci

$$n = y^2 + z^2 + t^2 + 5x_1^2$$

dont le nombre de solutions est précisément $\mathrm{N}(n)$.

S'il s'agit d'un entier non multiple de 5, cet entier sera de l'une des deux formes

$$5g \pm 1, \quad 5g \pm 3.$$

Quand il est de la forme

$$5g \pm 3,$$

on a

$$N(5g \pm 3 = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 0;$$

car l'équation

$$5g \pm 3 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)$$

est impossible, puisque le second membre est résidu quadratique de 5 et le premier non résidu.

Pour les entiers de la forme

$$5g \pm 1,$$

la question est plus délicate. J'ai réussi néanmoins à la résoudre, en démontrant que

$$N(5g \pm 1 = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{1}{3} N(5g \pm 1).$$

On voit que la fonction $N(n)$ suffit toujours.

2. Entrons pourtant dans le détail de quelques cas particuliers, en laissant de côté les entiers multiples de 5 ou non résidus quadratiques de 5.

Considérons d'abord un entier impair de la forme

$$10k \pm 1,$$

et, après avoir décomposé $10k \pm 1$ de toutes les manières possibles en deux facteurs d, δ, introduisons la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

L'expression explicite de

$$N(10k \pm 1 = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

sera

$$2\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Pour l'entier 1, par exemple, c'est-à-dire pour l'équation

$$1 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

on n'aura que deux solutions : elles répondent à

$$x = \pm 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0.$$

Mais pour l'entier 9, le nombre des solutions deviendra égal à quatorze; les identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 5(0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = (\pm 2)^2 + 5[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2],$$
$$9 = (\pm 2)^2 + 5[0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],$$
$$9 = (\pm 2)^2 + 5[0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2]$$

confirment ce fait.

Qu'il s'agisse à présent d'un entier pair de la forme

$$2^{2\gamma}(10k \pm 1),$$

c'est-à-dire d'un entier pair égal au produit de $10k \pm 1$ par une puissance de 4. La valeur de

$$N[2^{2\gamma}(10k \pm 1) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2]$$

sera

$$\frac{2}{3}(2^{2\gamma+1} - 5)\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

se rapportant aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $10k \pm 1 = d\delta$. Pour l'entier 4, par exemple, c'est-à-dire pour l'équation

$$4 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

il n'y aura que deux solutions : elles répondent à

$$x = \pm 2, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0.$$

Mais pour l'entier 4.9 ou 36, il y en aura quatorze, ce qu'on vérifie aisément. Pour l'entier 16, il y en aura dix-huit. C'est ce que confirment les identités

$$16 = (\pm 4)^2 + 5(0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$16 = (\pm 1)^2 + 5[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2],$$

la première fournissant deux solutions et la seconde en donnant seize.

Soit enfin un entier pair de la forme

$$2^{2\gamma+1}(10k \pm 3).$$

Après avoir posé de toutes les manières possibles

$$10k \pm 3 = d\delta$$

et calculé la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

relative aux groupes d, δ ainsi définis, nous verrons que la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^{2\gamma+1}(10k \pm 3) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2\right]$$

s'exprime par

$$\frac{2}{3}(2^{2\gamma+2} + 5) \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Ainsi pour l'entier $6 = 2.3$, c'est-à-dire pour l'équation

$$6 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

il doit y avoir douze solutions. C'est ce que confirment les identités

$$6 = (\pm 1)^2 + 5[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2],$$
$$6 = (\pm 1)^2 + 5[0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],$$
$$6 = (\pm 1)^2 + 5[0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2].$$

3. Je ne m'arrêterai pas à la recherche du nombre des représentations *propres* d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

non que cette recherche soit difficile, mais elle nous entraînerait dans des détails fastidieux, parce qu'il faudrait distinguer beaucoup de cas différents. Mais je dirai deux mots d'une autre question, qui n'est pas sans intérêt.

Exigeons donc à présent que les entiers x, y, z, t soient impairs et positifs, puis cherchons quel sera, sous cette condition, le nombre des représentations d'un entier donné n. Laissons de côté les deux cas faciles de n multiple de 5 et de n non résidu quadratique de 5. Supposons aussi n multiple de 8, car sans cela il n'y a aucune représentation de n sous la forme voulue. Nous n'aurons dès lors à faire que les deux hypothèses suivantes

$$n = 8.2^{2\gamma+1}(10k \pm 1),$$

ou bien

$$n = 8.2^{2\gamma}(10k \pm 3);$$

on admet pour γ la valeur zéro. Pour arriver au but, il faudra encore se servir de la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

relative dans le premier cas aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $10k \pm 1 = d\delta$, tandis que dans le second d et δ appartiennent à l'entier $10k \pm 3$.

Pour

$$n = 8.2^{2\gamma+1}(10k \pm 1),$$

le nombre demandé sera exprimé par

$$2^{2\gamma} \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d;$$

et pour

$$n = 8.2^{2\gamma}(10k \pm 3),$$

il est égal à

$$2^{2\gamma-1} \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Ainsi, par exemple, l'équation

$$16 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

quand on y prend x, y, z, t impairs et positifs, n'a qu'une solution : elle est fournie par l'identité

$$16 = 1^2 + 5(1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Pour l'entier 24, c'est-à-dire pour l'équation

$$8.3 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

où x, y, z, t sont de même impairs et positifs, on ne trouve de même qu'une solution. C'est l'identité

$$24 = 3^2 + 5(1^2 + 1^2 + 1^2)$$

qui la donne cette fois.