JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TCHÉBICHEF

Sur les fractions continues algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 353-358.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__353_0>

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES;

PAR M. TCHÉBICHEF.

Lettre adressée à M. Braschman et lue le $\frac{18}{30}$ septembre 1865 dans la séance de la Société Philomathique à Moscou [*].

13 septembre 1865.

Monsieur,

Parmi les diverses applications des fractions continues algébriques qu'on a faites jusqu'à présent, celle que l'on rencontre dans l'*interpolation d'après la méthode des moindres carrés* se distingue par un caractère tout particulier : dans ce cas, les fractions continues servent à déterminer les termes dans certains développements de la fonction en série. Cette interpolation et toutes les séries qui en résultent n'embrassent encore qu'une partie minime du champ d'un tel usage des fractions continues, et qui est peut-être aussi vaste que celui d'usage ordinaire de ces fractions dans l'analyse. En effet, à l'ordinaire elles servent à trouver les systèmes des polynômes X, Y, qui rendent la différence $u\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ la plus proche possible de zéro, en supposant bien entendu que la fonction u soit développable en série ordonnée suivant les puissances entières et décroissantes de la variable, et que le degré d'approchement se détermine par sa plus haute puissance dans le reste. Pour résoudre la question concernant l'*interpolation d'après la méthode des moindres carrés* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, 2e série, t. III, p. 235), il s'agissait de faire tendre le plus possible la différence de la forme $u\mathrm{X}-\mathrm{Y}$, non pas vers

[*] Cette Société, qui s'est formée il y a une année sous la présidence de M. Braschmann, procède maintenant à l'impression des Mémoires que ses Membres ont présentés dans le courant de cette année.

zéro, mais vers une certaine fonction (vers $\frac{1}{x - \mathrm{X}}$, d'après la notation du passage cité), et c'est ainsi qu'on est arrivé à un nouvel usage des fractions continues algébriques. Or ce cas particulier d'approchement de l'expression $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ à une fonction donnée n'est pas le seul qui se présente dans l'analyse et qui demande un nouvel usage des fractions continues algébriques : quelle que soit la fonction donnée v, la détermination des polynômes X, Y, qui rendent l'expression $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ la plus proche de v, se résout aussi à l'aide des fractions continues, et par des formules analogues à celles que l'on trouve dans l'*interpolation d'après la méthode des moindres carrés*. Cette question sur la détermination des polynômes X, Y dans l'expression $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ est d'autant plus intéressante, que par sa simplicité elle se place immédiatement après celle que l'on résout ordinairement au moyen des fractions continues algébriques, c'est-à-dire où il s'agit seulement de rendre l'expression $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ aussi proche de zéro qu'il est possible.

Soit

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$$

la fraction continue qui résulte du développement de la fonction u, et

$$\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{Q}_1} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{Q}_2} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}, \quad \frac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{Q}_3} = \frac{\mathrm{P}_2 q_2 + \mathrm{P}_1}{\mathrm{Q}_2 q_2 + \mathrm{Q}_1}, \ldots$$

ses fractions convergentes. Si l'on convient de désigner par E la partie entière des fonctions, les polynômes X, Y, qui rendent la différence $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ la plus proche de la fonction v, seront donnés par les séries suivantes :

$$\mathrm{X} = (\mathrm{E}q_1\mathrm{Q}_1 v - q_1\mathrm{EQ}_1 v)\mathrm{Q}_1 - (\mathrm{E}q_2\mathrm{Q}_2 v - q_2\mathrm{EQ}_2 v)\mathrm{Q}_2 + \ldots,$$
$$\mathrm{Y} = -\mathrm{E}v + (\mathrm{E}q_1\mathrm{Q}_1 v - q_1\mathrm{EQ}_1 v)\mathrm{P}_1 - (\mathrm{E}q_2\mathrm{Q}_2 v - q_2\mathrm{EQ}_2 v)\mathrm{P}_2 + \ldots.$$

Ces séries sont finies ou infinies en même temps que la série des fractions convergentes

$$\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{Q}_1}, \quad \frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{Q}_2}, \quad \frac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{Q}_0}, \ldots,$$

et leurs termes, comme il n'est pas difficile de le remarquer, présentent des polynômes dont les degrés vont en croissant. Arrêtées aux termes correspondants, ces séries fournissent pour X, Y des valeurs entières et de degrés plus ou moins élevés, suivant le nombre de termes que l'on prend, et en tout cas *ces valeurs de* X *et* Y *sont celles qui rendent la différence* $u\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ *aussi proche de* v *que cela est possible avec des fonctions entières de mêmes degrés que* X *et* Y, *et aussi avec des fonctions de degrés plus élevés, mais inférieurs aux degrés des fonctions que l'on obtient en prenant dans les expressions de* X *et* Y *un terme de plus.*

Les valeurs de X et Y qui jouissent de cette propriété remarquable résultent du développement de la fonction v suivant les valeurs des fonctions

$$\mathrm{R}_1 = u\mathrm{Q}_1 - \mathrm{P}_1, \quad \mathrm{R}_2 = u\mathrm{Q}_2 - \mathrm{P}_2, \quad \mathrm{R}_3 = u\mathrm{Q}_3 - \mathrm{P}_3, \ldots,$$

dont les degrés sont au-dessous de zéro et vont en décroissant. Un tel développement de la fonction v est facile à obtenir. Si l'on ôte de v sa partie entière $\mathrm{E}v$, et que l'on divise le reste par R_1, le nouveau reste par R_2, et ainsi de suite, il est clair que les quotients de ces divisions, multipliés respectivement par $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots$, et ajoutés à $\mathrm{E}v$, donneront la valeur même de la fonction v exacte au dernier reste près. Or le développement de v que l'on trouve de cette manière présente, comme il est facile de s'en assurer, la série suivante :

$$v = \mathrm{E}v + (\mathrm{E}q_1\mathrm{Q}_1 v - q_1\mathrm{EQ}_1 v)\,\mathrm{R}_1 - (\mathrm{E}q_2\mathrm{Q}_2 v - q_2\mathrm{EQ}_2 v)\,\mathrm{R}_2 + \ldots,$$

où les termes sont certaines fonctions dont les degrés vont en décroissant.

Dans le cas le plus ordinaire, où les dénominateurs $q_1, q_2, q_3, \ldots$ de la fraction continue

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots}}}$$

sont tous du premier degré, cette série se simplifie beaucoup; tous les facteurs qui accompagnent les fonctions R_1, R_2, R_3,... deviennent constants, et leurs valeurs se déterminent très-aisément : ces facteurs se réduisent aux produits

$$A_1 L_1, \quad A_2 L_2, \quad A_3 L_3, \ldots,$$

où A_1, A_2, A_3,... désignent les coefficients de x dans les dénominateurs q_1, q_2, q_3,... et L_1, L_2, L_3,... les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les produits

$$Q_1 v, \quad Q_2 v, \quad Q_3 v, \ldots.$$

D'où résulte dans le cas en question la série suivante, pour le développement de la fonction v :

$$v = \mathrm{E} v + A_1 L_1 R_1 - A_2 L_2 R_2 + \ldots,$$

et ces valeurs de X et Y, pour rapprocher la différence $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ le plus possible de v :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= A_1 L_1 Q_1 - A_2 L_2 Q_2 + \ldots, \\ \mathrm{Y} &= -\mathrm{E} v + A_1 L_1 P_1 - A_2 L_2 P_2 + \ldots. \end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction v peut être représentée par la somme

$$\psi(x) + \frac{k_1}{x - x_1} + \frac{k_2}{x - x_2} + \frac{k_3}{x - x_3} + \ldots,$$

$\psi(x)$ étant une fonction entière, et k_1, k_2, k_3,..., x_1, x_2, x_3.... des constantes, on trouve, en posant

$$Q_1 = \psi_1(x), \quad Q_2 = \psi_2(x), \quad Q_3 = \psi_3(x), \ldots,$$

les expressions suivantes des quantités L_1, L_2, L_3,... :

$$\begin{aligned} L_1 &= k_1 \psi_1(x_1) + k_2 \psi_1(x_2) + k_3 \psi_1(x_3) + \ldots = \sum k_i \psi_1(x_i), \\ L_2 &= k_1 \psi_2(x_1) + k_2 \psi_2(x_2) + k_3 \psi_2(x_3) + \ldots = \sum k_i \psi_2(x_i), \\ L_3 &= k_1 \psi_3(x_1) + k_2 \psi_3(x_2) + k_3 \psi_3(x_3) + \ldots = \sum k_i \psi_3(x_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour ces valeurs de L_1, L_2, L_3,... les séries précédentes deviennent

$$v = Ev + A_1 \sum k_i \psi_1(x_i) R_1 - A_2 \sum k_i \psi_2(x_i) R_2 + \ldots,$$

$$X = \quad A_1 \sum k_i \psi_1(x_i) Q_1 - A_2 \sum k_i \psi_2(x_i) Q_2 + \ldots,$$

$$Y = Ev + A_1 \sum k_i \psi_1(x_i) P_1 - A_2 \sum k_i \psi_2(x_i) P_2 + \ldots,$$

où

$$\psi_1(x) = Q_1, \quad \psi_2(x) = Q_2, \ldots$$

Dans le cas particulier où la fonction u se réduit à un seul terme

$$\frac{1}{x-a},$$

on trouve, d'après la première de ces formules, le développement suivant de $\frac{1}{x-a}$,

$$\frac{1}{x-a} = A_1 \psi_1(a) R_1 - A_2 \psi_2(a) R_2 + \ldots,$$

où chaque terme présente le produit d'une fonction de a par une fonction de x, comme cela a lieu dans la série qui résulte du développement de $(x-a)^{-1}$ d'après la formule de Newton.

En faisant dans les formules précédentes

$$u = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n} = \sum \frac{1}{x-x_i},$$

$$v = \frac{F(x_1)}{x-x_1} + \frac{F(x_2)}{x-x_2} + \ldots + \frac{F(x_n)}{x-x_n} = \sum \frac{F(x_i)}{x-x_i},$$

on trouve les valeurs des polynômes X et Y par lesquelles la différence

$$\sum \frac{1}{x-x_i} \cdot X - Y,$$

s'approche le plus possible de $\sum \frac{F(x_i)}{x-x_i}$, et comme un tel rapprochement constitue la condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme X réduise au *minimum* la somme

$$\sum [X - F(x)]^2$$

(ce qui n'est pas difficile à montrer), il s'ensuit que l'expression de X, déterminée de cette manière, présente la formule d'*interpolation d'après la méthode des moindres carrés*.

Je n'insisterai plus sur le parti qu'on peut tirer du développement en série suivant les fonctions déterminées par le moyen des fractions continues algébriques; ce que je viens de dire suffit pour faire voir combien d'intérêt présente le sujet vers lequel m'ont porté vos leçons et vos précieux entretiens.

Agréez l'assurance d'une estime profonde,

P. TCHÉBICHEF.