JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Note sur la surface enveloppe des positions d'une surface du second ordre qui tourne autour d'une droite

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 33-42.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__33_0>

NOTE

Sur la surface enveloppe des positions d'une surface du second ordre qui tourne autour d'une droite [*];

PAR M. DE LA GOURNERIE.

Nous appelons *tore enveloppe* la surface de révolution enveloppe des positions d'une surface du second ordre qui tourne autour d'une droite. Sa polaire réciproque par rapport à une sphère dont le centre se trouve sur l'axe de révolution est un autre tore enveloppe : les surfaces du second ordre respectivement enveloppées par les tores sont polaires réciproques l'une de l'autre. Les méridiennes de ces deux tores sont aussi réciproquement polaires par rapport au grand cercle de la sphère directrice contenu dans leur plan.

Les singularités d'une surface de révolution qui peuvent abaisser le degré de sa polaire sont les parallèles doubles, les parallèles de rebroussement et les points coniques sur l'axe. En remarquant que l'ordre d'une surface de ce genre est le même que celui de sa méridienne complète, et que chaque parallèle coupe un plan méridien en deux points, on trouve que la formule qui fait connaître le degré de la polaire réciproque est

$$n' = n(n-1) - 4x - 6y - 2z;$$

n est le degré de la surface, n' celui de la polaire; x, y et z sont les nombres des parallèles doubles, des parallèles de rebroussement et des points coniques. L'ordre de chacune des variétés du tore enveloppe a été, en général, déterminé par des considérations directes, puis vérifié par cette formule.

[*] Cette Note contient quelques-uns des résultats d'un Mémoire qui paraîtra dans le XLII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Nous examinerons presque exclusivement le cas où la surface du second ordre enveloppée est un cône : le tore enveloppe est alors la polaire réciproque du *tore général,* c'est-à-dire de la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace.

Les résultats que nous donnons sur cette importante variété ont été obtenus, en grande partie, par la transformation polaire des propriétés du tore général [*].

Nous supposerons toujours que l'axe de révolution est vertical.

Cas où la surface enveloppée est un cône.

1. La surface enveloppe des positions d'un cône du second ordre qui tourne autour d'une droite est du huitième ordre et de la quatrième classe. Elle s'abaisse au sixième ordre quand le cône donné a un plan tangent horizontal, et quand le plan méridien du sommet du cône est perpendiculaire au plan tangent de cette surface le long de l'une des deux génératrices qu'il contient. Le tore est du quatrième ordre seulement lorsque les sections horizontales du cône sont des cercles, et lorsque le cône se change en un cylindre horizontal ; il se réduit à une surface du second ordre quand l'axe de révolution est dans un des plans principaux du cône.

Nous consacrerons des paragraphes distincts aux variétés qui sont du quatrième ordre et du second ordre.

2. Le tore est doublement inscrit dans un cône de révolution ayant même axe que lui.

Il a quatre cônes asymptotes tous de révolution. Leurs génératrices ont respectivement la même inclinaison que celles des génératrices du cône enveloppé qui sont normales aux sections horizontales de cette surface.

3. Un point de l'axe est le centre de quatre parallèles réels ou de deux

---

[*] *Voir* sur le tore général la Note que nous avons publiée dans le tome VIII de ce journal, et notre Mémoire inséré au XL^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

seulement, suivant qu'il se trouve dans l'intérieur ou à l'extérieur du cône formé par les développées des sections horizontales du cône donné. Tout point de l'axe situé sur ce nouveau cône, est le centre de deux parallèles ordinaires et d'un parallèle de rebroussement. On reconnaît ainsi que le tore a six parallèles de rebroussement dont deux sont imaginaires; les autres peuvent être réels.

4. Les cônes symétriques des cônes enveloppés, par rapport à un plan méridien quelconque, sont, comme eux, circonscrits à la surface. Le tore admet ainsi deux séries de cônes enveloppés égaux, ayant leurs sommets aux divers points d'un même cercle qui est un parallèle double, ou un parallèle isolé.

L'ensemble de deux cônes appartenant aux deux séries, et ayant leurs sommets en un même point, forme le cône circonscrit complet dont le sommet est à ce point.

Le cône circonscrit au tore enveloppe est, en général, du huitième ordre; dans le cas actuel il n'est que du quatrième, parce que son sommet est en un point double de la surface.

5. Le tore possède deux autres parallèdes doubles ou isolés. Tout point de chacun d'eux est le sommet de deux cônes du second ordre circonscrits. La surface a donc trois parallèles doubles et trois systèmes de cônes enveloppés, composés chacun de deux séries.

Un tore étant donné par un cône enveloppé et par l'axe de révolution supposé vertical, le premier parallèle double est décrit par le sommet du cône; le second se trouve dans le plan de celle des sections horizontales de cette surface, dont l'axe non focal rencontre l'axe de révolution. Le troisième est dans le plan de la section horizontale dont l'axe focal rencontre l'axe de révolution.

Les deux premiers parallèles doubles et les cônes qui leur correspondent sont toujours réels. Le troisième est quelquefois réel et quelquefois imaginaire : dans tous les cas les cônes circonscrits qui ont leurs sommets à ses différents points sont imaginaires.

Deux des parallèles doubles peuvent être concentriques.

6. Les sections horizontales des cônes enveloppés des deux systèmes réels sont de genres différents.

Quand les cônes du système donné ont pour sections horizontales des paraboles, les cônes du second système réel se confondent avec eux. Dans ce cas la surface est seulement du sixième ordre (nº **1**). Le parallèle décrit par le sommet du cône est simple ; mais on peut considérer le plan horizontal tangent au cône comme appartenant deux fois au tore enveloppe, et alors le cercle décrit par le sommet du cône est la réunion de deux parallèles doubles.

7. Les cônes enveloppés coupent l'axe aux deux mêmes points.

Les mêmes points de l'axe sont dans la concavité des cônes des deux systèmes réels, et les mêmes points en dehors de ces surfaces.

Les cônes lieux des développées des sections horizontales des cônes enveloppés coupent l'axe aux mêmes points.

8. Toute surface du second ordre inscrite dans le cône de révolution doublement circonscrit, et tangente au tore enveloppe en deux points non situés sur ce cône, est inscrite dans deux cônes enveloppés appartenant aux deux séries d'un même système.

9. Toute surface du second ordre inscrite dans le cône doublement circonscrit, et dans un cône enveloppé, est également inscrite dans un autre cône enveloppé appartenant à la deuxième série du même système.

Caractéristiques. — Lorsque l'on connaît un cône enveloppé, on peut, par des constructions faciles, déterminer le sommet et la trace du second cône enveloppé réel dans une de ses positions, les caractéristiques des deux cônes avec leurs tangentes, et enfin la méridienne.

Nous donnerons sur les caractéristiques le théorème suivant qui est applicable toutes les fois que la trace horizontale du cône enveloppé est une courbe algébrique.

10. La section horizontale du cône enveloppé étant une courbe de l'ordre m et de la classe n, la projection horizontale de la caractéristique est une courbe de l'ordre $(m+n)$ qui a deux points multiples, l'un de l'ordre m à la trace de l'axe, l'autre de l'ordre n à la projection du sommet du cône.

La surface de révolution enveloppe du cône est de l'ordre $2(m+n)$.

Tore à conique méridienne.

11. Quand un cône dont les sections horizontales sont circulaires tourne autour d'une droite verticale, la surface de révolution enveloppe de ses positions a pour méridienne une hyperbole dans laquelle le diamètre conjugué aux cordes horizontales n'est pas transverse.

Les cônes enveloppés du second système sont les cylindres horizontaux tangents à la surface le long des hyperboles méridiennes.

La surface possède un seul parallèle double qui est décrit par le sommet du cône. Les deux autres parallèles doubles se changent en parallèles isolés de rayon infini.

12. Quand une conique tourne autour d'un axe situé dans son plan et supposé vertical, la surface de révolution qu'elle engendre enveloppe les positions qu'occupe en tournant un cône dont les sections horizontales sont des cercles. Ce cône n'est réel que quand la conique est une hyperbole, et que le diamètre conjugué aux cordes horizontales n'est pas transverse.

On voit que l'on obtient une même surface dans les deux dispositions que nous avons indiquées (n° **1**) comme donnant naissance à un tore enveloppe du quatrième ordre.

13. La conique qui a l'un de ses axes sur l'axe de révolution, et dont les cordes horizontales ont la même longueur que celles de la conique méridienne, partage en parties égales les cordes horizontales comprises entre les arcs non homologues des deux coniques qui forment la méridienne complète.

La considération de cette courbe, et principalement de ses asymptotes, conduit à des constructions très-faciles pour déterminer le cône enveloppé quand on connaît la méridienne, ou cette courbe quand le cône est donné.

14. Lorsque le cône est remplacé par un cylindre, les sections horizontales restant circulaires, l'axe non transverse de l'hyperbole méridienne devient parallèle à l'axe de révolution.

Si l'on diminue progressivement le rayon des sections du cylindre, les deux hyperboles qui composent la méridienne complète se rapprochent; elles se superposent quand le rayon est nul : le tore est alors un hyperboloïde à une nappe, et les cylindres enveloppés des deux séries, réduits à des droites, forment les génératrices rectilignes des deux systèmes.

La projection horizontale de la courbe de contact du cylindre avec le tore est une conchoïde.

Surfaces de révolution du second ordre.

15. Lorsqu'un cône du second ordre tourne autour d'une droite située dans l'un de ses plans principaux, la surface enveloppe se compose de deux fois une zone d'une surface du second ordre. Les courbes de contact des cônes des deux systèmes sont deux coniques non superposables et tangentes aux deux parallèles qui limitent la zone. On peut considérer ces courbes comme des génératrices, et par suite la zone comme un tore général.

16. Les deux coniques tangentes à deux mêmes parallèles que l'on peut tracer sur une surface du second ordre sont telles, que les segments interceptés sur leurs axes par leurs foyers sont égaux entre eux, et égaux à la distance des parallèles mesurée sur une génératrice rectiligne, quand la surface est un hyperboloïde à une nappe.

17. Lorsque les coniques sont de même genre, leurs projections horizontales jouissent, par rapport à la trace de l'axe, des mêmes propriétés réciproques que les projections des coniques génératrices d'un tore général [*].

18. Lorsque la surface est un hyperboloïde à une nappe, les coniques sont de genres différents : les projections horizontales de ces lignes et du segment de la génératrice rectiligne jouissent, par rapport à la trace de l'axe prise pour origine, des propriétés suivantes :

Le grand axe de l'ellipse est égal à la somme des rayons vecteurs des foyers de l'hyperbole;

---

[*] *Voir* l'article 64 de notre Mémoire dans le *Journal de l'École Polytechnique.*

L'axe transverse de l'hyperbole est égal à la différence des rayons vecteurs des foyers de l'ellipse;

Le segment de l'axe compris entre les foyers dans l'une et l'autre courbe a une longueur égale à la projection de la génératrice rectiligne comprise entre les deux parallèles;

Les hypoténuses des triangles construits sur le rayon vecteur du centre et le demi-axe focal, dans les deux courbes, sont égales entre elles, et aussi à l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur la moitié de la projection de la génératrice, et sur le rayon vecteur du point milieu de cette droite;

L'hypoténuse du triangle rectangle construit sur le rayon vecteur du centre de l'ellipse et sur son demi-axe focal, est égal au second côté du triangle rectangle qui a pour hypoténuse le rayon vecteur du centre de l'hyperbole, et pour premier côté la longueur réelle de la moitié de l'axe non transverse de cette courbe; elle est encore égale au rayon vecteur du point milieu du segment de la génératrice;

Les normales abaissées de la trace de l'axe sur les deux coniques sont égales deux à deux; pour chaque courbe deux des normales sont égales à la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le segment de la génératrice; les deux autres sont respectivement égales aux rayons vecteurs des extrémités de ce segment.

Cas où la surface enveloppée est du second ordre, mais d'ailleurs quelconque.

19. Lorsqu'une surface du second ordre tourne autour d'une droite, la surface enveloppe de ses positions est du huitième ordre et de la huitième classe; elle a deux points coniques, deux parallèles doubles et six parallèles de rebroussement. Il existe sur l'axe deux points qui sont les sommets de cônes doublement circonscrits à la surface.

Les surfaces du second ordre symétriques des surfaces enveloppées par rapport à un plan méridien quelconque, sont, comme elles, inscrites dans le tore qui admet ainsi deux séries de surfaces du second ordre enveloppées égales.

20. Quand une surface du second ordre dont les sections horizontales sont circulaires tourne autour d'une droite verticale, l'enveloppe de ses positions est une surface du quatrième ordre et de la huitième classe, qui a deux points coniques et qui ne possède, en général, ni parallèle double, ni parallèle de rebroussement.

21. Quand une surface du second ordre tourne autour d'une droite située dans un de ses plans principaux, l'enveloppe de ses positions comprend : 1° un tore général qui a pour méridienne la section de la surface par le plan dans lequel se trouve l'axe ; 2° une surface du second ordre qui touche l'enveloppée le long d'une conique.

Chacune de ces deux surfaces peut être imaginaire. Lorsque la seconde existe, son contact avec l'enveloppée est quelquefois partiellement ou même totalement idéal.

Observations sur le problème des coniques tangentes à quatre cercles concentriques.

Un point et une conique étant donnés sur un plan, on peut se proposer de déterminer d'autres coniques telles, que les quatre normales qui leur sont abaissées du point aient les mêmes longueurs que les quatre normales abaissées du même point sur la conique donnée. Cette courbe et celles que l'on cherche sont tangentes à quatre mêmes cercles concentriques.

Il n'y a que quatre conditions pour déterminer les coniques, et par conséquent le problème est indéterminé ; mais quand on aura une de ces courbes on pourra la faire tourner autour du point, et la renverser dans des positions symétriques par rapport aux droites qui passent par le point, sans qu'elle cesse de toucher les quatre cercles. Le problème consiste donc à déterminer les coniques distinctes, c'est-à-dire non superposables. On peut exiger que leurs centres soient sur un certain diamètre des cercles : ce sera la cinquième condition.

22. Nous supposerons d'abord que la conique donnée n'a aucun de ses axes dirigé vers le point fixe, qu'elle ne passe pas par ce point et qu'elle a un centre.

Dans ce cas, il existe toujours trois coniques réelles qui satisfont aux conditions du problème; en ajoutant celle qui est donnée, on a quatre coniques tangentes à quatre cercles concentriques. Ce sont :

A une ellipse ayant le point fixe du côté de sa concavité;
B une ellipse ayant le point fixe du côté de sa convexité;
C une hyperbole ayant le point fixe du côté de sa concavité;
D une hyperbole ayant le point fixe du côté de sa convexité.

23. Les deux ellipses sont les projections horizontales de deux coniques génératrices d'un tore général, dont l'axe vertical a sa trace horizontale au point fixe. Il en est de même des deux hyperboles.

L'ellipse A et l'hyperbole C sont les traces de deux cônes enveloppés d'un même tore enveloppe dont l'axe a sa trace au point fixe. La même relation existe entre l'ellipse B et l'hyperbole D.

24. Si l'on prend les polaires réciproques des quatre courbes par rapport à un cercle ayant son centre au point fixe ou origine, on aura quatre coniques tangentes à quatre nouveaux cercles concentriques :
A′ une ellipse ayant le point fixe du côté de sa concavité;
B′ une hyperbole ayant le point fixe du côté de sa concavité;
C′ une ellipse ayant le point fixe du côté de sa convexité;
D′ une hyperbole ayant le point fixe du côté de sa convexité.

Les courbes de même genre A′ et C′ d'une part, B′ et D′ de l'autre, ont entre elles les relations qui ont été indiquées dans le premier alinéa du n° **23**.

Les courbes A′ et B′ sont les traces de cônes enveloppés d'un même tore enveloppe. Il en est de même de C′ et D′.

25. Quand le point fixe est sur la conique donnée, les courbes B et D se confondent respectivement avec A et C. En prenant les polaires réciproques, comme il a été expliqué au numéro précédent, on trouve deux coniques tangentes à trois mêmes cercles concentriques et à la droite de l'infini :
A une ellipse passant par le point fixe;
C une hyperbole passant par le point fixe;
A′ une parabole ayant le point fixe du côté de sa concavité;
C′ une parabole ayant le point fixe du côté de sa convexité.

A et C sont les traces de cônes enveloppés d'un même tore enveloppe; A′ et C′ les projections de coniques génératrices d'un même tore général.

26. Quand la conique donnée a un axe dirigé vers le point fixe, deux des quatre cercles concentriques sont confondus en un seul. Il faut alors déterminer des coniques ayant avec un cercle un contact double (réel ou idéal), et un contact simple avec deux autres cercles. On trouve quatre courbes, y compris celle qui est donnée, et de plus des systèmes de points et de droites qui peuvent être assimilés à des coniques.

Les quatre coniques ont deux à deux les relations qui existent entre les projections des coniques qui engendrent une zone d'une surface du second ordre, et entre les traces de cônes qui sont circonscrits à une semblable zone. Deux de ces quatre courbes sont quelquefois imaginaires.