

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 10 (1865), p. 1-8.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__1_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Nous avons démontré dans ce journal (cahier de janvier 1859, p. 47) que tout entier n différent de 3 peut être représenté par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Mais personne, que je sache, n'a trouvé jusqu'ici une expression simple et générale du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

des représentations dont n est susceptible sous la forme citée, c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

dans laquelle x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Je veux traiter aujourd'hui cette question délicate, mais pour le cas seulement d'un entier n pair. Le cas de n impair offre, en

effet, des difficultés spéciales que je n'ai pas encore pu vaincre complètement. On verra néanmoins qu'il suffirait d'avoir réussi pour les entiers premiers à 5. De là on passerait sans peine aux multiples de 5.

2. Mettons en évidence les facteurs 2 et 5 que n peut contenir et pour cela écrivons

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant un entier impair, premier à 5. Supposons

$$\alpha > 0,$$

afin que n soit pair, mais faisons successivement $\beta = 0$, puis $\beta > 0$.

Dans le premier cas, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier $2^\alpha m$ pair et premier à 5, le résultat que j'obtiens est d'une extrême simplicité. La valeur demandée de

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

s'exprime en effet par le quadruple de la somme des diviseurs de m . En d'autres termes, on a, d'après une notation dont j'ai fait bien souvent usage dans ce journal,

$$(1) \quad N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4\zeta_1(m).$$

Dans le second cas, le facteur 4 est remplacé par un facteur dépendant de β , savoir

$$2(5^{\beta+1} - 3).$$

Ainsi on a

$$(2) \quad N(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 2(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m).$$

La formule (2) comprend la formule (1) à laquelle elle se réduit quand on fait $\beta = 0$. L'exposant α n'y joue aucun rôle; mais il ne faut pas oublier que l'on suppose cet exposant > 0 .

3. Appliquons les formules (1) et (2) à quelques exemples; et d'a-

bord prenons $\alpha = 1$ avec $m = 1$ dans la formule (1). Elle nous donnera

$$N(2 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4,$$

résultat confirmé par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2$$

qui fournit pour l'entier 2 quatre représentations sous la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Avec $\alpha = 1$, soit $m = 3$ dans cette même formule (1). Nous trouverons

$$N(6 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 16,$$

ce qui est exact en vertu des identités

$$6 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2,$$

$$6 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2,$$

$$6 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 5(\pm 1)^2,$$

$$6 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5(\pm 1)^2,$$

de chacune desquelles on déduit quatre représentations de l'entier 6.

Soit encore $\alpha = 2$, avec $m = 1$. La formule (1) nous donnera cette fois

$$N(4 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4,$$

et la vérification résultera des deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2,$$

$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2.$$

Passant à la formule (2), prenons maintenant $\beta = 1$, avec $\alpha = 1$ et $m = 1$. Nous obtiendrons

$$N(10 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 44.$$

Les identités à employer sont ici :

$$\begin{aligned} 10 &= (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2, \\ 10 &= (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2, \\ 10 &= (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2, \\ 10 &= (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2, \\ 10 &= (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5(\pm 1)^2, \\ 10 &= (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5(\pm 1)^2, \\ 10 &= 0^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2. \end{aligned}$$

On en tire successivement quatre, quatre, huit, huit, huit, huit, et enfin quatre représentations de l'entier 10 par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Or

$$4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 4 = 44;$$

la vérification cherchée a donc lieu. Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.

4. On ne peut pas faire $\alpha = 0$ dans les formules (1) et (2); et je n'ai trouvé aucune formule véritablement simple pour calculer

$$N(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Mais je puis montrer du moins que de la valeur de

$$N(m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

on conclut sans peine celle de

$$N(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Mettons en évidence la seule variable de la question, savoir β , en écrivant

$$N(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = F(\beta),$$

de manière que

$$F(0) = N(m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

On donne donc

$$F(0)$$

et on demande

$$F(\beta).$$

Or je trouve qu'il existe entre deux fonctions consécutives

$$F(\beta), F(\beta + 1)$$

la relation suivante

$$F(\beta + 1) + F(\beta) = 4(5^{\beta+1} - 1)\zeta_1(m).$$

C'est une équation aux différences finies très-facile à intégrer. On en tire

$$(3) \quad F(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\beta \left[F(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m) \right],$$

et la question proposée est résolue.

5. Pour $m = 1$, on a

$$F(0) = 4;$$

c'est ce qui résulte des deux identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2,$$

$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2.$$

La valeur correspondante de

$$F(\beta)$$

sera donc

$$F(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autres termes

$$N(5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

Par exemple, on a

$$N(5 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 12,$$

résultat confirmé par les identités

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2,$$

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2,$$

$$5 = 0^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2,$$

$$5 = 0^2 + 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 5(\pm 1)^2.$$

L'entier 3 est le seul qui ne puisse pas être représenté par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Pour $m = 3$, on a donc

$$F(0) = 0,$$

d'où

$$F(\beta) = \frac{8}{3}(5^{\beta+1} - 3) - \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autres termes

$$N(5^\beta \cdot 3 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{8}{3}(5^{\beta+1} - 3) - \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

Par exemple, on doit avoir

$$N(15 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 64;$$

et on vérifiera sans peine qu'il en est effectivement ainsi.

Pour $m = 7$, les identités

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2$$

et

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 5 \cdot 0^2 + 5(\pm 1)^2$$

donnent

$$F(0) = 16,$$

par conséquent

$$F(\beta) = \frac{16}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autres termes, on a

$$N(7.5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{16}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

Enfin, pour $m = 9$, on trouve

$$F(0) = 20,$$

et par suite

$$F(\beta) = \frac{26}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta,$$

c'est-à-dire

$$N(9.5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{26}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

Mais en voilà assez sur ces détails.

6. Le rapport si simple que les formules

$$(1) \quad N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4\zeta_1(m)$$

et

$$(2) \quad N(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 2(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m)$$

établissent entre

$$N(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

et

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2),$$

dans le cas de $\alpha > 0$, n'existe plus quand $\alpha = 0$. La formule

$$(3) \quad F(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\beta \left[F(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m) \right]$$

a lieu alors; mais elle conduit à un rapport beaucoup plus compliqué et qui d'ailleurs n'est plus indépendant de m . La formule (3) n'en est pas moins digne de remarque, et nos lecteurs ne me reprocheront pas, j'espère, de la leur avoir communiquée, bien que la valeur de $F(0)$ reste à trouver pour chaque valeur de m .

Au reste, on verra dans l'article suivant comment la fonction

$$F(\beta)$$

est liée à une autre fonction

$$f(\beta),$$

de nature semblable, mais rapportée à la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2.$$

Ce que nous dirons à ce sujet ne sera pas sans intérêt.

