

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. WOEPCKE

**Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits
de manuscrits arabes inédits et traduits**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 9 (1864), p. 337-383.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9_337_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

PASSAGES RELATIFS
A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES

EXTRAITS
DE MANUSCRITS ARABES INÉDITS

ET TRADUITS

PAR M. F. WOEPCKE [*].

S'il est important d'examiner et de décrire le développement de l'ensemble des sciences mathématiques chez une nation déterminée, ou à une époque particulière, une tâche non moins intéressante, ni moins utile pour l'histoire des mathématiques, consiste à suivre à travers les temps et les peuples certains problèmes qui reparaissent, pour ainsi dire, partout où l'esprit humain s'est occupé de mathématiques.

Ces questions et ces théories se reproduisent et se continuent comme un fil non interrompu, fil d'Ariane qui, retrouvé et renoué par des investigations persévérantes, permet de découvrir le chemin que les sciences exactes ont suivi depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours, et qui révèle la marche de ces communications par lesquelles plusieurs fois la science, menaçant de s'éteindre entre les mains d'une race épuisée, a été transmise à d'autres parties du genre humain destinées à conserver les connaissances acquises et à les augmenter par de nouveaux progrès.

[*] Nous empruntons ce Mémoire aux *Annali di Matematica pura ed applicata* imprimées à Rome. Il sort un peu du cercle de nos publications ordinaires ; mais nous profitons de cette occasion pour rendre hommage à la mémoire de notre bien regretté collaborateur, M. Wœpcke, que la mort a cruellement frappé dans sa trente-septième année, au moment où son talent, mûri par de longues et fortes études, semblait lui promettre le plus bel avenir.

(J. L.)

L'ingénieuse idée que j'ai tâché de formuler dans les lignes qui précèdent appartient à M. le prince Boncompagni, que ses importants travaux sur l'histoire des mathématiques, et les recherches vraiment immenses servant de base à ces travaux, ont admirablement préparé à choisir avec sûreté les sujets les plus propres de ce nouveau genre d'études historiques.

M. le prince Boncompagni m'a fait l'honneur de me faire part de ces projets et de m'inviter à rechercher, pour quelques-uns des problèmes dont il s'agit, les traces que je pourrais en découvrir dans des manuscrits orientaux inexplorés jusqu'à présent.

Les pages qui suivent présentent les résultats de l'examen auquel j'ai soumis, relativement à un de ces problèmes, une partie des manuscrits orientaux de la Bibliothèque impériale de Paris.

J'ai traduit la première et la dernière page de chacun des traités dans lesquels j'ai remarqué des passages relatifs à ce problème, ainsi que toutes les pages contenant ces passages.

*Manuscrit coté $\frac{951}{2}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque
impériale de Paris.*

Volume in-4 de 132 feuillets en papier dont le premier et les deux derniers sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les 129 autres sont numérotés avec deux numérations consécutives dont la première va de 1 à 71, et la seconde de 1 à 58.

Feuille 1, v^o l. 1 à 69, v^o l. 14 de la première numération : Commentaire du *Talkhîs* ou « Exposé des opérations du calcul », Traité d'arithmétique pratique d'Ibn Albannâ, mathématicien et astronome qui florissait au Maroc dans la première moitié du XIII^e siècle, par Alkalaçâdi, mathématicien arabe-espagnol, mort en 1486 de J.-C. La copie est datée du 29 ramadhân 1229 de l'hégire, ou 14 septembre 1814 de J.-C.

Feuille 69, v^o l. 15 à 71, v^o l. 7 de la première numération : Morceau relatif à quelques questions chronologiques par Abou Zaïd Abdalrahmân Ibn Omar Al'okâilî Alçoûneci.

Feuille 1, r^o l. 1 à 58, v^o l. 24 de la seconde numération : Autre commentaire, sans nom d'auteur, du *Talkîs* d'Ibn Albannâ.

Comparer sur ce Manuscrit le *Journal asiatique*, cahier de février-mars 1862, p. 105, l. 18, à p. 107, ligne dernière.

Les numéros des feuillets marqués en marge des p. 339 à 349 de la traduction ci-après se rapportent à la première des deux numérations du manuscrit.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut divins soient sur notre Seigneur Mohammed ! F. 1, v^o.

Le serviteur du Dieu très-haut, celui qui a besoin de son pardon, Ali Ben Mohammed Ibn Mohammed Ben Ali le Koraïchite Alandalouci Albasthi, connu sous le nom d'Alkalaçâdi, que Dieu très-haut soit miséricordieux envers lui, amen, amen, amen, dit :

Louange à Dieu qui a créé l'homme par sa grâce, et qui l'a fait exister pour ce qui a été résolu et décrété par la volonté de ses jugements et de sa puissance. Que la bénédiction et le salut divins soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

Pour en venir au fait. Le but que se propose (le présent ouvrage) est l'explication de « *L'exposé des opérations du calcul* » du chaïklî, du très-savant imâm, Ahmed, surnommé le fils de l'architecte (Ibn Albannâ), l'habitant de Maroc, puisse-t-il être agréable à Dieu, et puisse Dieu le rendre content. L'intention de (l'auteur) est que cette introduction forme le commencement du travail qu'il se propose d'entreprendre dans cet ouvrage, et qu'il indique dans le contenu de cette

(introduction) ce qu'ont mentionné les anciens relativement à celui qui écrit un ouvrage sur une science, à savoir qu'il faut qu'il y fasse attention aux huit points capitaux suivants : le but, l'utilité, le caractère, la méthode de l'enseignement, l'ordre, le nom de l'auteur, la justesse et la division.

L'auteur, que Dieu soit miséricordieux envers lui, a réuni implicitement ces huit points dans cette introduction, ainsi qu'il l'a exprimé dans certains vers que voici :

Je me suis appliqué à être concis dans mon exposé,
Parce que je connais les différentes parties de la science et parce
que je sais abréger.
Je ne crains pas qu'on m'entende mal en prêtant à ce que je dis
des sens différents de celui que j'ai voulu exprimer,
Et je ne cherche rien au delà de ce qui est suffisant pour moi.
Cependant je crains le blâme des grands hommes,
Et certainement les savants accomplis sont en droit de suivre
une autre voie,
Mais le devoir de la chamelle est d'enseigner les petits [*].

L'auteur dit : *Le but* [**], c'est-à-dire l'objet, *dans cet ouvrage*, c'est-à-dire cet écrit, *est de donner un exposé fait avec choix*, c'est-à-dire un exposé élégant et concis, *des opérations du calcul, de faire comprendre promptement ses règles*, c'est-à-dire de rendre les règles de l'ouvrage facilement accessibles, *ainsi que le sens des théories*, au moyen des problèmes placés chacun dans le chapitre de la règle qui le concerne et qui lui convient, *et de présenter dans un ordre sévère*

[*] Le texte de ces vers que présente ici le manuscrit me paraît très-corrompu ; en outre, la première partie du manuscrit (fol. 1 à 71 de la première numération) est d'une fort mauvaise écriture. Les mêmes vers sont reproduits avec certaines variantes, et sous une forme plus correcte, au folio 1^o de la seconde numération.

[**] Les mots imprimés en italique forment la traduction des parties du texte de l'ouvrage commenté, intercalées au milieu du commentaire et écrites, dans le manuscrit arabe, à l'encre rouge. J'ai aussi mis en italique quelques passages qui ne sont pas écrits à l'encre rouge dans le manuscrit, mais qui font cependant partie du texte commenté, ainsi que je l'ai reconnu par un examen du second commentaire du *Talkhîs*, contenu dans ce manuscrit, et d'un troisième commentaire contenu dans le manuscrit ^{no 3} du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

les bases et le système de cet art. Il comprend deux parties, c'est-à-dire cet ouvrage (comprend deux parties), dont la première traite des opérations du nombre connu, en fait d'entiers, de fractions et de racines, tandis que la seconde traite des règles au moyen desquelles il est possible d'arriver à la connaissance de la grandeur de l'inconnue qui est cherchée, en partant des quantités connues et données, c'est-à-dire au moyen desquelles il est possible de déterminer l'inconnue, ainsi qu'il sera expliqué plus tard, si Dieu le permet, dans la seconde partie de l'ouvrage. (Cette seconde partie traite) de la manière d'opérer avec les proportions et avec les plateaux de balance [], de l'algèbre, et de ce qui se rattache à cela. Comme si l'on vous dit : on additionne le tiers et le quart d'une quantité, et cela fait tant; ou l'on additionne le tiers et le quart et le cinquième d'une quantité, et cela fait tant; combien est cette quantité? L'auteur dit (que cette détermination de l'inconnue par les connues est possible) lorsqu'il existe entre l'une et les autres une relation qui détermine cette (dépendance). Cette relation | est le rapport qui existe entre les nombres, etc.*

Fin
du l. 1, 3^o.
F. S, 2^o.

Si l'on vous dit : combien est la somme de huit nombres dont le plus petit est deux, et qui se dépassent mutuellement de quatre? | Alors multipliez l'excès par le nombre des nombres (termes) moins un, ce qui donne vingt-huit. Ajoutez-y le deux, ce sera trente, ce qui est le plus grand (des nombres). Ensuite ajoutez au trente le premier nombre, ce qui fait trente-deux. Multipliez cela par quatre, la moitié du nombre des nombres. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir cent vingt-huit. En voici la figure, et Dieu seul connaît la vérité.

∴ 2 ∴ 6 ∴ 10 ∴ 14 ∴ 18 ∴ 22 ∴ 26 ∴ 30 ∴

L'auteur dit : *Quant à la sommation des nombres suivant l'ordre, elle consiste à multiplier la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend par le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend plus l'unité.* Ceci est la troisième espèce de l'addition, et d'après ce que l'auteur dit, l'opération est claire. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez

[*] Ce nom désigne la règle des deux fausses positions.

depuis un jusqu'à dix suivant l'ordre naturel des nombres, alors ajoutez un au dix, ce sera onze. Multipliez cela par la moitié du dix, vous aurez pour résultat cinquante-cinq, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis un jusqu'à dix-huit, alors ajoutez un au dix-huit, ce sera dix-neuf. Multipliez cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir par neuf. Vous aurez pour résultat cent soixante-onze, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend plus un tiers d'une unité, par la somme (des nombres simples)*. Cela veut dire l'élévation au carré de l'addition des nombres suivant l'ordre, ce qui deviendra plus clair par notre exemple. Si l'on vous dit : additionnez à partir du carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors l'opération dans ce (problème) consiste à prendre deux tiers du dix, ce qui fait six et deux tiers, et à ajouter à cela un tiers d'une unité, de sorte que la somme sera sept. Multipliez cela par la somme (des nombres simples), à savoir par cinquante-cinq; vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois cent quatre-vingt-cinq.

F. 8, 1^o,
lig. 19.

L'auteur dit [*] : *Et l'élévation au cube (se fait) par l'élévation au carré de la somme [**]*. Cette somme veut dire celle qui résulte de l'addition des nombres (simples) suivant l'ordre. Et le cube signifie, d'après ce qui a été expliqué, le produit de la multiplication d'un nombre par lui-même et puis du résultat par sa racine. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez à partir du cube de l'unité jusqu'au cube de dix, alors élevez au carré la somme (des nombres simples), à savoir cinquante-cinq. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois mille vingt-cinq, ainsi : 3025.

F. 8, 1^o,
lig. 24.

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du (nombre) jusqu'au-*

[*] Je rappelle que « l'auteur » de l'ouvrage commenté est Ibn Albannâ. La règle pour la sommation des cubes, qui suit ici, appartient donc à Ibn Albannâ, contemporain de Léonard de Pise.

[**] C'est-à-dire

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n}{2} (n + 1) \right]^2.$$

quel (la suite) s'étend joint à l'unité. Ceci est la quatrième espèce (de l'addition), et c'est la plus facile de ces espèces. La manière de l'effectuer est claire, d'après ce que l'auteur a expliqué. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf (en prenant) | F. 8, v^o.
les nombres impairs suivant l'ordre, alors ajoutez l'unité au neuf, ce qui fait dix. Élevez-en la moitié, à savoir cinq, au carré. Il résultera vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à vingt-trois, alors additionnez l'unité au vingt-trois, ce qui fait vingt-quatre. Élevez au carré la moitié de cela, à savoir douze. Vous aurez pour résultat cent quarante-quatre, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* C'est-à-dire l'élévation au carré de tous les nombres impairs. Et « le rectangle » est le produit d'un nombre par un (autre) nombre. L'auteur dit « par après » par précaution, afin qu'on ne s'imagine pas qu'il s'agit du produit des deux nombres qui précèdent le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. L'éclaircissement de cela se trouvera dans notre exemple. Si l'on vous dit : additionnez à partir du carré de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors prenez un sixième du neuf, ce qui est un et demi. Formez le rectangle des deux nombres qui suivent le neuf, à savoir du dix et du onze. Leur rectangle est cent dix. Multipliez cela par le un et demi. Il résultera cent soixante-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double moins un [*].* Cette élévation au cube (doit s'entendre de) l'addition des nombres impairs. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors vous savez déjà que la somme (des impairs simples) est vingt-cinq, et le double de cela moins un est quarante-neuf. Par conséquent, multipliez le vingt-cinq par le quarante-neuf. Vous aurez pour résultat

[*] C'est-à-dire

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

F. 8, v^o,
fig. 18.

mille deux cent vingt-cinq, ainsi : 1225. | Règle fondamentale. Si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité, suivant l'ordre des nombres impairs, jusqu'à un nombre inconnu, et le résultat sera tant; alors multipliez ce résultat par huit, et additionnez au produit une unité. Prenez la racine de la somme, et ajoutez à la racine de nouveau une unité. Prenez la racine de ce résultat et retranchez-en une unité. Ce qui provient est le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend [*]. Par exemple, si l'on vous dit : on a additionné depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un certain nombre, suivant l'ordre des nombres impairs, et le résultat a été mille neuf cent quatre-vingt-dix [**]. Alors multipliez cette somme par huit, et ajoutez au produit une unité. Vous aurez en somme cent cinquante-neuf mille deux cent et un. Prenez-en la racine, qui est trois cent quatre-vingt-dix-neuf. Ajoutez à cela une unité, ce sera quatre cents. Prenez-en la racine, qui est vingt, et retranchez-en l'unité. Vous aurez pour reste | dix-neuf, ce qui est le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend. La manière d'exécuter cette opération se présentera encore, si Dieu le permet, dans le problème du château [***], traitée au moyen de l'algèbre. |

F. 9, r^o.

F. 9, r^o,
fig. 2.

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.* Ceci est la cinquième espèce de l'addition. Et l'opération, d'après ce que l'auteur a dit, est

[*] C'est-à-dire, si

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + x^3 = k,$$

on aura

$$\sqrt{\sqrt{k \cdot 8 + 1 + 1} - 1} = x.$$

[**] C'est ainsi que porte le manuscrit. Mais cette leçon est fausse; il faut lire : dix-neuf mille neuf cents, c'est-à-dire 19900 au lieu de 1990.

[***] Le mot que je traduis ici par « château » signifie aussi « selle. » Or, l'ouvrage d'Ibn Albannâ, commenté ici par Alkalahâdî, était un abrégé d'un ouvrage appelé « La petite selle » (voir *Journal asiatique*, cahier d'octobre-novembre 1854, p. 371, l. 1 à 7). Il est donc possible que Alkalahâdî fasse ici allusion à un problème contenu dans ce dernier ouvrage, de sorte qu'il faudrait traduire : « dans le problème proposé dans » (l'ouvrage intitulé) *La petite selle.* »

claire. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à dix, alors ajoutez au dix deux, ce qui fait douze. La moitié de cela, à savoir six, multipliée par la moitié du dix, donne trente, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à vingt-deux, alors ajoutez au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, deux, ce qui fait vingt-quatre. Multipliez cela [*] par la moitié du vingt-deux. Vous aurez pour résultat cent trente-deux, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élevation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples)*. C'est-à-dire l'élevation au carré des nombres pairs. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze. Alors vous savez, en vertu de ce qui précède, que la somme (des pairs simples) est quarante-deux. Réservez cela. Ensuite prenez deux tiers de douze, ce qui est huit, et ajoutez-y deux tiers, ce qui fait huit et deux tiers. Multipliez cela par le quarante-deux. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois cent soixante-quatre.

L'auteur dit : *Ou multipliez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après*. Ceci est une seconde manière de l'élevation au carré des nombres pairs. Son éclaircissement, au moyen de notre exemple, consiste en ce que vous multipliez le sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir de douze, par le rectangle compris sous treize et quatorze, à savoir sous quatre-vingt-deux. Ce (produit) sera la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élevation au cube (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double [**]*. Ceci est l'élevation au cube en additionnant les nombres pairs. La somme est dans notre exemple quarante-deux, et son double est quatre-vingt-quatre. Si l'on en fait le rectangle, le produit est trois mille cinq cent vingt-huit, ce qui est la quantité cherchée.]

F. 9, 1^o,
fig. 20.

F. 9, 1^o,
fig. 23.

[*] C'est ainsi que porte le manuscrit. Il faut lire : multipliez la moitié de cela.

[**] C'est-à-dire

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2 [n(n+1)]^2.$$

Remarque additionnelle, relative au cas où l'on vous dit : additionnez à partir d'un nombre qui n'est pas un, ou qui n'est pas deux, d'une manière semblable à ces additions (qui précèdent). L'opération en ce cas consiste à faire d'abord l'addition à partir de l'unité ou à partir du deux, et à retrancher ensuite de la somme ce qui résulte de (l'addition faite jusqu'au nombre) proposé dans le problème (comme commencement de la suite). L'auteur n'a pas signalé ce (cas) dans le présent ouvrage, mais il l'a signalé dans les discours [*]. Par exemple si | l'on vous dit : additionnez depuis cinq jusqu'à seize suivant l'ordre naturel des nombres, alors additionnez d'abord depuis l'unité jusqu'au seize, d'après ce qui précède. Vous aurez pour résultat trente-six. Réservez cela. Ensuite retranchez du cinq une unité. Il reste quatre. Additionnez depuis un jusqu'à quatre, vous aurez pour somme dix. Retranchez cela du (nombre) réservé, vous aurez pour reste cent vingt-six, et telle est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis six jusqu'à quatorze en prenant les nombres pairs suivant l'ordre, alors additionnez d'abord deux jusqu'à quatorze. Ce sera cinquante-six. Réservez cela. Ensuite retranchez du six deux, il vous restera quatre. Additionnez depuis deux jusqu'à quatre, ce sera six. Retranchez cela du (nombre) réservé. Vous aurez pour reste cinquante, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis sept jusqu'à onze en prenant les nombres impairs suivant l'ordre, alors additionnez d'abord depuis un jusqu'à onze, ce qui fait trente-six. Ensuite retranchez deux de sept. Il reste cinq. Additionnez depuis un jusqu'à cinq, ce sera neuf. Retranchez cela du (nombre) réservé. Il reste vingt-sept, ce qui est la quantité cherchée. Et vous réglerez d'une manière analogue l'opération pour l'élévation au carré et pour l'élévation au cube [**].

F. 9, v^o.F. 9, v^o,
fig. 14.

[*] Cela peut signifier que l'auteur, Ibn Albanná, a exposé ces règles verbalement, ou qu'il les a exposées dans un ouvrage intitulé « les Discours, » c'est-à-dire en « livres. »

[**] Ceci comprend la sommation des séries :

$$\begin{aligned} & m^3 + (m + 1)^3 + (m + 2)^3 + \dots + (m + n)^3, \\ & (2m)^3 + (2m + 2)^3 + (2m + 4)^3 + \dots + (2m + 2n)^3, \\ & (2m + 1)^3 + (2m + 3)^3 + (2m + 5)^3 + \dots + (2m + 2n + 1)^3. \end{aligned}$$

TROISIÈME CHAPITRE.

DE LA SOUSTRACTION.

L'auteur dit : *La soustraction est la recherche de ce qui reste après qu'on a retranché l'un de deux nombres de l'autre.* Ceci s'applique à l'exécution écrite de la soustraction. Dans certains de ses ouvrages (Ibn Albannâ) a dit que la signification de la soustraction consiste à faire connaître la différence entre deux nombres différents par rapport à la quantité, dont l'un est plus petit et l'autre plus grand. Il n'a pas rencontré la vraie définition de cette (opération) dans le « Soulèvement du rideau » [*]. Le plus convenable est de dire que la soustraction est la recherche de la différence entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand. L'auteur dit : *Elle (se fait) de deux manières. L'une consiste à retrancher le plus petit du plus grand une seule fois.* C'est celle par laquelle on commencera dans le présent chapitre; comme si l'on vous dit : retranchez treize de trente-sept [**]. Alors vous direz : le reste est vingt-quatre. L'auteur dit : *L'autre espèce consiste à retrancher le plus petit du plus grand plus d'une seule fois.* Ceci est le chapitre de la preuve [***], ainsi qu'il sera exposé plus tard, si Dieu le permet. Comme si l'on vous dit : retranchez du trente-cinq (constamment) sept [****]. Ou bien, il en restera un excédant, comme (si vous prenez) quarante et un [*****]. L'auteur dit : *Pour la première espèce, il faut placer (le nombre) dont on retranche*

[*] Cet ouvrage d'Ibn Albannâ est mentionné dans le passage d'Ibn Khaldoun dont le texte et la traduction se trouvent dans le cahier d'octobre-novembre 1854 du *Journal asiatique*, p. 370 et suiv.

[**] Le texte du manuscrit porte par erreur *six* au lieu de *sept*.

[***] C'est l'opération décrite dans le 5^e chapitre de la première partie de l'*Arithmétique* d'Alkalaçâdî, p. 252 à 255 des *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, anno XII.

[****] Le copiste paraît ici avoir oublié quelques mots exprimant à peu près ceci : « et dans cet exemple il ne vous restera aucun excédant. »

[*****] En effet, si l'on retranche de 41 autant de fois 7 qu'il est possible, il reste l'excédant 6.

dans une ligne, et au-dessous le nombre qu'il s'agit de retrancher, de la même manière comme dans l'addition; puis il faut retrancher chaque place (c'est-à-dire chaque chiffre) de celui qui lui correspond, | s'il y en a un qui lui correspond [].*

F. 10, r^o. ... Vous aurez pour résultat [**] deux cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le nombre déficient. Il a comme parties : une moitié, à savoir cent quarante-deux ; un quart, à savoir soixante et onze ; un soixante et onzième, à savoir quatre ; la moitié de la (fraction précédente), à savoir deux ; et la moitié de celle-ci, à savoir | un. La somme de ces parties est deux cent vingt, ce qui est le nombre excédant. Celui-ci a comme parties : une moitié, à savoir cent dix ; un quart, à savoir cinquante-cinq ; un cinquième, à savoir quarante-quatre ; un dixième, à savoir vingt-deux ; une moitié de dixième, à savoir onze ; puis en fait de fractions non articulées [***] : un onzième, à savoir vingt ; et la moitié de cela, à savoir dix ; et le quart de cela, à savoir cinq ; et le cinquième (du onzième), à savoir quatre ; et le dixième (du onzième), à savoir deux ; et la moitié du dixième (du onzième), à savoir un. La somme de ces parties est deux cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le nombre déficient. Ces deux nombres sont les nombres amiables les plus petits qu'il soit possible de trouver.

Ceci est la fin de ce que je me suis proposé (de dire) sur cette matière.

Louange à Dieu, le Maître de l'Univers. Que sa bénédiction soit sur notre Seigneur Mohammed, le dernier et le plus parfait des prophètes, le prince des apôtres, et sur sa famille et ses compagnons. Que le salut divin soit répandu sur eux avec profusion jusqu'au jour de la résurrection.

[*] C'est-à-dire si le chiffre correspondant du nombre dont on retranche n'est pas zéro.

[**] Alkalaçâdî termine son commentaire en montrant la manière de trouver les deux nombres amiables 220 et 284 ; ces nombres jouissent de la propriété que la somme des diviseurs du premier est égale au second, et réciproquement.

[***] Ce sont les fractions qui ne peuvent pas s'énoncer au moyen des mots : une moitié, un tiers, un quart, etc., jusqu'à un dixième inclusivement, ni par la combinaison de ces mots.

Louange à Dieu, le Maître de l'Univers, de la part de celui qui a écrit (cette copie), et qui a besoin (de la miséricorde) de son Seigneur qui pardonne à son esclave (à savoir) Al-hâdjdj Imâd Alfihri, puisse Dieu accorder son pardon à lui, à ses parents, aux docteurs (qui l'ont instruit), et aux docteurs de ses docteurs, jusqu'au jour de la résurrection.

(Terminé) à l'aurore du vingt-neuvième jour du mois sacré du ramadhân de l'année mil deux cent vingt-neuf [*]. Fin. |

F. 69, v^o,
fig. 14.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

Le serviteur qui a la conscience de ne pouvoir satisfaire à la justice de son Seigneur, l'illustre et lettré jurisconsulte Aboû Zaïd Abdalrahmân Ibn Omar Al'okâïli Alçoûneci, que Dieu veuille agir avec lui selon sa grâce et sa générosité, dit :

Louange à Dieu pour avoir rendu nombreux ses bienfaits et ses élus. Grâce à Dieu, pour les bienfaits abondants de son indulgence et de ses dons. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre Seigneur Mohammed, qui est la meilleure de ses créatures, et le dernier et le plus parfait de ses prophètes, et sur sa famille et ses compagnons, qui ont eu la bonne fortune d'embrasser sa cause et de la suivre.

Pour en venir au fait. Ceci est (un travail) qui fournit des explications faciles, intercalées entre les paroles du (traité intitulé) Al-yaçârah (« L'aisance. ») Je l'offre comme un commentaire de ses paroles et de ses sens cachés, et comme un éclaircissement de ses fondements et de ses développements. Afin que ce soit un secours pour celui qui désire le comprendre, et un guide pour celui qui cherche à connaître l'explication de sa science. Et quoique ce traité soit extrêmement concis et abrégé, il n'en embrasse pas moins une branche | de la science qui est d'une grande étendue.

F. 70, r^o.

[*] Cette date correspond au 14 septembre 1814 de notre ère. Le manuscrit est donc très-moderne.

Manuscrit coté 951₃ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

Volume in-4 de 174 feuillets en papier dont le premier et le dernier sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les autres feuillets sont numérotés au crayon avec les nombres 1 à 172.

Feuille 1, v^o l. 1 à 74, r^o l. 20 de la numération écrite au crayon : Commentaire du *Talks* ou « Exposé des opérations du calcul » d'Ibn Albannâ, sans nom d'auteur.

Feuille 77, v^o l. 1 à 122, r^o l. 26 de la numération écrite au crayon : Commentaire sur « l'Abrégé de la science du calcul » d'Abdoulkâdir Alçakbâwi le châféite, par Hoçâin Ben Mohammed Almahallî le châféite.

Feuille 123, v^o l. 1 à 172, r^o l. 15 de la numération écrite au crayon : Traité d'arithmétique pratique intitulé : « Soulèvement du vêtement de la science du calcul » par Alkalâçâdî. La copie de ce traité paraît avoir été achevée le 24 chawwâl 1143 de l'hégire, ou 2 mai 1731 de J.-C.

Comparer sur ce manuscrit le *Journal asiatique*, cahier de février-mars 1862, p. 108, l. 1, à p. 112, l. 7.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 350 à 362 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon.

F. 1, v^o. Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction divine soit sur notre Seigneur et maître Mohammed et sur toute sa famille!

Louange à Dieu, Maître de l'Univers, que sa bénédiction et son salut soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et tous ses compagnons.

Pour en venir au fait. L'objet de cet ouvrage est de donner un exposé fait avec choix des opérations du calcul, un aperçu succinct de ses règles, et un arrangement, d'après un ordre sévère, de ses fondements. Il comprend deux parties. La première partie traite des opérations du nombre connu. La seconde partie traite des règles au moyen desquelles il est possible d'arriver à ce qui est inconnu et cherché en partant de ce qui est connu et donné, s'il existe entre les deux choses une relation qui rend cela nécessaire.

PREMIÈRE PARTIE.

DES OPÉRATIONS DU NOMBRE CONNU.

Cette partie est divisée en trois divisions. La première division traite

des opérations du nombre entier. La seconde division traite des opérations des fractions. La troisième division traite des opérations des racines.

PREMIÈRE DIVISION.

DES OPÉRATIONS DU NOMBRE ENTIER.

Cette division se partage, convenablement à son but, en six chapitres, dont le premier traite des divisions du nombre et de ses ordres.

PREMIER CHAPITRE.

Le nombre est ce qui est composé d'unités. Par conséquent l'un n'est pas appelé nombre, parce qu'il n'est pas composé d'unités. On dit aussi : le nombre est une réunion de monades [*].

Tel est tout nombre, comme le cinq, le dix, le cent, le mille.

Le nombre est divisé en pair et impair.

Le pair est celui qui se laisse diviser en deux parties égales. Tels sont tous les nombres dans la première place desquels il se trouve un nombre pair, comme deux, quatre, six, huit, ou dans la première place desquels il n'y a point d'unités. Le nombre impair ne jouit point de ces propriétés.

On dit aussi : le nombre pair est celui qui se laisse diviser en deux parties égales, ou en deux parties inégales, l'une étant plus grande et l'autre plus petite, pourvu qu'il soit plus grand que deux [**].

Si le nombre pair est divisé en deux parties égales, et que l'une d'elles est paire, l'autre partie est (pareillement) paire ; et si (l'une des parties) est impaire, l'autre partie est (aussi) impaire. Et s'il est divisé en deux parties inégales, chacune de ces deux parties est (ou bien) impaire (ou paire). Par exemple, le huit se divise en deux nombres pairs, quatre et quatre, qui sont égaux ; et se divise (aussi) en cinq et trois qui sont inégaux, et chacune de ces deux (dernières parties) est impaire.

[*] Le mot employé ici est différent du terme ordinaire pour « unité, » employé par exemple 1, 2, 3 et 9 de la présente page. Le dictionnaire le traduit par « unitas, singularitas. »

[**] Le deux se divise seulement en deux parties égales, 1 et 1.

Si le nombre pair est divisé en deux parties inégales, chacune de ces deux parties se laisse diviser [*] en deux parties inégales. Ainsi le cinq et le trois sont inégaux, et pareillement les parties de ces deux nombres sont inégales.

F. 2, 1^o. Quant au (nombre) impair, | c'est celui dont les parties, etc.

F. 7, 1^o. . . vous ajoutez | constamment un demi, et vous multipliez la somme par la quantité réservée. Alors ce qui résulte est la réponse. Par exemple, si l'on dit : additionnez depuis cinq jusqu'à dix-neuf suivant l'ordre des nombres (naturels), alors vous joignez le cinq au dix-neuf, ce qui fait vingt-quatre, et vous réservez cela. Ensuite retranchez le premier des nombres, à savoir cinq, du plus grand des nombres, à savoir dix-neuf. Il reste quatorze. Prenez-en la moitié, qui est sept. Ajoutez-y la moitié d'une unité ; ce sera sept et demi. Multipliez cela par le nombre réservé, à savoir par vingt-quatre. Le résultat sera cent quatre-vingts, ce qui est la réponse.

Et si l'on dit [**] ; additionnez depuis l'unité jusqu'à dix suivant l'ordre des nombres élevés au carré, ce qui signifie que vous multipliez chacun des dix nombres par lui-même, et que vous additionnez les résultats ; alors la méthode pour cela consiste à additionner les nombres suivant leur ordre, d'après la méthode précédente, et à réserver la (somme). Ensuite vous prenez deux tiers du dernier nombre, ce qui est six et deux tiers, et vous y ajoutez un tiers de l'unité. Il résulte sept, ce que vous multipliez par le (nombre) réservé, à savoir cinquante-cinq. Le résultat sera 385, et telle est la réponse.

F. 7, 1^o,
lig. 11.

Et si l'on dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à dix suivant l'ordre

[*] Le texte ajoute « seulement, » ce qui est faux. Car, par exemple, $12 = 8 + 4$, et 8 est divisible en 4 et 4 qui sont égaux.

[**] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres élevés au carré, l'opération consiste à additionner les nombres suivant leur ordre d'après ce qui précède, et à multiplier le résultat par deux tiers du dernier (nombre), augmentés constamment d'un tiers. Le résultat sera la réponse. Comme (si vous avez) quatre nombres carrés à partir de l'unité, alors multipliez 10 par 3, ce qui est deux tiers du quatre augmentés de $\frac{1}{3}$. Et (pour) les cubes (l'opération consiste) à additionner les (nombres simples) suivant l'ordre de la même manière, et à élever le résultat au carré. Ce sera la réponse.

des cubes, ce qui signifie que vous multipliez chacun des dix nombres par lui-même, que vous multipliez le résultat par son côté, et que vous additionnez les résultats ; alors la méthode pour cela consiste à additionner depuis un jusqu'à dix suivant l'ordre des nombres, d'après la méthode qui précède. La somme sera cinquante-cinq. Ensuite vous élevez au carré ces cinquante-cinq en les multipliant par eux-mêmes. Le résultat sera 3025, ce qui est la réponse.

F. 7, v^o,
fig. 16.

La quatrième espèce (de l'addition) [*] est l'addition suivant l'ordre des nombres impairs ; cela signifie que vous additionnez les impairs tels qu'ils se suivent dans l'ordre naturel. La méthode pour cela consiste à ajouter au dernier nombre, qui est le plus grand des (nombres), constamment une unité, à prendre la moitié de la somme, et à l'élever au carré en la multipliant par elle-même. Alors ce qui résulte est la réponse.

Par exemple, si l'on dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, suivant l'ordre des impairs, c'est-à-dire l'unité, le trois, le cinq, le sept, et le neuf ; alors la méthode pour cela consiste à ajouter au dernier nombre une unité, à prendre un quart de la somme, et à le multiplier par la somme ; ou à prendre le nombre des ordres des impairs

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Quant à l'addition suivant l'ordre des impairs, l'opération consiste à ajouter au dernier (nombre) constamment un, et à élever au carré la moitié du résultat. Ce sera la réponse. Comme (si vous avez) quatre nombres à partir de l'unité, le résultat sera 16. Et (pour trouver la somme des impairs) suivant leur ordre en les élevant au carré, (l'opération consiste) à multiplier les deux nombres qui viennent après le dernier (nombre) dans l'ordre naturel, et à multiplier le résultat par un sixième du dernier (nombre). Comme (si l'on additionne) depuis 1 jusqu'à 7 en élevant au carré, le résultat est 84. Et (pour additionner les impairs) en les élevant au cube (la méthode consiste) à additionner suivant l'ordre des impairs, à doubler le résultat, à retrancher du double un, et à multiplier le résultat par le (nombre qu'on avait) doublé*. Et si l'on dit : additionnez quatre cases à partir de 1, suivant l'ordre des impairs, alors élevez au carré le nombre des cases, ce sera la réponse. Vous apprenez par là que la racine (carrée) du résultat est le nombre des cases.

* C'est-à-dire

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n-1)^3 \\ = \left\{ 2[1+3+5+7+\dots+(2n-1)] - 1 \right\} \cdot [1+3+5+7+\dots+(2n-1)].$$

que vous avez, et à multiplier ce nombre par lui-même. Donc, si vous voulez, ajoutez au neuf une unité; ce sera dix. Prenez-en la moitié, qui est cinq, et multipliez cela par lui-même. Ce sera vingt-cinq, et telle est la réponse.

F. 8, r^o. Et si l'on dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, suivant l'ordre des impairs, en les élevant au carré, ce qui signifie que | chacun de ces impairs doit être multiplié par lui-même; alors la méthode pour cela consiste à former le rectangle des deux nombres qui avoisinent le plus grand des impairs par après, donc à en multiplier l'un par l'autre. Ensuite multipliez ce qui résulte, par un sixième du plus grand impair. Le résultat sera la réponse.

Par exemple, si l'on dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf suivant l'ordre des impairs, en les élevant au carré; alors multipliez les deux nombres qui avoisinent le neuf par après, à savoir le dix et le onze, l'un par l'autre; ce sera cent dix. Ensuite multipliez ce cent dix par un sixième du neuf, à savoir par un et demi. Il résultera cent soixante-cinq, ce qui est la réponse.

F. 8, r^o,
fig. 7. Et si l'on dit : additionnez depuis un jusqu'à neuf suivant l'ordre des impairs, en les élevant au cube, alors faites la somme suivant l'ordre des impairs, sans les élever au cube, ainsi qu'il précède. Ce sera vingt-cinq. Réservez cela. Ensuite doublez-le, ce sera cinquante. Retranchez une unité du cinquante; il reste quarante-neuf. Multipliez cela par le (nombre) réservé, qui est vingt-cinq. Il résulte 1225, ce qui est la réponse.

F. 8, r^o,
fig. 11. Et si l'on dit : additionnez jusqu'à la dixième case suivant l'ordre des impairs, en sous-entendant que dans la première case soit l'unité, dans la seconde trois, et ainsi de suite suivant l'ordre des nombres impairs jusqu'à la dixième case; alors la méthode pour cela consiste à multiplier le nombre des cases par lui-même. Ce qui en résulte sera la réponse. Dans le cas actuel cela est cent.

Vous apprenez par là que, si vous avez un nombre, et que vous désirez savoir combien il contient d'impairs séparément, vous devez en prendre la racine. Ce qui résulte est le nombre des impairs contenus dans le (nombre proposé), si le commencement des (nombres impairs) est un.

Section. Si l'on vous dit : (étant proposé) le nombre cent, (com-

bien) y est-il contenu de nombres impairs se succédant suivant l'ordre en commençant par l'unité? alors la méthode pour cela consiste à prendre la racine du nombre, à savoir de cent, qui est dix; et ce nombre (indique) combien il y a dans cent de nombres impairs suivant l'ordre en commençant par l'unité. Ce sont

$$1.3.5.7.9.11.13.15.17.19,$$

et ce sont dix impairs, (dix) étant le nombre de la racine du cent qui est leur somme.

La cinquième espèce (de l'addition) [*] est l'addition suivant l'ordre des (nombres) pairs, ce qui signifie que vous additionnez les pairs tels qu'ils se suivent dans l'ordre naturel, à savoir deux, quatre, six, huit, dix, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. La méthode pour cela consiste à ajouter au (nombre) pair jusqu'auquel (la suite) s'étend [deux], et à multiplier un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend augmenté de deux. Ce qui résulte est la réponse.

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Et (pour additionner les nombres) pairs suivant l'ordre naturel, (la méthode consiste) à ajouter au dernier (nombre) 2, et à multiplier la moitié du résultat par la moitié du même dernier (nombre). Comme (si l'on veut additionner) depuis 2 jusqu'à 8, ce dont le résultat est 20. Et (pour additionner les nombres) pairs, en les élevant au carré, (la méthode consiste) à les additionner suivant l'ordre, à ajouter ensuite aux deux tiers du dernier (nombre) constamment deux tiers de l'unité, et à multiplier le résultat par ce qui provenait de l'addition (des nombres pairs simples); ou à former le rectangle des deux nombres qui viennent suivant l'ordre après le dernier (nombre pair) et à multiplier le résultat par un sixième du dernier (nombre). Et si l'on dit : (le nombre) cent dix, combien contient-il de nombres pairs? alors ajoutez-y constamment un quart de l'unité, et retranchez de la racine du résultat constamment la moitié d'une unité; le double* du reste sera la réponse.

* Les mots « double du » sont de trop; il faut dire : le reste sera la réponse. Car, puisque

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1),$$

si l'on pose

$$n(n+1) = a,$$

on aura

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = n.$$

F. 8, v^o. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des pairs, alors ajoutez deux au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir au dix : ce sera douze. | Prenez-en la moitié, à savoir six, et multipliez-la par la moitié du dix, à savoir par cinq. Il résultera trente, ce qui est la réponse.

Et si l'on dit : additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des (nombres) pairs, en les élevant au carré, alors la méthode pour cela consiste en deux manières.

La première (manière est) que vous additionnez les (nombres) pairs suivant l'ordre, ainsi qu'il précède. Ce sera trente. Réservez cela. Ensuite prenez deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, ce qui est six et deux tiers. Ajoutez-y constamment deux tiers de l'unité. Ensuite multipliez la somme, à savoir sept et un tiers, par le (nombre) réservé. Le résultat sera deux cent vingt, et telle est la réponse.

Et si l'on vous dit : nous avons le (nombre) cent dix ; combien y est-il contenu de nombres pairs ? alors la méthode pour cela consiste à ajouter au nombre donné constamment un quart de l'unité, à prendre la racine de la somme, et à en retrancher constamment la moitié d'une unité ; le double [*] de ce qui reste sera le nombre des (nombres) pairs. Donc ajoutez au cent dix un quart de l'unité, ce sera cent dix et un quart. Prenez-en la racine, à savoir dix et demi. Retranchez-en un demi. Il reste dix. Le double de cela sera vingt, et tel est le nombre des (nombres) pairs contenus dans cent dix [**].

La seconde manière (de sommer les carrés des nombres pairs suivant l'ordre consiste) à former le rectangle des deux nombres qui avoisinent le dix par après, à savoir du onze et du douze. Donc multipliez-en l'un par l'autre, et réservez le résultat. C'est cent trente deux. Ensuite prenez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite)

[*] Les mots « le double de » sont de trop ; il faut dire : ce qui reste sera le nombre des nombres pairs contenus dans le nombre proposé.

[**] On a

$$110 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20,$$

ce qui sont dix et *non vingt* nombres pairs. Je viens déjà d'indiquer la source de cette erreur du texte arabe.

s'étend, à savoir du dix. Vous trouvez que c'est un et deux tiers. Multipliez cela par le (nombre) réservé, à savoir par le cent trente-deux. Le résultat sera deux cent vingt, ce qui est la réponse, comme précédemment.

Et si l'on dit : [*] additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des pairs en les élevant au cube, alors la méthode pour cela consiste à additionner les nombres pairs suivant l'ordre, ainsi qu'il précède, et à réserver le résultat, à savoir trente. Ensuite doublez-le. Ce sera soixante. Multipliez cela par le (nombre) réservé, à savoir par trente. Le résultat sera mille huit cent, et telle est la réponse.

F. 8, 10,
fig. 16.

Et si l'on dit : additionnez ce qui est contenu dans dix cases suivant l'ordre des nombres pairs, ce qui signifie que dans la première case se trouve deux, dans la seconde quatre, et ainsi de suite, suivant l'ordre des nombres pairs, jusqu'à la dixième case ; alors la méthode pour cela consiste à multiplier le nombre des cases, à savoir dix, par lui-même augmenté d'une unité. Ce sera cent dix ; et telle est la réponse.

F. 8, 10,
fig. 19.

Ceci (est l'opération) si le commencement des nombres pairs est le deux. Mais si le commencement est un nombre pair différent du deux, alors faites-en l'addition en supposant (d'abord) que le commence-

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

L'addition suivant l'ordre des (nombres) pairs en les élevant au cube consiste à additionner les (nombres) pairs suivant l'ordre, à doubler le résultat, et à multiplier le résultat par le (nombre qu'on avait) doublé. Et si l'on dit : additionnez ce qui se trouve dans 10 cases suivant l'ordre des (nombres) pairs à partir de 2, alors l'opération consiste à multiplier le nombre des cases par lui-même augmenté de l'unité. Le résultat sera la réponse. Ceci a lieu si (la suite) commence par 2. Sinon, faites la somme (comme d'habitude) en supposant que le commencement soit 2, et réservez le résultat ; retranchez-en la somme de ce qui se trouve entre le deux et le nombre donné comme premier. Le reste sera la réponse. Et si dans ces trois divisions (de l'addition)* le commencement ne se fait pas par l'unité, alors additionnez (d'abord) depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et ensuite depuis l'unité jusqu'au (nombre) qui précède le (nombre donné comme) commencement (de la suite), et retranchez le plus petit du plus grand. Dans l'addition des (nombres) pairs le deux tient la place que tient l'unité dans l'addition des autres.

* Les trois divisions dont il s'agit sont : la sommation des nombres naturels, des nombres impairs et des nombres pairs.

ment soit deux, et réservez ce qui en résulte. Ensuite additionnez ce qui est compris entre le deux et le nombre donné comme premier. Retranchez cela du nombre réservé. Ce qui reste est la réponse.

F. 9, r^o. Sachez aussi que, si le commencement est fait à partir d'un nombre différent de l'unité dans une autre de ces | trois divisions [*], vous additionnerez (d'abord) depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, vous additionnerez ensuite depuis l'unité jusqu'au nombre qui précède celui qui est le commencement (donné), et vous retrancherez le plus petit du plus grand. Le deux tient, dans l'addition des nombres pairs, la place que l'unité tient dans l'addition des autres (nombres). Comprenez cela.

TROISIÈME CHAPITRE.

DE LA SOUSTRACTION.

La soustraction est l'action de retrancher le plus petit du plus grand de deux nombres, etc.

. . . Et si l'on dit : on ajoute à une quantité son tiers et un dirhem, de la somme on retranche ensuite son tiers, et il reste un dirhem ; combien est la quantité [**] ? Alors la réponse est que la quantité est trois huitièmes d'un dirhem. La méthode pour cela consiste à prendre un dénominateur qui ait un tiers, et dont le tiers ait lui-même un tiers. F. 74, r^o. Tel est neuf. Vous y ajouterez donc | son tiers et un dirhem, ce qui fait trois parties et un dirhem, et ce sera douze parties et un dirhem. De cela vous retrancherez son tiers, ce qui est quatre parties et un tiers d'un dirhem. Il reste huit parties et deux tiers d'un dirhem, et

[*] Ces trois divisions sont l'addition des nombres pairs, que l'auteur vient de traiter, et l'addition des nombres naturels et des nombres impairs exposés précédemment.

[**] L'équation proposée est

$$x + \frac{x}{3} + 1 - \frac{x + \frac{x}{3} + 1}{3} = 1.$$

La méthode de l'auteur consiste à poser

$$x = 9y,$$

cela est égal au dirhem restant que nous avons donné. Vous poserez donc les huit parties, c'est-à-dire parties d'un dirhem, et vous les réserverez. Ensuite vous retrancherez les deux tiers d'un dirhem du dirhem. Il reste un tiers d'un dirhem. Vous multipliez cela par le dénominateur, lequel est neuf. Ce sera trois. Vous diviserez cela par la partie, à savoir par huit. Il résultera trois huitièmes d'un dirhem, ce qui est la quantité (cherchée) [*].

ce qui lui donne

$$9y \frac{9y}{3} + 1 - \frac{9y + \frac{9y}{3} + 1}{3} = 1,$$

ou

$$9y + 3y + 1 - \frac{9y + 3y + 1}{3} = 1,$$

ou

$$12y + 1 - \frac{12y + 1}{3} = 1,$$

ou

$$12y + 1 - 4y - \frac{1}{3} = 1,$$

ou

$$8y + \frac{2}{3} = 1, \quad \text{ou} \quad 8y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

mais

$$y = \frac{1}{9}x,$$

donc

$$\frac{8x}{9} = \frac{1}{3}, \quad \text{ou} \quad 8x = \frac{9}{3} = 3;$$

donc

$$x = \frac{3}{8}.$$

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Quant aux mots du (texte) : « trois huitièmes d'un dirhem, etc. », la preuve de cela (consiste en ce) que vous ajoutez au trois son tiers, ce qui fait quatre huitièmes. A ceci vous ajoutez ensuite huit, en remplacement du dirhem : ce sera douze huitièmes. Après cela vous en retranchez son tiers, ce qui est quatre huitièmes. Il reste huit (huitièmes), ce qui est l'équivalent du dirhem, de sorte qu'il n'est rien resté (de trop). Et, si vous

Et si l'on dit : on ajoute à une quantité son cinquième et un dirhem, on retranche ensuite de la somme son tiers et son quart [*], et il reste deux dirhems, combien est la quantité [**]? Alors la réponse est que

voulez, posez le dirhem égal à vingt-quatre, en multipliant trois par huit. Trois huitièmes de cela sont neuf. Ajoutez-y son tiers, ce qui est trois. Il résulte douze huitièmes. Ensuite ajoutez à ceci le dirhem, sous la forme de vingt-quatre. La somme sera trente-six. Retranchez-en son tiers, c'est-à-dire douze. Il reste vingt-quatre, ce qui est l'équivalent du dirhem. Et si on retranche cela, il ne reste rien. Fin de l'observation du (savant ci-dessus) mentionné*.

* A la fin d'une des gloses précédentes, se trouve mentionné le nom de Hoçaïn Almahalli; je crois que ce Hoçaïn Almahalli est identique au Hoçaïn Ben Mohammed Almahalli le châteite, qui est l'auteur du second des trois Traités contenus dans le manuscrit d'où est tiré le morceau ici traduit. (Voir ci-dessus p. 350, l. 9 et 10.)

[*] Le texte manuscrit ajoute ici encore « et deux dirhems; on retranche ensuite de la somme son tiers et son quart; » mais la suite prouve que c'est une méprise du copiste.

[**] L'équation proposée est

$$x + \frac{x}{5} + 1 - \frac{x + \frac{x}{5} + 1}{3} - \frac{x + \frac{x}{5} + 1}{4} = 2.$$

La méthode de l'auteur consiste à poser

$$x = 60y,$$

ce qui lui donne

$$60y + \frac{60y}{5} + 1 - \frac{60y + \frac{60y}{5} + 1}{3} - \frac{60y + \frac{60y}{5} + 1}{4} = 2,$$

ou

$$60y + 12y + 1 - \frac{60y + 12y + 1}{3} - \frac{60y + 12y + 1}{4} = 2,$$

ou

$$72y + 1 - \left(42y + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 2,$$

ou

$$30y + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 2,$$

ou

$$30y = 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4};$$

la quantité est trois dirhems et un sixième. La méthode pour cela consiste à prendre un dénominateur qui ait un tiers et un quart et un cinquième. Tel est soixante. Vous y ajouterez son cinquième et un dirhem. Il viendra soixante-douze parties et un dirhem. Vous retrancherez de cela son tiers et son quart, à savoir quarante-deux parties et un tiers et un quart d'un dirhem. Il reste trente parties et un quart et un sixième d'un dirhem. Cela est égal à deux dirhems.

Donc vous poserez les trente parties comme la partie réservée. Ensuite vous retrancherez le quart et le sixième des deux dirhems, parce que cela était ajouté aux parties. Il reste un dirhem et un tiers et un quart. Vous multipliez cela par le dénominateur qui est soixante. Ce sera quatre-vingt-quinze. Divisez cela par la partie, à savoir par trente. Il résulte trois dirhems et un sixième d'un dirhem [*], ce qui est la quantité (cherchée).

Ici nous nous arrêtons, et ce (qui précède) peut suffire à celui qui

mais

$$y = \frac{1}{60} x,$$

donc

$$\frac{30x}{60} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

ou

$$30x = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) 60 = 95,$$

ou

$$x = \frac{95}{30} = 3 \frac{1}{6}.$$

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Quant aux mots du (texte) : « trois dirhems et un sixième, etc. » la preuve de cela (consiste en ce) que vous convertissez cela en des sixièmes. Ce seront dix-neuf sixièmes. Ajoutez-y son cinquième, à savoir trois et quatre cinquièmes. Ensuite ajoutez à cela le dirhem, c'est-à-dire six. Il résultera vingt-huit et quatre cinquièmes. Convertissez le tout en des cinquièmes. Il résulte cent quarante-quatre. Retranchez-en le quart, ce qui est trente-six, et le tiers, ce qui est quarante-huit. La somme de cela est quatre-

le médite. Dieu, qu'il soit loué et exalté, connaît mieux la vérité. Lui est le lieu où tout revient et où tout retourne. Louange à Dieu, Maître de l'Univers. Il nous suffit, c'est le meilleur des protecteurs. Fin.

vingt-quatre. Ajoutez-y deux dirhems, c'est-à-dire soixante*. Il résulte comme somme cent quarante-quatre. Donc (vous avez à retrancher une quantité) d'(une quantité) égale, (et) il ne reste rien. Fin de l'observation du (savant ci-dessus) mentionné. Puisse Dieu pardonner à nous et à lui. Amen!

* La première conversion donne le dénominateur six, la seconde le dénominateur cinq, donc ensemble le dénominateur trente; par conséquent deux dirhems, c'est-à-dire deux unités, s'ajoutent sous la forme de soixante trentièmes.

Manuscrit coté $\frac{951}{3}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

Voyez la description de ce manuscrit ci-dessus, p. 350, l. 3 à 14. — Les passages traduits ci-après appartiennent au Traité d'arithmétique pratique d'Alkalaçâdi, intitulé : « Le soulèvement du vêtement de la science du calcul. » Voyez ci-dessus, p. 350, l. 11 à 14. — Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 363 à 368 de la présente traduction se rapportent à la numération écrite au crayon sur les feuillets du manuscrit.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux ! Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre Seigneur Mohammed et ses compagnons. F. 103, 1^o.

Le chaïkh, le philosophe exact, l'excellent, le docte, l'arithméticien, le savant connaisseur des opérations du partage des successions, celui qui réunit les qualités les plus diverses, le pénétrant, le précis, l'éminent, le célèbre Abou'l-haçan Ali Ben Mohammed Ben Mohammed Ben Ali (appelé) d'après son pays Alkalaçâdi, puisse Dieu lui être favorable et nous faire profiter de ses mérites, amen, dit :

Louange à Dieu qui est rapide dans son calcul, qui dirige les cœurs, qui est la cause des causes, le créateur des hommes, qui les a fait entrer dans le champ de l'existence en conséquence de sa volonté, et qui les a conduits par son prophète sur le chemin le plus parfait, dont la bonté et la générosité entourent tout ce qui existe, dont l'arrêt pré-déterminé et la justice s'exercent à l'égard de toutes ses créatures, qu'il a formées dans des états successifs, et soumises à la nécessité de la destruction et de la mort, et du retour pour l'examen des secrets et des circonstances.

Grâces à Dieu pour les bienfaits nombreux dont il nous a gratifiés, et particulièrement pour ce qu'il nous a placés dans la plus noble espèce des hommes, distinguée par l'excellence de la langue et de l'éloquence.

Que la bénédiction et le salut (de Dieu) soient sur le seigneur des deux mondes, l'(apôtre) envoyé aux hommes et aux génies, le possesseur de la bannière et du nectar, celui en qui nous plaçons notre espoir au jour de la résurrection. (Que ce soit une) bénédiction qui se continue éternellement, tant que luira et brillera l'aurore.

Pour en venir au fait. Après que j'eus composé (l'ouvrage intitulé) :

« Le moyen de fortifier la vue dans la science du calcul, » et qu'il ne m'était pas venu à l'esprit, pendant que j'en étais occupé, que rien dans cet ouvrage pût offrir de la difficulté au lecteur, (je m'aperçus) qu'il contenait des règles et des fondements des opérations exigées par l'art de la composition, et auxquels je fus amené par la nécessité de la rédaction, mais qui arrêterent, dans l'étude dudit ouvrage, les commençants pour lesquels il avait été composé. Cependant je ne pouvais plus changer l'ouvrage, parce qu'il s'était déjà répandu parmi les hommes, etc.

F. 124, 1^o.

... TROISIÈME SECTION.

DE L'ADDITION SUIVANT LE RAPPORT.

Quant à l'addition suivant le rapport naturel des nombres, l'opération pour cela consiste à ajouter une unité au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et à multiplier la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis un jusqu'à dix ; alors ajoutez au dix un, ce sera onze. | Multipliez cela par le cinq qui est la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Il résulte cinquante-cinq, ce qui est (le nombre) cherché.

F. 169, 1^o.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus un tiers de l'unité, par le résultat de l'addition (des nombres simples).

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors prenez deux tiers du dix plus un tiers de l'unité. Il en résulte comme somme sept. Multipliez cela par le cinquante-cinq. Il résulte trois cent quatre-vingt-cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

F. 169, 1^o,
lig. 5.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) de nouveau par l'élévation au carré de la somme, c'est-à-dire du cinquante-cinq dans notre exemple. Ce qui résulte (si l'on additionne) depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de dix sera donc trois mille vingt-cinq.

F. 169, 1^o,
lig. 7.

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres pairs, l'opération pour cela consiste à ajouter deux au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et à multiplier la moitié de cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à douze suivant l'ordre des nombres pairs, alors ajoutez au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend deux. Ce sera quatorze, ce dont la moitié est sept. Multipliez cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Vous aurez pour résultat quarante-deux, ce qui est (le nombre) cherché.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par le résultat de l'addition (des nombres pairs simples).

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze; alors prenez deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et deux tiers de l'unité. Ce sera huit et deux tiers. Multipliez cela par la somme, laquelle est quarante-deux. Vous aurez pour résultat le (nombre) cherché, qui est trois-cent soixante-quatre.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double. F. 169, r^o,
lig. 15.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de deux jusqu'au cube de douze, alors multipliez la somme, à savoir quarante-deux, par son double, à savoir par quatre-vingt-quatre. Vous aurez pour résultat trois mille cinq cent vingt-huit.

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres impairs, l'opération pour cela consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend une unité, et à élever au carré la moitié de la somme. F. 169, r^o,
lig. 18.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, alors ajoutez au neuf une unité, ce sera dix. Élevez au carré la moitié de cela, ce sera vingt-cinq, et tel est le (nombre) cherché.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui le suivent immédiatement. F. 170, r^o.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors multipliez un sixième du neuf, ce qui est un et demi, par le résultat de la formation du rectangle compris sous le dix et le onze, ce qui est cent dix. Vous aurez pour résultat cent soixante-cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) par la multiplication de F. 170, r^o,
lig. 5.

la somme (des nombres impairs simples) par son double moins un.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors multipliez la somme, à savoir vingt-cinq, par son double moins un, à savoir quarante-neuf. Vous aurez pour résultat le (nombre) cherché, lequel est mille deux cent vingt-cinq.

F. 170, r^o,
lig. 9.

Avertissement. Si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un nombre [*]; et le résultat étant tant, combien est le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend? Alors l'opération pour cela consiste à multiplier le résultat par le premier des cubes, à savoir huit, à ajouter au produit de la multiplication une unité, à prendre la racine de la somme, à ajouter ensuite à la racine de nouveau une unité, à prendre la racine de la (somme), et à retrancher de ce qui est (la racine) l'unité. Vous aurez pour reste le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend [**].

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un nombre inconnu, et le résultat sera quatre cent quatre-vingt-seize. Alors multipliez ce résultat par huit, et ajoutez au produit une unité. La somme sera trois mille neuf cent soixante-neuf. Prenez-en la racine. Ce sera soixante-trois. Ajoutez-y une unité. Ce sera soixante-quatre. Prenez-en la racine, à savoir huit. De ceci retranchez une unité. Vous aurez pour reste sept, ce qui est le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend.

F. 170, r^o,
lig. 19.

Quant à l'addition à la manière des cases de l'échiquier, il faut nécessairement que deux conditions aient lieu. L'une, c'est que le commencement soit fait par l'unité; et la seconde, que le (rapport) suivant lequel (les nombres) se dépassent mutuellement soit double. Il suit de

[*] Il faut remarquer que l'auteur sous-entend ici, mais sans le dire, qu'il ne prend dans cette addition que les cubes des nombres *impairs* suivant l'ordre.

[**] En effet, l'auteur avait trouvé précédemment

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + x^3 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \left[2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 1\right],$$

et, si l'on pose le second membre de cette équation égal à k , on obtient

$$x = \sqrt{\sqrt{8k+1}+1} - 1.$$

là que les nombres (qui se trouvent dans les cases sont tous) pairement pairs. | L'objet que l'on se propose est (de connaître) la quantité qui se trouvera dans la soixante-quatrième case. F. 170, v^o.

... Vous aurez pour résultat deux cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le plus grand (des deux nombres amiables).

Ce nombre a en fait de parties : une moitié, un quart, un soixante et onzième, la moitié de cela, et la moitié de la moitié de cela ; et la somme de ces parties est | deux cent vingt, ce qui est le nombre excédant. F. 172, r^o.

Celui-ci a en fait de parties : une moitié, un quart, un cinquième, un dixième, et la moitié du dixième ; il a en outre, en fait de parties, un onzième, et la moitié et le quart (du onzième), et pareillement le cinquième de la même partie, et la moitié de cela, à savoir le dixième (du onzième), et la moitié du dixième du (onzième). La somme de ces parties est deux cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le nombre déficient.

Ceci est la fin de ce que nous nous sommes proposé dans cette composition. Louange à Dieu, Maître de l'Univers. Que la bénédiction de Dieu et la plénitude de son salut soient sur notre Seigneur Mohammed, sur sa famille et ses compagnons.

L'achèvement [*] de la copie de ce livre eut lieu dans la nuit du mercredi, vingt-trois nuits étant passées du mois de (chawwâl) [**), par la main de celui qui l'a écrit, l'esclave qui a besoin de son Maître

[*] Tandis que l'écriture de ce qui précède dans le manuscrit est fort régulière et lisible, elle devient ici brusquement très-négligée et difficile à déchiffrer. La traduction des lignes suivantes, qui terminent cette page du manuscrit, est donc en grande partie conjecturale.

[**] Le texte manuscrit a ici seulement un *lâm*, lettre finale du nom du mois de chawwâl. Comme les Arabes remplacent quelquefois un mot par sa lettre finale, par manière d'abréviation, et comme le mois de chawwâl est le seul dont le nom se termine par un *lâm*, je conjecture que c'est ce mois que le copiste a voulu indiquer. Ce qui me semble confirmer cette conjecture, c'est qu'on lit, à l'endroit indiqué dans la dernière note ci-après, la date de l'année 1143 (de l'hégire), et que le 24^e jour du mois de chawwâl de l'année 1143 de l'hégire, qui correspond au 2 mai 1731 de l'ère chrétienne, est précisément un mercredi.

le riche, l'esclave de Celui qui soit loué, le khâdjah [*] Chehr, le médecin; puisse Dieu lui pardonner, ainsi qu'à ses père et mère [**].

Louange à Dieu, Maître de l'Univers. Fin.

[*] Khâdjah est un titre honorifique donné par les Orientaux aux personnes riches et respectables.

[**] Dans le prolongement de cette ligne, un peu vers la marge du manuscrit, on lit la date « 1143 ».

Manuscrit coté 951₂ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

Voyez la description de ce manuscrit ci-dessus, p. 339, l. 13 à 15. — Les passages traduits ci-après appartiennent au second des deux commentaires du *Talkhîs* d'Ibn Albannâ, contenus dans ce manuscrit. Voyez ci-dessus, p. 339, l. 12 et 13. — Les numéros des feuillets marqués en marge des p. 369 à 377 de la présente traduction se rapportent à la seconde des deux numérations du manuscrit.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre Seigneur Mohammed! F. 1, 1^o.

Ceci est (l'ouvrage intitulé) « Le rapprochement de celui qui est éloigné, sur Ibn Albannâ [*] ».

Louons Dieu d'une louange qui puisse être une expression complète et suffisante de la reconnaissance due pour l'abondance de ses bienfaits. Que la bénédiction et le salut de Dieu les plus parfaits soient sur notre Seigneur Mohammed, le dernier et le plus accompli des prophètes et le prince des apôtres.

Pour en venir au fait. Je me suis rendu au désir des grands, des ingénieux, des nobles, des illustres, des perspicaces, des intelligents, relativement à la rédaction d'un abrégé de mon ouvrage qui a pour objet le *Talkhîs* d'Ibn Albannâ. Et je me suis appliqué à suivre la trace de l'auteur dans cet objet, en tâchant d'atteindre son but, et en réalisant son intention et la signification du jugement qu'il a émis en disant [**] :

Je me suis appliqué à être bref dans mon exposé,

[*] Les mots « Ceci est » jusqu'à « Ibn Albannâ » sont d'une écriture différente de celle du reste de la page, et n'ont été ajoutés évidemment que plus tard. Le mot « sur » est probablement mis par erreur, au lieu de « de », ainsi qu'on le voit par le titre tel que le donne l'auteur du commentaire lui-même, ci-après, p. 370, l. 10 et 11.

[**] Je rappelle que ces vers sont à peu près les mêmes que ceux qui se trouvent cités au commencement du commentaire d'Alkalaçâdî, sans cependant être tout à fait identiques à ceux-ci. Voir ci-dessus, p. 340.

Parce que je sais trouver la juste mesure dans la concision.

Je ne crains pas qu'on m'entende mal en prêtant à ce que je dis des sens différents de celui que j'ai voulu exprimer,

Mais je crains le blâme des grands hommes.

Or, la manière d'agir des savants distingués est la mienne,

Et le devoir de la science [*] est d'instruire les petits [**].

Mais quelquefois j'ai laissé échapper le frein à cause de l'avantage d'un développement additionnel, et afin de rendre plus complète l'utilité (de mon ouvrage).

Je l'ai appelé « Le rapprochement de celui qui est éloigné des problèmes d'Ibn Albannâ. »

J'invoque le Seigneur en le priant d'en laisser profiter et moi, et vous, et tous ceux qui s'en occuperont, comme il nous a permis de profiter de (l'ouvrage qui sert de) base (à mon travail). Il est le bienfaiteur, le généreux. Que sa bénédiction et son salut soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

L'auteur dit : *Le but [***] de cet ouvrage est de donner un exposé fait avec choix des opérations du calcul, de rendre prompte et facile l'intelligence de ses règles et de ses théories, et de présenter dans un ordre sévère les bases et le système de cet art.*

Commentaire. « Le but » est l'objet qu'on se propose. Le (mot qui signifie) « exposé fait avec choix » est un infinitif dont le sens est : l'action d'extraire la moelle d'une chose. « Les opérations du calcul », ce sont ses diverses applications, telles que l'addition, la multiplication, la division, l'abaissement [****], et les autres. « L'action de présenter dans un ordre sévère les bases », c'est | etc.

Fin
du f. 1, r^o.

[*] Une variante placée sur la marge du manuscrit porte « de la chamelle ».

[**] Ces vers paraissent être reproduits ici d'une manière plus correcte que dans le commentaire d'Alkalaçâdi. Le mètre dans lequel ces vers sont composés s'appelle *Wâfir*.

[***] Les passages imprimés en italique sont la traduction des passages de l'ouvrage commenté.

[****] C'est l'opération décrite dans le septième chapitre de la deuxième partie de l'Arithmétique d'Alkalaçâdi. Voir *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, anno XII (1859), p. 274.

L'auteur dit : | *Et l'élevation au carré [*] (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, augmentés d'un tiers de l'unité, par la somme [**].* F. 8, r^o.

« L'élevation au carré » signifie la multiplication d'un nombre par lui-même. Cependant l'auteur s'est éloigné de cette signification primitive dans la présente règle, soit pour abrégé, soit pour plus de facilité à l'égard de celui qui exécute l'opération. En disant « la somme », l'auteur se sert de l'article pour rappeler ce dont il a été fait mention précédemment; comme cela a lieu aussi dans cette parole du Koran : « Et Pharaon n'obéit point à l'envoyé. » Exemple de cette (règle). Si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors l'opération dans ce cas consiste à multiplier deux tiers du dix plus un tiers de l'unité, ce qui est sept, par la somme (des nombres) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante-cinq. Vous aurez pour résultat trois cent quatre-vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élevation au cube (se fait) par l'élevation au carré de la somme.* « L'élevation au cube » signifie la multiplication d'un nombre par lui-même et du produit par sa racine; comme le huit et le vingt-sept relativement au deux et au trois. L'article dans le mot « la somme » est de nouveau employé pour rappeler (ce qui précède). Donc si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de dix, alors élevez au carré la somme, à savoir cinquante-cinq. Vous aurez pour résultat trois mille vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée. F. 8, r^o, lig. 9.

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend joint à l'unité.* Ceci est la quatrième espèce de l'addition, et l'opération est claire d'après ce que l'auteur a dit. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, alors ajoutez un au neuf; ce sera dix. Élevez la moitié de cela, à savoir F. 8, r^o, lig. 15.

[*] C'est-à-dire la sommation des carrés des nombres naturels suivant l'ordre.

[**] C'est-à-dire la somme des nombres naturels simples.

cinq, au carré. Vous aurez pour résultat vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élevation au carré (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* La formation du rectangle » signifie la multiplication d'un nombre par un autre. L'auteur a dit « par après » par précaution, pour empêcher qu'on ne s'imagine (que les deux nombres sont ceux) qui précèdent le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Exemple de cette (règle).

F. 8, v^o. Si l'on vous dit : additionnez les impairs depuis le carré 1 de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors multipliez un sixième du neuf, ce qui est un et demi, par le rectangle compris sous les deux nombres qui suivent le neuf, à savoir par cent dix. Vous aurez pour résultat cent soixante-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

F. 8, v^o,
lig. 3. L'auteur dit : *Et l'élevation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double moins un.* L'explication de cela (est contenue) dans notre exemple. Si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors vous savez que la somme (des impairs simples) est vingt-cinq, et son double moins un, quarante-neuf. Multipliez cela par le vingt-cinq, vous aurez pour résultat mille deux cent vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

F. 8, v^o,
lig. 8. L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel la suite s'étend.* Ceci est la cinquième espèce de l'addition, et la manière de faire l'opération est évidente, d'après ce que l'auteur a dit. Exemple de cette (règle). Si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à douze, alors ajoutez au douze deux; ce sera quatorze. Multipliez la moitié de cela par la moitié du douze. Vous aurez pour résultat quarante-deux, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élevation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples).* Ceci est une manière d'exécuter l'élevation au carré. Donc, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze, alors multipliez deux tiers du douze plus deux tiers de l'unité, ce qui est

huit et deux tiers, par la somme, laquelle est quarante-deux. Vous aurez pour résultat trois cent soixante-quatre, ce qui est la quantité cherchée. La manière de faire la seconde multiplication [*] sera donnée, si Dieu le Très-Haut le permet, dans le (chapitre des) fractions. Cependant j'ai pour cela une méthode abrégée qui consiste à multiplier le huit par le quarante-deux. Vous aurez pour résultat trois cent trente-six. Réservez cela. Ensuite multipliez | le deux qui se trouve au-dessus du trois [**] par le quarante-deux. Vous aurez pour résultat quatre-vingt-quatre. Divisez cela par le dénominateur, à savoir par le trois. Vous aurez pour résultat vingt-huit. Ajoutez cela au (nombre) réservé. Vous aurez en somme de tout cela trois cent soixante-quatre, ce qui est la quantité cherchée. F. 9, r^o.

L'auteur dit : *Ou multipliez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* Ceci est une seconde manière de l'élevation au carré des nombres pairs. Un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est dans notre exemple deux (et doit être) multiplié par cent quatre-vingt-deux, ce qui est le résultat de la multiplication du treize par le quatorze. La quantité cherchée résultera conforme à ce qui précède.

L'auteur dit : *Et l'élevation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double.* Ceci est plus clair que (la règle) qui précède. Donc, si vous multipliez le quarante-deux par son double, à savoir par quatre-vingt-quatre, vous aurez pour résultat trois mille cinq cent vingt-huit, ce qui est la quantité cherchée. F. 9, r^o,
lig. 9^o.

F. 9, r^o,
lig. 13.

TROISIÈME CHAPITRE.

DE LA SOUSTRACTION.

*La soustraction [***] est la recherche de ce qui reste après qu'on a retranché l'un de deux nombres de l'autre.* Ceci est la soustraction par

[*] A savoir la multiplication de la somme (quarante-deux) par les deux tiers.

[**] Dans la fraction « deux tiers. »

[***] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction : Glose. Le plus convenable est de dire que la soustraction est l'action de retrancher

écrit. Et la définition plus exacte consiste à dire : la soustraction est la recherche de la différence entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand.

L'auteur dit : *Elle (se fait) de deux manières* : Ceci est de nouveau une division et un classement de (ce qui est compris dans) la soustraction.

L'auteur dit : *Dans la première manière il faut poser (etc.)* Cette espèce est le genre de soustraction le plus facile ; c'est le cas où, dans chaque rang du nombre que l'on retranche, il se trouve un (chiffre) plus petit que le (chiffre correspondant) dans chaque rang du (nombre) dont on retranche ; et l'opération est évidente d'après ce que l'auteur a dit. En voici un exemple. Si l'on vous dit : retranchez cinq cent trente-deux de neuf cent soixante-quatorze, alors posez cela sur deux lignes de la même manière comme dans l'addition. C'est-à-dire que les unités du (nombre) retranché soient sous les unités du (nombre) dont on retranche, et pareillement les dizaines, les centaines, et ce | qui vient après celles-ci, etc.

Fin
du f. 9, r^o.

F. 58, v^o.

L'opération, d'après | ce que l'auteur a dit, est évidente. Par exemple, si l'on vous dit : divisez vingt-quatre carrés moins huit choses par quatre choses, alors posez cela ainsi [*] :

$$\begin{array}{r} \text{Q} \qquad \text{C} \\ 24 \text{ moins } 8 \\ \text{C} \\ 4 \end{array}$$

un nombre plus petit d'un nombre plus grand, et son utilité consiste à faire connaître le reste. Alghazzî et d'autres ont soulevé des objections contre l'auteur au sujet de sa définition.

[*] Voir, pour la manière dont la notation de l'auteur arabe est reproduite, la note au bas de la page 420 du tome XII (année 1859) des *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. J'ajoute que dans le manuscrit sur lequel a été faite la présente traduction, le signe de la « chose » a été réduit aux trois points de la lettre *chîn*, et que les nombres simples y sont aussi pourvus d'un signe superposé. Ce signe est le *dâl*, lettre initiale du mot *dirhem* dont les mathématiciens arabes se servent souvent dans le sens d'unité. Je rends ici ce *dâl* par un N (initiale du mot nombre).

Ensuite divisez la quantité à laquelle le « moins » s'applique par le diviseur. Il résultera six choses. Réservez cela. Après cela divisez la quantité qui est régie par « le moins ». Il en résultera deux en nombre. Reliez cela par la particule « moins » aux choses. Le résultat de la division sera : six choses moins deux en nombre, ainsi :

$$\begin{array}{r} C \quad N \\ 6 \text{ moins } 2 \end{array}$$

Et si l'on vous dit : divisez quarante-huit cubes moins dix-huit carrés, par trois choses, alors posez cela ainsi [*] :

$$\begin{array}{r} K \quad Q \\ 48 \text{ moins } 18 \end{array}$$

Ensuite divisez la quantité à laquelle le « moins » s'applique. Vous aurez pour résultat seize carrés. Réservez cela. Après cela divisez la quantité qui est régie par le « moins ». Il en résultera six choses. Reliez cela par la particule « moins » aux carrés. Le résultat sera seize carrés moins six choses, ainsi :

$$\begin{array}{r} Q \quad C \\ 16 \text{ moins } 6 \end{array}$$

Conformez-vous (pour d'autres cas semblables) au sens de cette (règle).

L'auteur dit : *Une espèce inférieure ne peut pas se diviser par une espèce supérieure, c'est-à-dire à cause de l'impossibilité d'assigner (un résultat). Comme, par exemple, si l'on vous dit : quatre en nombre (divisé) par deux choses, ou neuf cubes [**] (divisés) par trois carrés.*

L'auteur dit : *Et l'on ne divise pas non plus une expression qui renferme un « moins ». C'est-à-dire : et pareillement on ne divise pas*

[*] Je pense que c'est par un oubli du copiste que le manuscrit omet de poser aussi les « trois choses », en notation, au-dessous des « quarante-huit cubes moins dix-huit carrés » figurés en notations.

[**] Le mot « cubes » paraît être une erreur du copiste, au lieu de « choses ».

par une expression qui renferme un « moins » à cause de l'impossibilité qui a lieu en ce (cas).

Ceci est la fin de ce que nous nous sommes proposé dans cet objet. Et nous prions notre Seigneur qu'il rende cela profitable, comme il a rendu profitable (l'ouvrage qui a servi de) base au (présent travail). Il est bienfaisant et généreux. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons; que le salut de Dieu soit répandu sur eux avec profusion. Louange à Dieu, Maître de l'Univers.

Ceci fut écrit par le pauvre qui a besoin de son Seigneur le riche, Abdallah Soulât Almozâti, pour son propre usage, et pour l'usage de qui il plaira à Dieu, après lui. Cette copie fut faite sur un exemplaire difficile à lire.

*Manuscrit coté 932 du Supplément arabe de la Bibliothèque
impériale de Paris.*

Volume in-4 de 115 feuillets en papier dont les quatre premiers et les trois derniers sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les 108 autres feuillets sont numérotés avec les nombres 1 à 108, écrits à l'encre au moyen des chiffres indiens des Arabes orientaux, et, en outre (sauf le premier feuillet), avec les mêmes nombres écrits à l'encre au moyen des chiffres européens modernes.

Je pense que l'on peut attribuer à ces feuillets numérotés, à en juger d'après la teinte du papier et de l'encre, un âge de cinq à six cents ans, en exceptant les feuillets numérotés 9, 88 et 98 à 108, qui ont évidemment été ajoutés plus tard pour remplacer d'anciens feuillets perdus. La copie paraît avoir été faite en Égypte d'où le manuscrit a été apporté en France par M. Delaporte, lors de l'expédition d'Égypte.

Les 108 feuillets numérotés contiennent le texte d'un Traité d'Algèbre, composé par Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alqarkhî, et dédié au vizir Fakhr Almoulq qui mourut le 3 septembre 1016 de notre ère.

Une analyse très-étendue de ce Traité d'algèbre a été donnée dans l'ouvrage intitulé : *Extrait du Fakhrî*, par F. Wœpcke. Paris, 1853.

Les numéros des feuillets marqués en marge des p. 377 et suiv. de la présente traduction se rapportent à la numération écrite à l'encre.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux!

F. 1, v^o.

Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alqarkhî, le calculateur, que Dieu le Très-Haut soit miséricordieux envers lui, dit :

J'ai trouvé que le calcul a pour objet la détermination des inconnues au moyen des connues dans toutes ses espèces, et j'ai observé que la plus claire des règles et le plus évident des moyens pour cet effet est l'art de l'Algèbre, à cause de sa puissance et de l'universalité avec laquelle il s'étend sur tous les problèmes du calcul, suivant leur diversité.

J'ai vu que les ouvrages composés sur cet art ne contenaient pas (complètement) ce dont on a besoin en fait de la connaissance de ses éléments; qu'ils étaient insuffisants par rapport aux théories sur lesquelles on s'appuie dans l'étude de ses branches spéciales; et que leurs auteurs avaient négligé d'expliquer les théorèmes de cet art qui sont le chemin du plus haut degré (de savoir algébrique) et le moyen de parvenir à la perfection.

Ensuite j'ai fait dans cet art de belles découvertes, dont je n'ai vu chez aucun d'eux une mention, et j'ai éclairci des difficultés dont je n'ai trouvé dans leurs ouvrages ni l'exposé, ni l'explication.

Or, après avoir acquis cet avantage et après avoir éprouvé le besoin de suppléer à ce défaut, je ne pus pas m'empêcher de composer un ouvrage contenant et renfermant ces (perfectionnements), et dans lequel je donnasse une explication faite avec choix des éléments de (l'Algèbre), exempté de l'impureté de la redondance et de la souillure de la verbosité.

Mais je fus éloigné de l'exécution de ce (projet) par les obstacles qu'y opposaient la corruption du temps, les calamités de périodes remplies de désastres et l'état général de crainte, de violence et d'oppression où se trouvaient les hommes jusqu'à ce que Dieu, qu'il soit béni et exalté, les secourût par notre maître, le vizir, le seigneur illustre, le parfait dans le gouvernement, le vizir des vizirs, revêtu des deux autorités, Abou Ghâlib [*], l'affranchi du commandeur des croyants, dont Dieu prolonge l'existence! Dieu rendit les hommes heureux par l'excellence de son administration, et leur accorda, pendant la durée bienheureuse de ses jours, au plus haut degré tout ce qu'ils désiraient en fait de justice, de sécurité, d'abondance et de bien. Il arracha le monde, par son gouvernement, au vice et aux hommes vicieux, et le rendit resplendissant par la sérénité de son regard et par la manière dont il fit revivre les traces effacées de la science. Dieu fit de lui un modèle de toutes les vertus, de sorte qu'on est guidé par sa direction et qu'on demande à être éclairé | par sa lumière.

F. 2, r^o.

... Nous faisons cela en vertu de ce que j'ai expliqué. Car, si vous multipliez un nombre quelconque par le nombre suivant, et si vous multipliez ensuite l'un de deux autres nombres se trouvant de part et d'autre des deux (premiers) par celui qui lui correspond, le premier

[*] On lit dans les *Vies des hommes illustres* d'Jbn Khallican : Abou Ghâlib Mohammed Ben Khalaf, surnommé Fakhr Almoulq, vizir de Behâ Aldaoulah, fils d'Adhad Aldaoulah Jbn Bouwaih... C'est pour lui que Abou Beqr Mohammed Ben Alhaçan, le calculateur, Alqarkhî, composa le livre (intitulé) Alfakhrî sur l'Algèbre, et le livre (intitulé) « Le (traité) suffisant sur le calcul ». (Comparez la traduction anglaise de M. de Slane, t. III, p. 283; et Abulfedæ *Annales musulmici*, ed. Reiske et Adler, t. III, p. 6 et 7.)

résultat dépasse le second de la quantité du produit de la différence entre l'un des deux extrêmes et l'un des deux moyens | par la différence entre le même extrême et l'autre moyen [*]. Comprenez cela. F. 22, v^o

Si l'on vous dit : prenez depuis l'unité jusqu'à dix, à la condition de multiplier chaque nombre par le suivant, un par deux, deux par trois, trois par quatre, et ainsi de suite; alors prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante-cinq. Prenez deux tiers du dix moins deux tiers d'un dirhem et multipliez cela par cinquante-cinq. Ce sera trois cent trente [**].

Si l'on dit : combien (obtenez-vous en allant) depuis l'unité jusqu'à dix, à la condition d'élever chacun des nombres au cube et d'additionner les résultats; alors prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante-cinq. Multipliez cela par lui-même. Ce sera trois mille vingt-cinq, et telle est la réponse [***]. F. 22, v^o,
fig. 5.

Démonstration numérique de ce (théorème). Il a été dit déjà précédemment que, si vous divisez un nombre quelconque en deux parties, si l'on multiplie (ensuite) chacune des deux parties par elle-même, et si l'on multiplie l'une des deux parties par l'autre (prise) deux fois, cela (fait ensemble) le carré de ce nombre [****].

Donc, si vous divisez cinquante-cinq en deux parties, dix et quarante-cinq, le produit du dix par lui-même, et le produit du dix par le quarante-cinq (pris) deux fois, ce dont la somme est mille, ensemble avec quarante-cinq (multiplié) par lui-même, est égal au produit de cinquante-cinq par cinquante-cinq. Si donc nous rejetons le mille, qui est le cube du dix, ce qui provient de la multiplication de dix par dix et de dix par quarante-cinq (pris) deux fois, de trois mille vingt-cinq,

[*] C'est-à-dire

$$[(a + 1) + n] \cdot (a - n) = (a + 1)a - n(n + 1).$$

[**]

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 9 \cdot 10 \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + 10) \left(\frac{2}{3} \cdot 10 - \frac{2}{3} \right) = 55 \left(\frac{2}{3} \cdot 10 - \frac{2}{3} \right) = 330.$$

[***]

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2 = 55^2 = 3025.$$

[****]

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2.$$

il reste quarante-cinq (multiplié) par lui-même égal à deux mille vingt-cinq [*].

Si maintenant vous divisez le (quarante-cinq) en deux parties, neuf et trente-six, alors neuf fois neuf et neuf [**] fois trente-six (pris) deux fois est sept cent vingt-neuf, ce qui est le cube du neuf. Donc, si vous rejetez cela de deux mille vingt-cinq, il reste mille deux cent quatre-vingt-seize, ce qui est égal au produit de trente-six par | trente-six [***].

F. 23, r^o.

Si vous divisez ensuite ce (dernier nombre) en deux parties, huit et vingt-huit, le produit du huit par lui-même et par vingt-huit (pris) deux fois est cinq cent douze, ce qui est le cube du huit. Et si vous rejetez cela du mille deux cent quatre-vingt-seize [****], il reste sept cent quatre-vingt-quatre, ce qui est (le résultat) de la multiplication de vingt-huit par lui-même [*****].

(En continuant) d'une manière semblable à ce procédé on retranche du (nombre trois mille vingt-cinq successivement) le cube de chaque nombre jusqu'à l'unité, et là on s'arrête.

Cela montre que, si vous prenez (la somme des nombres naturels) depuis l'unité jusqu'au nombre que vous voudrez, et si vous la multipliez ensuite par elle-même, (le produit) est égal aux cubes des nombres qui sont précisément les nombres additionnés.

Démonstration de ce (théorème) au moyen de la figure. La surface ABCD est (le résultat) de la multiplication de vingt-un par vingt-un, et vingt-un est (le résultat) de (la sommation des nombres naturels depuis) l'unité jusqu'à six. Nous disons donc que toute la surface ABCD est égale à l'ensemble des cubes des nombres dont l'addition produit vingt-un, à savoir (des nombres) depuis un jusqu'à six.

$$[*] \quad 55^2 = (10 + 45)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 45 + 45^2 = 1000 + 45^2 = 10^3 + 45^2.$$

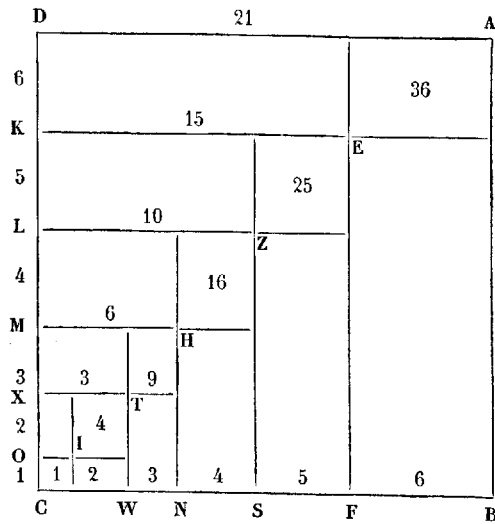
[**] Le texte manuscrit porte « quatre vingt-dix » au lieu de neuf, évidemment par suite d'une erreur de copiste.

$$[***] \quad 45^2 = (9 + 36)^2 = 9^2 + 2 \cdot 9 \cdot 36 + 36^2 = 729 + 36^2 = 9^3 + 36^2.$$

[****] Le manuscrit porte « quatre-vingt-six » ce qui est évidemment une faute de copie.

$$[*****] \quad 36^2 = (8 + 28)^2 = 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 28 + 28^2 = 502 + 28^2 = 8^3 + 28^2.$$

Démonstration. Nous posons la ligne DK (égale à) [six, et la ligne KL égale à] [*] cinq, LM (égale à) quatre, MX (égale à) trois, XO (égale



à deux, et OC (égale à) un. De la même manière nous divisons la ligne BC, de sorte que BF égal à DK, FS égal à KL, SN égal à LM; et d'une manière analogue nous déterminons les autres parties.

Cela posé, nous disons que les surfaces DE, EA et EB sont (égales au) cube de six, parce que la surface EA est six fois six, tandis que la ligne KE est quinze, et la ligne EF pareillement, de sorte qu'il résulte des deux surfaces EB et ED cent quatre-vingts. Donc, si vous y ajoutez la surface EA, qui est trente-six, ce sera deux cent seize, ce qui est le cube de six.

Il en est ainsi seulement, parce que, si d'un nombre quelconque vous retranchez l'unité, que vous multipliez le résultat par le carré du premier nombre, et que vous ajoutez à cela le carré (de ce nombre), il résulte le cube (du même nombre) [**]. Cela est évident.

F. 23, v^o.

[*] Les mots renfermés entre crochets manquent dans le manuscrit, évidemment par suite d'une omission du copiste.

[**] $(a - 1) a^2 + a^2 = a^3$.

Et si vous prenez le nombre que vous voudrez (de nombres) à partir de l'unité, suivant l'ordre naturel, et que vous divisez ensuite la somme par le nombre qui suit le (dernier des nombres additionnés), il résulte la moitié du nombre jusqu'auquel vous avez pris (la somme) [*]. Par exemple, vous prenez (la somme) depuis un jusqu'à huit, c'est trente-six; vous divisez cela par neuf; il résulte quatre, ce qui est la moitié du huit.

Donc, si vous prenez (la somme) jusqu'au nombre que vous voudrez, suivant l'ordre naturel, que vous multipliez ce qui en provient par le (nombre) qui suit [**] (pris) deux fois, et que vous joignez à ce qui résulte de cette opération le carré du nombre suivant que je viens de mentionner, alors le résultat est le cube du nombre suivant [***].

Et conformément à cette explication, les surfaces KZ, ZE et ZF sont le cube de la ligne KL; les surfaces LH, HZ et HS le cube de la ligne LM; les surfaces MT, TH et TN égales au cube de MX, et les surfaces XI, IT et IW égales au cube de XO; (enfin) la surface IC est le cube de OC. Il est maintenant évident que la surface CA est égale au cube des nombres depuis un jusqu'à six; et voici la forme de la figure [****].

F. 23, v^o,
fig. 13.

Si l'on dit : combien (obtenez-vous en allant) depuis un jusqu'à dix; à la condition de multiplier chaque (nombre) impair par l'impair suivant, et chaque (nombre) pair par le pair suivant; alors la règle pour cela (est) que vous prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante-cinq. Multipliez cela par deux tiers du dix moins un et deux tiers (quantité qui doit être retranchée) essentiellement et | invariablement. Ce sera deux cent soixante-quinze. Ajoutez-y constamment une unité, ce qui fait deux cent soixante-seize; et telle est la réponse [*****].

F. 24, v^o.

$$[*] \quad \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 1} = \frac{n}{2}, \quad \text{ou} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1).$$

[**] Le texte manuscrit porte « par la moitié de celui qui suit », ce qui est erroné. C'est probablement une faute de copie.

$$[***] \quad 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n)(n + 1) + (n + 1)^2 = n(n + 1)^2 + (n + 1)^2 = (n + 1)^3.$$

[****] Dans le manuscrit la figure est placée à la fin de la démonstration.

$$[*****] \quad (1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + 7 \cdot 9) + (2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + \dots + 8 \cdot 10) \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + 10) \left(\frac{2}{3} \cdot 10 - 1 \frac{2}{3} \right) + 1 = 276.$$

La démonstration de ce (théorème) est évidente, parce que, etc.

... Après cela il faut que vous divisiez le seize par le deux, afin qu'il résulte le cube cherché. Or, vous avez déjà divisé le trente-deux par deux, puis (encore) par deux, afin qu'il résulte le cube; et de cette manière vous l'avez divisé, comme si vous l'aviez divisé par le carré de deux.

Fin de l'ouvrage (intitulé) Le Fakhri [*], qui comprend les éléments de l'Algèbre et les éléments des problèmes.

Louanges sans bornes et sans fin à Celui qui donne l'intelligence. Que sa bénédiction soit sur notre Seigneur Mohammed, le prophète, et sur sa famille et ses compagnons, les purs, les saints.

Ceci fut écrit et achevé par Sâliq.

[Dans un autre exemplaire (l'auteur) a dit : J'ai exclu de mon présent ouvrage ce qui ne s'y rapporte pas. J'avais désiré y ajouter quelque chose en fait de particularités des figures, du cercle et des testaments. Mais je ne l'ai pas fait pour deux raisons, dont l'une est (mon) aversion pour la prolixité; la seconde (est) que j'ai (déjà) composé sur chacun de ces (objets) un ouvrage étendu, embrassant ses éléments, leurs théories exactes et la solution des problèmes les plus subtils avec leur méthode. Je prie Dieu, le Très-Haut, qu'il m'assiste dans l'accomplissement des devoirs de l'obéissance envers lui, et qu'il facilite à toutes ses créatures ce qui les délivre de l'erreur. Je le supplie de répandre sa bénédiction sur le prophète Mohammed, son élu parmi ses créatures, et sur sa famille, les purs. F. 108, v^o.

Fin de l'ouvrage, à savoir, du (livre) connu sous (le nom) du Fakhri.

Ceci fut écrit par Sâliq, le pauvre. Fin.

[*] Il y a lieu de croire que l'auteur avait donné ce titre à son ouvrage en honneur du vizir Abou Ghâlib, surnommé *Fakhr* Almouq (« La gloire du gouvernement ») auquel il avait dédié ce Traité.

