JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 412-416.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__412_0>

NOTE

sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Dans la livraison du *Journal de Mathématiques* pour le mois d'avril 1861, j'ai introduit, pour la première fois je crois, dans la Géométrie pure, la considération des *séries* ou *systèmes* de courbes, assujetties à autant de conditions communes moins une, qu'il en faut pour déterminer une courbe de leur degré, et j'ai donné plusieurs formules générales concernant ces séries ou systèmes.

Ces formules sont exactes, et il n'y a même pas lieu d'invoquer à leur égard les conditions restrictives dont j'ai cru devoir les entourer plus tard, dans un moment de précipitation justifiée par diverses circonstances. (*Voir* une Note insérée en 1863 dans le *Journal de Mathématiques*.)

Cependant leur démonstration reposait sur un *lemme* qui a excité quelques doutes. En outre, plusieurs théorèmes, quand on les appliquait aux sections coniques, offraient d'apparentes anomalies dont je ne sus pas rendre compte; ce qui était de nature à entretenir l'incertitude.

Depuis cette époque, les anomalies dont il s'agit ont été expliquées par M. Chasles, dans l'un de ses beaux Mémoires sur les systèmes de courbes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pour 1864). Elles tiennent à ce que, dans tout système de coniques, il y a un certain nombre de ces courbes qui se réduisent exceptionnellement à deux droites ou à deux points (coniques infiniment petites et coniques infiniment aplaties). Ces coniques exceptionnelles sont, à plusieurs égards, étrangères à la question, comme on a coutume de dire en analyse, et pourtant il faut les compter, si l'on veut retrouver le nombre théorique donné par les formules générales qui les comprennent toutes indistinctement.

Cette difficulté levée, il ne restait plus qu'à asseoir les formules dont il s'agit sur une base plus assurée. Car d'ailleurs, dans les courbes des degrés supérieurs au second, les cas d'apparente exception ne se présentent pas [*] en général comme dans les coniques. Tel est l'objet de la démonstration suivante, qui ne saurait plus laisser subsister aucune indécision.

Soient : m le degré commun des courbes de la série ou du système; μ, ν les deux quantités que M. Chasles a nommées les *caractéristiques* du système, et qui expriment, l'une le nombre des courbes qui passent par un point quelconque du plan, l'autre le nombre des courbes qui touchent une droite quelconque.

J'ai donné dans l'article précité de 1861, sous des notations différentes, la relation générale

$$\nu = 2(m-1)\mu.$$

Voici une démonstration nouvelle et directe de ce théorème important, indépendante du lemme contesté dont je le faisais dépendre alors.

Soit L une droite quelconque. Par un point quelconque a de cette droite, dont l'abscisse comptée d'une origine fixe sera représentée par x, il passe μ courbes du système, par hypothèse et définition. Et, comme chacune de ces μ courbes rencontre L en $m-1$ autres points b, dont nous appellerons les abscisses y, il s'ensuit qu'à un point a il correspond, sur L, $(m-1)\mu$ points b, et réciproquement.

On a donc, entre x et y, une relation telle que

$$x^{m(\mu-1)}(Ay^{(m-1)\mu}+By^{(m-1)\mu-1}+\ldots)+x^{m(\mu-1)-1}(A_1y^{(m-1)\mu}+\ldots)+\ldots=0.$$

---

[*] *Voir*, p. 415-416, la preuve de cette assertion.

Toutes les fois que $x = y$, une courbe du système touche L. Donc les abscisses des points de tangence sont les racines de l'équation

$$\mathrm{A}x^{2(m-1)\mu} + (\mathrm{B} + \mathrm{A}_1)\, x^{2(m-1)\mu - 1} + \ldots = 0,$$

et par conséquent ces points sont au nombre de $2(m-1)\mu$, à moins que le coefficient A ne soit nul; ce qui ne peut avoir lieu généralement. Car l'équation entre x et y peut être mise sous la forme

$$x^{(m-1)\mu}\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{y} + \ldots\right) + \ldots = 0,$$

et comme si l'on suppose le point b à l'infini il doit y avoir, dans ce cas aussi bien que dans tous les autres, $(m-1)\mu$ points a correspondant à b, le terme $\mathrm{A}x^{(m-1)\mu}$ existe nécessairement dans cette équation.

On a donc la relation

$$\nu = 2(m-1)\mu,$$

qu'il s'agissait de démontrer.

De là découlent, dans le Mémoire précité, diverses formules, exactes aussi par conséquent, et notamment la suivante, qui fait connaître le nombre des courbes du système qui touchent une courbe donnée du degré r, savoir

$$\mathrm{N} = \mu r (r + 2m - 3) \; [*].$$

On en conclut surtout cette autre conséquence plus importante :

Tout système de courbes peut être indistinctement *caractérisé de deux manières différentes. Quelles que soient les conditions communes aux courbes qui le composent, il suffit toujours de deux quantités indépendantes (indices ou caractéristiques) pour le définir complétement.*

---

[*] Cette formule peut aussi s'écrire

$$\mathrm{N} = r[(r-1)\mu + 2(m-1)\mu] = r[(r-1)\mu + \nu];$$

c'est sous cette dernière forme que M. Chasles l'a donnée dans son premier Mémoire.

Ces données sont, soit les deux caractéristiques indépendantes μ, ν, *comme l'a fait M. Chasles dans ses derniers Mémoires, soit un seul indice* μ (*ou* ν) *conjointement avec le degré* m *des courbes, ainsi que je le proposais en* 1861.

Ces deux définitions sont aussi générales l'une que l'autre; elles ont leurs avantages propres. Néanmoins celle qui fait usage des deux caractéristiques μ, ν, sans l'intervention du degré des courbes, offre, sinon plus de généralité, du moins plus de symétrie et de simplicité dans la notation, et probablement plus de fécondité. On sait tout le parti que M. Chasles a su en tirer, dans la théorie des coniques, sur le plan et dans l'espace.

Je terminerai en disant que la relation fondamentale

$$\nu = 2(m-1)\mu$$

s'applique aux systèmes de surfaces. Mais alors la lettre ν exprime le nombre de ces surfaces qui touchent une droite. Celles du second degré présentent d'ailleurs les mêmes anomalies apparentes que les coniques, à cause des couples de plans et de points qui s'y rencontrent et qui sont des *quasi-surfaces* au même titre que les coniques exceptionnelles sont des *quasi-coniques*, ainsi que M. Chasles les a appelées.

Saïgon, le 14 novembre 1865.

Nota. — Voici la cause de la différence, signalée page 413, ligne 11, qui existe entre les coniques et les courbes de tous les autres degrés.

Dans les coniques, le nombre des conditions qui déterminent un système, c'est-à-dire quatre, est précisément égal à la somme des conditions qui déterminent deux droites (ou deux points) auxquelles une conique peut accidentellement se réduire; tandis que, dans les degrés supérieurs au second, le nombre des conditions qui déterminent un système est *toujours* supérieur à la somme des nombres de conditions nécessaires pour déterminer les courbes d'ordre inférieur dans lesquelles une des courbes du système pourrait accidentellement se décomposer.

En d'autres termes, si $m = n + p + r + \ldots$, on a toujours

$$\frac{m(m+3)}{2} - 1 > \frac{n(n+3)}{2} + \frac{p(p+3)}{2} + \frac{r(r+3)}{2} + \ldots,$$

excepté pour le seul cas de $m = 2$.

Et cela est cause que, dans la théorie générale des courbes algébriques, les coniques forment, non pas seulement un cas individuel, mais encore, à beaucoup d'égards, un cas *particulier* de la question.

FIN DU TOME DIXIÈME (2^e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint Germain, 10, près l'Institut.