JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 203-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__203_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2$;
PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme à six variables

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2$$

ne peut évidemment représenter ni les entiers impairement pairs, ni les entiers $\equiv 3 \pmod{4}$; mais pour tout autre entier donné, qu'il soit pairement pair, ou bien impair et $\equiv 1 \pmod{4}$, elle fournit au contraire des représentations dont on doit désirer de connaître le nombre. Je me propose de communiquer ici des formules commodes pour cet objet.

Et d'abord j'observe que le cas d'un entier pairement pair ne peut offrir aucune difficulté à ceux qui connaissent ce que nous avons donné (dans le cahier de mai) au sujet de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2.$$

Soit en effet

$$2^{\alpha+2}m$$

un tel entier, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. L'équation

$$2^{\alpha+2}m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2$$

ne pouvant avoir lieu qu'avec une valeur paire de x, posons

$$x = 2x_1;$$

en divisant par 4, il s'ensuivra

$$2^{\alpha}m = x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2,$$

équation parfaitement équivalente à celle que nous avions d'abord. La valeur demandée de

$$\mathrm{N}\left(2^{\alpha+2}m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2\right)$$

ne diffère donc pas de celle de

$$\mathrm{N}\left(2^{\alpha}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2\right)$$

qui est maintenant bien connue et sur laquelle je n'ai pas à revenir.

2. Le cas d'un entier impair $m \equiv 1 \pmod{4}$, c'est-à-dire d'un entier impair de la forme $4g+1$, n'est pas si facile. Il se subdivise en deux autres suivant que g est pair ou impair, c'est-à-dire suivant que l'on a

$$m = 8l + 1,$$

ou bien

$$m = 8l + 5.$$

Mais toujours il faut introduire la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

ou

$$\rho_2(m),$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

Il faut aussi avoir égard, quand elle est possible, à l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier impair i est supposé positif, tandis que s est indifféremment positif, nul ou négatif. On comptera le nombre $\rho(m)$ des solutions de cette équation et on calculera la somme

$$\sum i^2$$

pour l'ensemble des solutions.

Cela posé, si m est de la forme

$$8l+1,$$

la valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

sera égale à

$$\frac{1}{2}\rho_2(m) + \frac{3}{2}\left[2\sum i^2 - m\rho(m)\right],$$

tandis que quand m est de la forme

$$8l+5,$$

cette valeur s'exprime par

$$\frac{1}{2}\rho_2(m) - \frac{1}{2}\left[2\sum i^2 - m\rho(m)\right].$$

On pourrait désirer de n'avoir qu'une seule formule. Alors il faudra dire que pour tout entier m, de la forme $4g+1$, la valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

est

$$\frac{1}{2}\rho_2(m) + \frac{1}{2}[1 + 2(-1)^g]\left[2\sum i^2 - m\rho(m)\right].$$

J'ai cru qu'il valait mieux séparer nettement les entiers $8l+1$ des entiers $8l+5$.

3. On a vu, dans le cahier de mai, que la différence

$$2\sum i^2 - m\rho(m)$$

peut être remplacée par une somme unique. Faisons de toutes les manières possibles

$$2m = j^2 + j'^2,$$

j et j' étant des entiers impairs et positifs; la somme dont il s'agit sera

$$\sum (-1)^{\frac{jj'-1}{2}} jj'.$$

En employant une notation connue de Legendre, que Jacobi a généralisée, cette somme peut encore s'écrire

$$\sum \left(\frac{-1}{jj'}\right) jj'.$$

On peut donc substituer aux formules du n° **2** les formules ci-après :

1° Pour $m = 8l + 1$,

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2) = \frac{1}{2}\rho_2(m) + \frac{3}{2}\sum \left(\frac{-1}{jj'}\right) jj';$$

2° Pour $m = 8l + 5$,

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2) = \frac{1}{2}\rho_2(m) - \frac{1}{2}\sum \left(\frac{-1}{jj'}\right) jj'.$$

Ces dernières formules sont très-élégantes; mais nos anciennes formules sont préférables quant à la facilité du calcul.

4. Appliquons les formules du n° **2** à quelques cas simples; et d'abord supposons que m soit un nombre premier de la forme $8l + 1$. On pourra alors écrire d'une seule manière

$$m = a^2 + 4b^2,$$

a et b étant supposés positifs, a impair, b pair; mais l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

aura deux systèmes de solutions, savoir :

$$i = a, \quad s = b$$

et

$$i = a, \quad s = -b.$$

Comme b n'est pas nul, ces deux systèmes sont distincts. On a donc ici

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2a^2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(m) = m^2 + 1.$$

La valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

s'exprimera donc par

$$\frac{1}{2}(m^2 + 1) + 6a^2 - 3m.$$

Pour un nombre premier m de la forme $8l + 5$, on pourra de même écrire une seule fois

$$m = a^2 + 4b^2,$$

a et b étant positifs, a et b impairs tous deux. On aura encore

$$\rho(m) = 2, \quad \sum i^2 = 2a^2, \quad \rho_2(m) = m^2 + 1.$$

Mais la formule à employer étant différente, on trouvera que la valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

s'exprime ici par

$$\frac{1}{2}(m^2 + 1) - 2a^2 + m.$$

Nous aurons de nouveau à nous servir de la formule propre au cas des entiers $8l + 1$, si nous prenons

$$m = q^2,$$

q étant un nombre premier $\equiv 3 \pmod{4}$. L'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

ne pourra alors avoir lieu qu'en faisant

$$i = q, \quad s = 0.$$

De là

$$\rho(m) = 1$$

et

$$\sum i^2 = q^2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(m) = \rho_2(q^2) = q^4 - q^2 + 1.$$

Il est aisé d'en conclure que la valeur de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

s'exprime cette fois par

$$\frac{1}{2}(m+1)^2,$$

résultat digne de remarque à cause de sa simplicité. On doit avoir, par exemple,

$$\mathrm{N}(9 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2) = 50.$$

Or les identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2$$

et

$$9 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$

dont la seconde comporte des permutations, montrent que, pour l'entier 9, il y a en effet cinquante représentations sous la forme voulue.