JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule $A^2 + 36B^2$, en Y prenant B impair

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 285-288.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__285_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS

CONTENUS DANS LA FORMULE A^2+36B^2, EN Y PRENANT B IMPAIR;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Les nombres premiers m compris dans la formule quadratique

$$A^2+36B^2,$$

en y prenant B impair, jouissent tous de la propriété suivante, à savoir que l'on peut pour chacun d'eux poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m=18x^2+p^{4l+1}y^2,$$

x, y étant des entiers impairs (positifs) et p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m compris dans la formule A^2+36B^2, en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$18.1^2,\ 18.3^2,\ 18.5^2,\ 18.7^2,\ \text{etc.},$$

savoir

$$18,\quad 162,\quad 450,\quad 882,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p;

mais comme on a

$$m \equiv 5 \pmod{8}$$

et

$$m \equiv 1 \pmod{3},$$

l'équation

$$m = 18x^2 + p^{4l+1}y^2$$

entraînera naturellement ces deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{8}$$

et

$$p \equiv 1 \pmod{3}.$$

Ainsi p ne peut être que de la forme $24g + 19$.

2 Les plus petits nombres premiers que la formule

$$A^2 + 36B^2$$

fournisse, en y prenant B impair, sont 37, 61, 157. On a

$$37 = 1^2 + 36.1^2,$$
$$61 = 5^2 + 36.1^2,$$
$$157 = 11^2 + 36.1^2.$$

Or ces nombres, dont on ne peut retrancher que 18, donnent lieu chacun à une équation canonique, attendu que

$$37 = 18.1^2 + 19.1^2,$$
$$61 = 18.1^2 + 43.1^2,$$
$$157 = 18.1^2 + 139.1^2,$$

où 19, 43, 139 sont des nombres premiers.

Viennent ensuite 349, 373 et 397, pour lesquels on a

$$349 = 5^2 + 36.3^2,$$
$$373 = 7^2 + 36.3^2,$$

puis

$$397 = 19^2 + 36.1^2.$$

Ici, en retranchant 18 et 162, on aura deux restes; or un seul de ces restes sera canonique. Ainsi, relativement au nombre premier 349, on a

$$349 - 18 = 331.1^2,$$

équation canonique; mais l'autre équation

$$349 - 162 = 187 = 11.17$$

n'est pas canonique. Pour 373, on a l'équation non canonique

$$373 - 18 = 355 = 5.71$$

et l'équation canonique

$$373 = 18.3^2 + 211.1^2,$$

où 211 est un nombre premier. Enfin, pour le nombre premier 397, l'équation

$$397 = 18.1^2 + 379.1^2$$

est canonique; mais l'équation

$$397 - 162 = 235 = 5.47$$

ne l'est pas.

Considérons enfin les nombres premiers

$$613,\ 661,\ 853,\ 877.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} 613 &= 17^2 + 36.3^2,\\ 661 &= 25^2 + 36.1^2,\\ 853 &= 23^2 + 36.3^2,\\ 877 &= 29^2 + 36.1^2, \end{aligned}$$

ces nombres remplissent les conditions imposées par notre théorème

D'ailleurs, on peut en retrancher

$$18,\ 162,\ 450.$$

On aura donc, pour chacun d'eux, trois restes; et si notre théorème est exact, il faudra que ces trois restes soient canoniques, ou qu'un seul le soit. Le premier cas arrive pour 661, car on a les équations canoniques

$$661 = 18.1^2 + 643.1^2,$$
$$661 = 18.3^2 + 499.1^2,$$
$$661 = 18.5^2 + 211.1^2,$$

où 643, 499, 211 sont des nombres premiers. Mais pour 613, 853 et 877, on n'a qu'un seul reste canonique indiqué par les équations respectives

$$613 - 450 = 163.1^2,$$
$$853 - 162 = 691.1^2,$$
$$877 - \ 18 = 859.1^2.$$

Les autres restes, que voici :

$$613 - \ 18 = 595 = 5.7.17,$$
$$613 - 162 = 451 = 11.41,$$
$$853 - \ 18 = 835 = 5.167,$$
$$853 - 450 = 403 = 13.31,$$
$$877 - 162 = 715 = 5.11.13,$$
$$877 - 450 = 427 = 7.61$$

sont non canoniques. Je ne pousserai pas plus loin ces calculs.