JMPA

Prix proposé par l'Académie pontificale des Nuovi Lincei

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 350-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__350_0>

PRIX PROPOSÉ

PAR

L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES *NUOVI LINCEI.*

PROGRAMME POUR LE PRIX CARPI.

L'Académie, dans le but de conférer le prix annuel fondé par la généreuse disposition testamentaire d'un de ses membres ordinaires, feu le chevalier Dr Pierre Carpi, propose de développer le thème suivant.

THÈME.

Exposer une méthode au moyen de laquelle on puisse déterminer toutes *les valeurs rationnelles de x capables de rendre un carré ou un cube parfait le polynôme* $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, *pour des valeurs entières de* A, B, C, D, E, *pourvu qu'une ou plusieurs de ces valeurs de x existent réellement, et qui, en cas contraire, en fasse connaître l'impossibilité.*

ÉCLAIRCISSEMENTS.

Une méthode due au célèbre Pierre de Fermat pour rendre un carré

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

ou un cube l'expression

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

se trouve exposée par le P. Jacques de Billy dans son ouvrage intitulé : *Doctrinæ analyticæ inventum novum* (p. 30 et 31 de l'édition intitulée : *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus, etc.* Tolosæ MDCLXX). Cette méthode se trouve aussi exposée par Léonard Euler, dans les chapitres VIII, IX, et X du tome II de son ouvrage intitulé : *Einleitung der Algebra,* traduit en français sous le titre *Eléments d'Algèbre.*

Le tome XI des *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg* (année 1830) contient plusieurs Mémoires posthumes d'Euler, relatifs à l'analyse de Diophante, dont l'un est intitulé : *Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi*. Cette méthode, en la considérant bien, n'est autre, dit Jacobi, que celle de la *multiplication des intégrales elliptiques*, méthode déjà proposée par Euler même dans ses *Institutions de Calcul intégral*, et ailleurs, pour résoudre algébriquement l'équation transcendante

$$\Pi(y) = n\Pi(x),$$

où

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Cette importante observation de Jacobi se trouve dans le tome XIII du *Journal de Mathématiques de M. A.-L. Crelle* (année 1835), à l'article : *De usu theoriæ integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in Analysi Diophantea*.

La méthode donnée par Fermat pour rendre un carré

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$$

est exposée aussi dans le volume intitulé : *Théorie des nombres* (3e édition), par Adrien-Marie Legendre, t. II; Paris, 1830 (p. 123 à 125).

Dans un Mémoire de Lagrange intitulé : *Sur quelques problèmes de l'Analyse de Diophante*, et inséré dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, année 1777 (Berlin, 1779), est donnée aussi une méthode pour résoudre en nombres rationnels les équations générales de troisième et quatrième degré entre deux indéterminées x, y.

Cependant ces méthodes sont imparfaites : 1° parce qu'elles supposent déjà une solution connue; 2° parce qu'il n'est pas prouvé qu'elles fournissent toutes les solutions possibles. Il serait par conséquent à désirer qu'on en trouvât une autre qui n'eût besoin de la connaissance d'aucune solution, fît connaître si le problème est possible ou non, et dans les cas où il est possible, en donnât toutes les solutions; ce qui serait d'un avantage remarquable dans la théorie des nombres, ou analyse indéterminée, et lui frayerait le chemin à d'importants progrès, n'ayant été jusqu'à présent satisfait, sauf dans des cas assez particuliers traités par de savants géomètres, aux conditions sus-énoncées. Cela pourrait aussi être utile au progrès d'autres parties des sciences mathématiques, comme on peut facilement le voir par la relation que Jacobi a indiquée dans son écrit cité ci-dessus entre le problème exposé et la doctrine des fonctions elliptiques.

CONDITIONS.

1° Les Mémoires sur le thème proposé devront être rédigés en italien, ou en latin, ou en français : nulle autre langue n'est admise.

2° Chaque Mémoire portera sur son frontispice une épigraphe, qui sera répétée à l'extérieur d'une enveloppe cachetée dans laquelle se trouveront le nom et l'adresse de l'auteur.

3° On ouvrira seulement l'enveloppe correspondante au Mémoire qui aura obtenu le prix.

4° Si les auteurs qui auront obtenu une mention honorable désirent que l'Académie publie leurs noms, il faudra qu'ils en fassent la demande dans les quatre mois qui suivront le jour dans lequel le prix aura été décerné; ce terme expiré, les enveloppes seront brûlées sans être décachetées.

5° L'Académie a décidé que, à l'exception de ses trente membres ordinaires, chacun, quelle que soit sa nationalité, pourra concourir pour ce prix.

6° Chaque Mémoire avec l'enveloppe cachetée correspondante devra être envoyé *franco* à l'Académie, avant le dernier jour du mois d'octobre 1866, date de la clôture du concours.

7° Le prix sera décerné par l'Académie dans le mois de janvier 1867 et consistera en une médaille d'or de la valeur de *cent écus romains*.

8° Le Mémoire couronné sera publié, entièrement ou par extrait, dans les *Atti* de l'Académie, et l'auteur en recevra cinquante exemplaires.