JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. TCHÉBICHEF

Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^1+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}dx$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 225-241.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__225_0>

SUR

L'INTÉGRATION DE LA DIFFÉRENTIELLE

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx\,;$$

PAR M. P. TCHÉBICHEF [*].

L'intégration de la différentielle

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

ne présente aucune difficulté, si la fonction

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

a des facteurs égaux. En faisant donc abstraction de ce cas, nous supposerons dans tout ce qui suit que les facteurs de la fonction

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

sont tous différents entre eux. Dans cette hypothèse, comme l'on sait, l'intégration de

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$$

en termes finis est impossible; de là on conclut que l'intégrale

$$\int\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

[*] Cette Note a été imprimée en 1860 dans le *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg* (t. III). Nous la reproduisons ici avec plaisir, sur la demande de l'auteur. Nous y joignons même l'extrait substantiel que M. Tchébichef a donné aussi de son travail dans les *Comptes rendus* de notre Académie (t. LI). (J. L.)

ne peut être exprimée en termes finis que dans le cas où l'on donne à la constante A une valeur convenablement choisie. En effet, si l'on admettait que l'intégration de

$$\frac{x + \mathrm{A}}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\,dx$$

en termes finis fût possible dans le cas de $\mathrm{A} = \mathrm{C}$ aussi bien que dans celui de $\mathrm{A} = \mathrm{C}_1$, on trouverait que la même chose aurait lieu relativement à la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

qu'on obtient en retranchant les différentielles

$$\frac{x + \mathrm{C}}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\,dx, \quad \frac{x + \mathrm{C}}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\,dx$$

l'une de l'autre, et en divisant leur différence par $\mathrm{C} - \mathrm{C}_1$, ce qui est inadmissible. D'après cela les différentielles de la forme

$$\frac{x + \mathrm{A}}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\,dx$$

présentent l'un des deux cas : ou, pour une certaine valeur de A, l'intégrale

$$\int \frac{x + \mathrm{A}}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\,dx$$

s'exprime en termes finis, ou bien, pour toutes les valeurs de A, une telle expression de

$$\int \frac{x + \mathrm{A}}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\,dx$$

est impossible. La discussion de la différentielle

$$\frac{x + \mathrm{A}}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\,dx$$

sous ce rapport est d'une très-grande importance. C'est à cela que se réduit, en définitive, l'intégration des différentielles qui contiennent la racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré, comme nous l'avons montré dans le Mémoire sur ces différentielles [*], et c'est par là seulement qu'on peut reconnaitre si la fonction elliptique donnée de la troisième espèce est réductible ou non à celle de la première. Ces questions importantes surpassent les moyens que possède l'Analyse dans son état actuel, faute d'un critérium infaillible par lequel, d'après les valeurs des coefficients α, β, γ, δ, on puisse reconnaître si l'intégration de

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx,$$

pour toutes les valeurs de A, est impossible en termes finis ou non. D'après ce qu'Abel a donné dans son ingénieux Mémoire sur l'intégration de la différentielle $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, l'intégrale

$$\int\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

pour toutes les valeurs de A n'est impossible en termes finis que dans le cas où la fraction continue, résultant du développement de

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta},$$

est dépourvue de périodicité. Mais c'est ce dont on ne peut s'assurer aussi loin que soit prolongé le développement de

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta},$$

vu que le nombre de termes dans une période reste arbitraire. De même on ne peut tirer, par rapport à cette question, aucun parti

[*] *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 6^e série, t. VI.

de la considération de certaines intégrales définies, d'après lesquelles on peut assigner analytiquement tous les cas des différentielles de la forme

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

qui s'intègrent en termes finis; car, pour reconnaître par là que la différentielle donnée, pour toutes les valeurs de A, n'admet pas une telle intégration, il est indispensable d'avoir les valeurs exactes de ces intégrales, tandis qu'elles ne peuvent être évaluées, d'après les coefficients α, β, γ, δ, qu'avec une approximation plus ou moins grande.

Pour la solution complète des questions importantes que nous venons de mentionner, on doit trouver un procédé qui, d'après les coefficients α, β, γ, δ et à l'aide d'une série d'opérations algébriques en nombre limité, conduirait à reconnaître que, par le choix convenable de A, il est possible ou non de rendre l'intégrale

$$\int\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

exprimable en termes finis. C'est ce que nous avons cherché à faire pour le cas de α, β, γ, δ rationnels, et, pour ce cas, nous avons trouvé une méthode qui, au moyen des opérations algébriques et en nombre limité, conduit ou à trouver l'expression de l'intégrale

$$\int\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx,$$

avec une certaine valeur de A, ou à reconnaître que pour aucune valeur de A cette intégrale n'est possible en termes finis.

Cette méthode d'intégration de la différentielle

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx,$$

où

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

sont rationnels, consiste en ce qui suit :

1° On réduira l'intégrale

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} dx$$

à la forme

$$\int \frac{z + B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} dz,$$

où l, m, n sont des nombres entiers, ce qu'on peut toujours faire par la substitution linéaire

$$x = a_0 z + b_0,$$

si la fonction

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

a un facteur rationnel du premier degré. Dans le cas contraire, on réduira préalablement l'intégrale

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} dx,$$

en posant

$$\frac{\frac{1}{16}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta} - x^2 - \frac{1}{2}\alpha x - \frac{4\beta - \alpha^2}{8}} = z,$$

d'après quoi, en faisant

$$\frac{-3\alpha^4 + 16\alpha^2\beta - 16\alpha\gamma - 16\beta^2 + 64\delta}{2\alpha^3 - 8\alpha\beta + 16\gamma} = a,$$

$$\frac{3}{4}\alpha^2 - 2\beta = b,$$

$$-\frac{1}{8}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta - \gamma = c,$$

on obtiendra

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{z + 2A - \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{z^4 + az^3 + bz^2 + cz}} dz + \frac{1}{2}\log z,$$

où la nouvelle intégrale contient, sous le signe du radical, un polynôme doué du facteur rationnel z.

2° On examinera si la fonction

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$$

est décomposable en deux facteurs rationnels du second degré

$$(z^2 + pz)(z^2 + rz + s)$$

dont les coefficients p, r, s vérifient l'équation

$$(1) \qquad s(p^2 - pr + s) = \text{nombre carré},$$

et au moins l'une de ces deux inégalités

$$(2) \qquad pr - 2s > 0 \quad \text{ou} \quad 4s - r^2 > 0.$$

Dans le cas où il est possible de décomposer la fonction

$$z^4 + lz^2 + mz^2 + nz$$

en deux facteurs $(z^2 + pz)$, $(z^2 + rz + s)$ qui remplissent ces conditions, et où p n'est pas égal à r, on réduira l'intégrale

$$\int \frac{z + \mathrm{B}}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} dz,$$

en posant

$$\frac{(p - r)^2 (z^2 + pz)}{(r - p)z + s} = z_1,$$

ce qui donne

$$\int \frac{z + \mathrm{B}}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} dz = \frac{1}{2} \int \frac{z_1 + (r - p)(2\mathrm{B} - p)}{\sqrt{z_1 [z_1 + (p - r)^2][(z_1 + p^2 - pr)^2 + 4sz_1]}} dz_1$$
$$+ \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{z_1} + \sqrt{z_1 + (p - r)^2}}{\sqrt{z_1} - \sqrt{z_1 + (p - r)^2}}.$$

La nouvelle intégrale

$$\int \frac{z_1 + (r - p)(2\mathrm{B} - p)}{\sqrt{z_1 [z_1 + (p - r)^2][(z_1 + p^2 - pr)^2 + 4sz_1]}} dz_1$$

se réduira de la même manière, en tant que la fonction

$$z_1[z_1+(p-r)^2][(z_1+p^2-pr)^2+4sz_1]$$

est décomposable en deux facteurs rationnels

$$(z_1^2+p_1z_1)(z_1^2+rz_1+s_1)$$

qui remplissent les conditions

$$s_1(p_1^2-p_1r_1+s_1)=\text{nombre carré},$$
$$p_1r_1-2s_1>0 \quad \text{ou} \quad 4s_1-r_1^2>0,$$

p_1 n'étant pas égal à r_1. Et ainsi de suite. Si, dans ces réductions, on rencontre une intégrale

$$\int \frac{z_i+\mathrm{B}_i}{\sqrt{z_i^4+l_iz_i^3+m_iz_i^2+n_iz_i}}\,dz_i,$$

dans laquelle la fonction

$$z_i^4+l_iz_i^3+m_iz_i^2+n_iz_i$$

se décompose en deux facteurs

$$(z_i^2+p_iz_i)(z_i^2+r_iz_i+s_i)$$

dont les coefficients p_i, r_i sont égaux, on trouvera immédiatement l'expression de cette intégrale, d'apres la formule

$$\int \frac{z_i+\frac{1}{2}p_i}{\sqrt{(z_i^2+p_iz_i)(z_i^2+p_iz_i+s_i)}}\,dz_i=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{z_i^2+p_iz_i}+\sqrt{z_i^2+p_iz_i+s_i}}{\sqrt{z_i^2+p_iz_i}+\sqrt{z_i^2+p_iz_i+s_i}},$$

en prenant

$$\mathrm{B}_i=\frac{1}{2}p_i.$$

Dans le cas contraire, on répétera ces réductions jusqu'à ce qu'on parvienne à l'intégrale

$$\int \frac{z_\lambda + B_\lambda}{\sqrt{z_\lambda^4 + l_\lambda z_\lambda^3 + m_\lambda z_\lambda^2 + n_\lambda z_\lambda}} dz_\lambda,$$

dans laquelle la fonction

$$z_\lambda^4 + l_\lambda z_\lambda^3 + m_\lambda z_\lambda^2 + n_\lambda z_\lambda$$

n'est plus décomposable en deux facteurs rationnels du second degré

$$(z_\lambda^2 + p_\lambda z_\lambda)(z_\lambda^2 + r_\lambda z_\lambda + s_\lambda)$$

qui remplissent les conditions

$$s_\lambda(p_\lambda^2 - p_\lambda r_\lambda + s_\lambda) = \text{nombre carré},$$
$$p_\lambda r_\lambda - 2s_\lambda > 0 \quad \text{ou} \quad 4s_\lambda - r_\lambda^2 > 0,$$

et on traitera cette intégrale par un procédé que nous allons exposer tout de suite.

3° Ayant à intégrer la différentielle

$$\frac{z + B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} dz,$$

où la fonction

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$$

n'est pas décomposable en deux facteurs rationnels

$$(z^2 + pz)(z^2 + rz + s)$$

qui remplissent les conditions

$$s(p^2 - pr + s) = \text{nombre carré},$$
$$pr - 2s > 0 \quad \text{ou} \quad 4s - r^2 > 0,$$

on calculera, d'après les formules

$$(3)\quad \begin{cases} l_{i+1} = -l_i - \dfrac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16n_i}, \\ m_{i+1} = -2m_i + \dfrac{3}{4}l_i^2, \\ n_{i+1} = -n_i + \dfrac{1}{2}l_i m_i - \dfrac{1}{8}l_i^3, \\ l_0 = l, \quad m_0 = m, \quad n_0 = n, \end{cases}$$

les nombres

$$\begin{array}{l} l_0,\ m_0,\ n_0, \\ l_1,\ m_1,\ n_1, \\ l_2,\ m_2,\ n_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

en poussant le calcul jusqu'à ce que l'on rencontre dans cette suite une valeur fractionnaire, ou que l'on trouve deux systèmes de nombres

$$\begin{array}{lll} l_\mu, & m_\mu, & n_\mu, \\ l_{\mu+\nu}, & m_{\mu+\nu}, & n_{\mu+\nu} \end{array}$$

qui soient respectivement égaux. Dans le premier cas, on conclura que l'intégrale

$$\int \frac{z + \mathrm{B}}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\, dz,$$

pour aucune valeur de B, n'est exprimable en termes finis. Dans le second cas, il sera certain que cette intégrale, pour une certaine valeur de B, est exprimable en termes finis, et son expression sera donnée par cette formule

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{z + \mathrm{B}}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\, dz = \log\left(\sqrt[2]{z_1}\,\sqrt[2^2]{z_2}\ldots\sqrt[2^\mu]{z_\mu}\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{2^\nu}{2^\nu - 1}\log\left(\sqrt[2^{\mu+1}]{z_{\mu+1}}\,\sqrt[2^{\mu+2}]{z_{\mu+2}}\ldots\sqrt[2^{\mu+\nu}]{z_{\mu+\nu}}\right), \end{cases}$$

où $z_1, z_2, z_3 \ldots, z_{\mu+\nu}$ sont des fonctions algébriques de z qui se déterminent ainsi :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\frac{1}{16}l_0^3 - \frac{1}{4}l_0 m_0 + \frac{1}{2}n_0}{\sqrt{z^4 + l_0 z^3 + m_0 z^2 + n_0 z} - z^2 - \frac{1}{2}l_0 z - \frac{4m_0 - l_0^2}{8}},\\
z_2 &= \frac{\frac{1}{16}l_1^3 - \frac{1}{4}l_1 m_1 + \frac{1}{2}n_1}{\sqrt{z_1^4 + l_1 z_1^3 + m_1 z_1^2 + n_1 z_1} - z_1^2 - \frac{1}{2}l_1 z_1 - \frac{4m_1 - l_1^2}{8}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_{i+1} &= \frac{\frac{1}{16}l_i^3 - \frac{1}{4}l_i m_i + \frac{1}{2}n_i}{\sqrt{z_i^4 + l_i z_i^3 + m_i z_i^2 + n_i z_i} - z_i^2 - \frac{1}{2}l_i z_i - \frac{4m_i - l_i^2}{8}}.
\end{aligned}\right.$$

Quant à la valeur de B, elle sera donnée par cette formule :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{B} = {}&\frac{1}{4}\left(l_0 + \frac{1}{2}l_1 + \frac{1}{2^2}l_2 + \ldots + \frac{1}{2^{\mu-1}}l_{\mu-1}\right)\\
&+ \frac{1}{4}\frac{2^\nu}{2^\nu - 1}\left(\frac{1}{2^\mu}l_\mu + \frac{1}{2^{\mu+1}}l_{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{2^{\mu+\nu-1}}l_{\mu+\nu-1}\right).
\end{aligned}\right.$$

Le nombre des opérations qu'on aura à faire par cette méthode d'intégration sera toujours limité. Les réductions à exécuter, d'après le 2°, sur l'intégrale

$$\int \frac{z + \mathrm{B}}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\,dz,$$

dans le cas où la fonction

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$$

se décompose en deux facteurs $(x^2 + px).(x^2 + rx + s)$ qui vérifient les conditions (1) et (2), seront en nombre inférieur au plus petit exposant des facteurs premiers dont se composent les termes de la fraction

$$\frac{pr - 2s + 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}}{\sqrt{s(p^2 - pr + s)}},$$

réduite à sa forme la plus simple. Le nombre des systèmes

$$\begin{array}{l} l_0,\ m_0,\ n_0, \\ l_1,\ m_1,\ n_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

qu'on aura à calculer, d'après le 3°, en traitant l'intégrale

$$\int \frac{z+B}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}\,dz,$$

où la fonction

$$z^4+lz^3+mz^2+nz$$

ne se décompose pas en deux facteurs $(z^2+pz).(z^2+rz+s)$ vérifiant les conditions (1) et (2), ne surpassera pas celui des solutions entières des équations

$$Y^2-3XZ=m^2-3ln,$$
$$\begin{aligned} &Z^2(4X^3Z-X^2Y^2-18XYZ+4Y^3+27Z^2)\\ &=n^2(4l^3n-l^2m^2-18lmn+4m^3+27n^2), \end{aligned}$$

qui ne peuvent être qu'en nombre limité; en effet, d'après la dernière équation, le carré de l'inconnue Z doit être diviseur de

$$n^2(4l^3n-l^2m^2-18lmn+4m^3+27n^2),$$

et tant qu'on fixe la valeur de Z, les deux autres inconnues se déterminent complétement par ces équations.

Pour montrer sur des exemples l'usage de cette méthode, nous allons chercher, en premier lieu, l'intégrale

$$\int \frac{x+A}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx.$$

Comme la fonction

$$x^4+x^2+x+\frac{1}{4}$$

n'a pas de facteur rationnel du premier degré, on réduira cette intégrale, d'après le 1°, en posant

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}-x^2-\frac{1}{2}}=z.$$

De cette façon on obtient

$$(7)\qquad \int\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{z+2\mathrm{A}}{\sqrt{z^4-2z^2-z}}\,dz+\frac{1}{2}\log z.$$

En remarquant que la fonction

$$z^4-2z^2-z$$

ne se décompose en deux facteurs rationnels du second degré

$$(z^2+pz)(z^2+rz+s),$$

qu'en prenant

$$p=1,\quad r=-1,\quad s=-1,$$

et que ces valeurs ne vérifient pas la condition

$$s(p^2-pr+s)=\text{nombre carré},$$

on passera immédiatement à la recherche de l'intégrale

$$\int\frac{z+2\mathrm{A}}{\sqrt{z^4-2z^2-z}}\,dz,$$

suivant le 3°. Pour cela on calculera les nombres

$$\begin{array}{l} l_0,\ m_0,\ n_0,\\ l_1,\ m_1,\ n_1,\\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

d'après les formules (3), en prenant

$$l=0,\quad m=-2,\quad n=-1.$$

L'on obtiendra de cette manière

$$\begin{array}{lll}
l_0 = 0, & m_0 = -2, & n_0 = -1, \\
l_1 = 4, & m_1 = 4, & n_1 = 1, \\
l_2 = -4, & m_2 = 4, & n_2 = -1, \\
l_3 = 4. & m_3 = 4, & n_3 = 1.
\end{array}$$

En remarquant que le dernier système des nombres

$$l_3,\ m_3,\ n_3$$

est identique au second

$$l_1,\ m_1,\ n_1,$$

on s'y arrêtera, et l'on conclura tout de suite que l'intégrale

$$\int \frac{z + 2A}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z}}\, dz,$$

pour une valeur de $2A$ convenablement choisie, est exprimable en termes finis. Comme dans ce cas

$$\mu = 1, \quad \nu = 2,$$

on aura, d'après (4),

$$\int \frac{z + 2A}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z}}\, dz = \log\left(\sqrt{z_1}\right) + \frac{4}{3} \log\left(\sqrt[2^2]{z_2}\,\sqrt[2^3]{z_3}\right),$$

où les fonctions

$$z_1,\ z_2,\ z_3,$$

en vertu de (5), se déterminent ainsi :

$$z_1 = \frac{\frac{1}{16} l_0^3 - \frac{1}{4} l_0 m_0 + \frac{1}{2} n_0}{\sqrt{z^4 + l_0 z^3 + m_0 z^2 + n_0 z} - z^2 - \frac{1}{2} l_0 z - \frac{4m_0 - l_0^2}{8}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z} - z^2 + 1},$$

$$z_2 = \frac{\frac{1}{16}l_1^3 - \frac{1}{4}l_1 m_1 + \frac{1}{2}n_1}{\sqrt{z_1^4 + l_1 z_1^3 + m_1 z_1^2 + n_1 z_1} - z_1^2 - \frac{1}{2}l_1 z_1 - \frac{4m_1 - l_1^2}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{z_1^4 + 4z_1^3 + 4z_1^2 + z_1} - z_1^2 - 2z_1} = z + 1,$$

$$z_3 = \frac{\frac{1}{16}l_3^2 - \frac{1}{4}l_2 m_2 + \frac{1}{2}n_2}{\sqrt{z_4^2 + l_2 z^3 + m_2 z_2^2 + n_2 z_2} - z_2^2 - \frac{1}{2}l_2 z_2 - \frac{4m_2 - l_2^2}{8}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z_2^4 - 4z_2^3 + 4z_2^2 - z^2} - z_2^2 + 2z^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z} - z^2 + 1}.$$

D'après cela on trouve

$$\int \frac{z + 2A}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z^1}} dz = \log(\sqrt{z_1}) + \frac{4}{3}\log\left(\sqrt[2^2]{z_2}\sqrt[2^3]{z_3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\log\left[\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^4 + 2z^2 - 1} - z^2 + 1}\right)^4 (z+1)^2\right].$$

D'autre part, comme

$$\mu = 1, \quad \nu = 2, \quad l_0 = 0, \quad l_1 = 4, \quad l_2 = -4,$$

on obtient, d'après (6), pour la constante $2A$, cette valeur

$$\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{4}{2} - \frac{4}{4}\right) = \frac{1}{3}.$$

D'où il suit que

$$A = \frac{1}{6}.$$

D'après ces valeurs de l'intégrale

$$\int \frac{z + 2A}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z}} dz$$

et de la constante A, la formule (7) nous donne

$$\int \frac{x+\frac{1}{6}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\log\left[\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^4-2z^3-z-z^2+1}}\right)^4(z+1)^2\right]+\frac{1}{2}\log z,$$

où

$$z=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}-x^2-\frac{1}{2}}.$$

En portant cette valeur précédente de z dans l'expression précédente de l'intégrale

$$\int \frac{x+\frac{1}{6}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx,$$

on obtient en définitive

$$\int \frac{x+\frac{1}{6}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}\right)^2}{\left(x^2-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\frac{1}{12}\log\frac{x^2+\sqrt{R}}{x^2-\sqrt{R}}+\frac{1}{6}\log\frac{x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{R}}{x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{R}}+\frac{1}{6}\log\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{R}}{x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{R}},$$

où

$$R=x^4+x^2+x+\frac{1}{4}.$$

Prenons encore pour exemple l'intégrale

$$\int \frac{z+B}{\sqrt{z^4+5z^3+3z^2-z}}\,dz.$$

Comme la fonction

$$z^4+5z^3+3z^2-z$$

se décompose en deux facteurs rationnels

$$(z^2+pz), \quad (z^2+rz+s),$$

en prenant

$$p=1, \quad r=4, \quad s=-1,$$

et que ces valeurs vérifient la condition

$$s(p^2-pr+s) = \text{nombre carré}$$

et l'inégalité

$$pr-2s>0,$$

on réduira, d'après le 2°, l'intégrale

$$\int \frac{z+B}{\sqrt{z^4+5z^3+3z^2-z}}\,dz,$$

en posant

$$\frac{(p-r)^2(z^2+pz)}{(r-p)z+s} = \frac{9(z^2+z)}{3z-1} = z_1.$$

On obtiendra de cette manière

$$\int \frac{z+B}{\sqrt{z^4+5z^3+3z^2-z}}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{z_1+6B-3}{\sqrt{z_1^4-z_1^3-81z_1^2+81z_1}}\,dz_1$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1+9}}{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1+9}}.$$

La fonction

$$z_1^4-z_1^3-81z_1^2+81z_1,$$

étant composée de quatre facteurs rationnels du premier degré

$$z_1, \quad z_1-9, \quad z_1-1, \quad z_1+9,$$

on trouve, pour sa décomposition en deux facteurs rationnels du second degré

$$(z^2 + pz)(z^2 + rz + s),$$

trois systèmes de valeurs pour p, r, s, savoir :

$$\begin{array}{lll} p = -9, & r = 8, & s = -9, \\ p = -1, & r = 0, & s = -81, \\ p = 9, & r = -10, & s = 9. \end{array}$$

Or, comme aucun de ces systèmes ne rend la quantité $s(p^2 - pr + s)$ égale à un carré parfait, on cherchera l'intégrale

$$\int \frac{z_1 + 6B - 3}{\sqrt{z_1^4 - z_1^3 - 81 z_1^2 + 81 z_1}} dz$$

par le 3°. Mais, en passant à la détermination des nombres

$$\begin{array}{l} l_0,\ m_0,\ n_0, \\ l_1,\ m_1,\ n_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

d'après les formules (3), on devra s'arrêter sur l_1, en remarquant qu'il résulte pour lui une valeur fractionnaire

$$1 - \frac{(1 + 4.81)^2}{-2 - 8.1.81 + 16.81} = -\frac{104979}{646};$$

de là on conclura tout de suite que l'intégrale

$$\int \frac{z_1 + 6B - 3}{\sqrt{z_1^4 + z_1^3 - 81 z_1^2 + 81 z_1}} dz_1,$$

et conséquemment celle en question

$$\int \frac{z + B}{\sqrt{z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z}} dz,$$

est inexprimable en termes finis, quelle que soit la valeur de la constante B.