JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DESPEYROUS

Sur la détermination des nombres de valeurs que prennent les fonctions par les permutations des lettres qu'elles renferment

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 55-64.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__55_0>

SUR LA DÉTERMINATION

Des nombres de valeurs que prennent les fonctions par les permutations des lettres qu'elles renferment;

PAR M. DESPEYROUS.

Considérons une fonction d'un nombre quelconque m de variables indépendantes $a, b, c, \ldots, k, l$, et supposons que l'on échange entre elles ces variables de toutes les manières possibles. Si la fonction est symétrique, elle ne changera pas de valeur par suite d'un échange quelconque de ces lettres; mais si elle n'est pas symétrique, elle prendra par suite de ces échanges un nombre de valeurs distinctes qui dépendra de la forme de cette fonction, nombre qui sera évidemment égal au plus au nombre total des permutations $1.2.3\ldots m$ qu'offrent ces m lettres. Entre ces limites, l'unité et le produit $1.2.3\ldots m$, il y a plusieurs nombres qui ne peuvent, dans aucun cas, représenter le nombre de valeurs distinctes que prennent les fonctions par les permutations des lettres qu'elles renferment.

De là résulte l'importance de la solution des deux questions suivantes, corrélatives l'une à l'autre : « Quels sont les nombres de valeurs distinctes que prennent les fonctions par les permutations des variables qu'elles renferment? Comment peut-on former des fonctions dont les nombres de leurs valeurs distinctes soient les nombres trouvés? »

L'Académie des Sciences proposa, en 1858, pour sujet du grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1860, la solution de ce double problème, et elle ajouta que « sans exiger des concurrents une solution complète, qui serait sans doute bien difficile, elle pourrait accorder le prix à l'auteur du Mémoire qui ferait faire un progrès

» notable à cette théorie [*]. » En mars 1860, M. Serret, rapporteur du résultat de ce concours, déclara qu'il n'y avait pas lieu à décerner le prix, et la question fut retirée [**].

Cauchy, celui de tous les géomètres qui s'est le plus occupé de cette théorie, a fait dépendre la solution de la double question proposée de la détermination des nombres de valeurs distinctes des fonctions *transitives* [***], détermination qui est loin d'être complète malgré les travaux récents des auteurs qui ont suivi la marche tracée par ce grand géomètre. Nous avons attaqué la question avec des principes très-différents : ceux dont nous nous sommes servi se rattachent à un ordre d'idées entièrement nouveau, à la *théorie de l'ordre,* créée par Poinsot : « théorie, dit ce géomètre, neuve et profonde, dont les éléments sont à peine connus, mais qu'on doit regarder comme le » premier fondement de l'Algèbre et la source naturelle des principales propriétés des nombres [****] ».

Nous faisons en effet dépendre la solution du double problème proposé de *toutes* les classifications possibles des permutations de m lettres en groupes de permutations associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer; et ces classifications sont déduites de la théorie de l'ordre, comme nous le montrerons bientôt.

Le travail actuel n'a qu'un but, celui de démontrer le théorème suivant et sa réciproque : Si une fonction de m lettres a s valeurs distinctes, par suite des échanges de ces lettres, on peut partager les permutations qu'elles produisent en s groupes de permutations *inséparables,* quel que soit l'échange de ces lettres. *Réciproquement*, si toutes les permutations de m lettres sont partagées en s groupes de permutations *inséparables*, quel que soit l'échange de ces lettres, il existe des fonctions de m lettres dont le nombre de valeurs distinctes est égal à ce nombre s; et nous donnons le moyen d'en former.

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XLVI, p. 302.
[**] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LII, p. 555.
[***] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXI et XXII.
[****] *Mémoires de l'Institut* pour les années 1813, 1814, 1815, p. 382.

De là nous concluons qu'effectivement la détermination des nombres de valeurs distinctes que prennent les fonctions de m lettres dépend exclusivement de *toutes* les manières possibles de partager les permutations de ces m lettres en groupes de permutations *inséparables*, c'est-à-dire associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer.

Nous désignerons par μ le nombre total des permutations de m lettres, et par $\alpha, \beta, \gamma,\ldots$ ces permutations que nous supposerons partagées en s groupes composés chacun de q permutations associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, elles ne puissent jamais se séparer. En sorte qu'on aura

$$\mu = 1.2.3\ldots m, \quad \mu = sq,$$

et le tableau

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots,\ \omega_1, \\ \alpha_3,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ldots,\ \omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_s,\ \beta_s,\ \gamma_s,\ldots,\ \omega_s, \end{array} \right.$$

le nombre de lettres $\alpha, \beta, \gamma,\ldots, \omega$ étant égal à q.

THÉORÈME I. — *Toute fonction* V *de* m *lettres qui sera invariable pour toutes les permutations d'un seul groupe du tableau* (A), *et qui changera de valeur pour une quelconque des permutations de chacun des autres groupes du même tableau, aura* s *valeurs distinctes quand on y permutera, de toutes les manières possibles, les* m *lettres qu'elle renferme.*

Admettons en effet que cette fonction V prenne une même valeur V_1 pour toutes les permutations d'un des groupes du tableau (A), du premier par exemple, et qu'elle prenne une valeur différente V_2 pour une permutation quelconque d'un des autres groupes, pour α_2 par exemple du second. Je dis que cette fonction V prendra la même valeur V_2 pour toutes les permutations $\alpha_2, \beta_2,\ldots, \omega_2$ du même groupe. Car les permutations des s groupes du tableau (A) étant inséparables pour tout échange de lettres, quel que soit l'échange de lettres nécessaire pour transformer α_1 en α_2, ce même échange de lettres transformera toutes les autres permutations du premier groupe en toutes les autres du second; par exemple, β_1 en δ_2, γ_1 en χ_2, et ainsi de suite.

Or cet échange de lettres transforme par hypothèse α_1 en α_2, et V_1 correspondant à α_1 en V_2 correspondant à α_2; mais V_1 relatif à β_1 n'est autre chose que V_1 relatif à α_1 où l'on a changé seulement la notation d'une certaine manière; donc ce même échange de lettres transformera la valeur V_1 relative à β_1 en la *même* valeur V_2 relative à δ_2.

Par une raison semblable, ce même échange de lettres transformera la valeur V_1 relative à γ_1 en la valeur V_2 relative à χ_2, et ainsi de suite. Donc la fonction V prendra une même valeur V_2 pour toutes les permutations du second groupe.

On démontrerait de la même manière que si la fonction V prenait la valeur V_3 pour une des permutations du troisième groupe, pour α_3 par exemple, cette fonction conserverait la même valeur V_3 pour toutes les autres permutations $\beta_3,\ldots, \omega_3$ de ce même groupe. Il en serait de même pour tous les autres groupes. Donc le théorème énoncé est démontré.

Corollaire. — Si les valeurs $V_1, V_2,\ldots, V_s$ de la fonction V pour les permutations $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s$ étaient égales entre elles, cette fonction conserverait une valeur unique V_1 pour toutes les permutations des lettres qu'elle renferme : on dit alors que V est symétrique par rapport à ces lettres.

THÉORÈME II. — *Réciproquement, si $\mu = sq$, et si l'on peut décomposer les μ permutations de m lettres en s groupes composés chacun de q permutations, telles qu'une fonction de ces m lettres soit invariable pour les permutations de chacun de ces groupes et prenne s valeurs distinctes pour ces s groupes, les permutations de chacun d'eux sont inséparables, quel que soit l'échange des m lettres qui les forment.*

Supposons en effet qu'une fonction V de m lettres prenne une même valeur pour toutes les permutations d'un quelconque des

s groupes du tableau (A); la valeur V_1 pour toutes celles du premier groupe, la valeur V_2 pour toutes celles du second, etc., et enfin la valeur V_s pour toutes celles du dernier.

Quel que soit l'échange de lettres nécessaire pour transformer la permutation α_1 en une quelconque des permutations d'un des s groupes, en α_2 du second, par exemple, cet échange de lettres changera, par hypothèse, la valeur V_1 de V relative à α_1 en la valeur V_2 relative à α_2. Mais, par hypothèse encore, V prend pour β_1 la même valeur V_1, et V_1 relatif à β_1 n'est autre chose que V_1 relatif à α_1, où l'on a changé la notation; donc ce même échange de lettres transformera V_1 relatif à β_1 en V_2 qui sera, d'après l'énoncé du théorème, relatif à une permutation du second groupe, à δ_2 par exemple, nécessairement différente de α_2 : donc cet échange de lettres changera β_1 en δ_2. On ferait voir de même qu'il changerait toutes les autres permutations du premier groupe en toutes les autres du second. Il en serait évidemment de même pour deux quelconques des s groupes du tableau (A).

Si, au contraire, un échange de lettres transformait α_1 du premier groupe, en toute autre du même groupe, en β_1 par exemple, comme V_1 est, par hypothèse, invariable pour toutes les permutations de ce groupe, cet échange de lettres rendrait V_1 invariable. Mais la valeur V_1 peut être considérée comme relative à β_1 ; donc ce même échange de lettres rendant V_1 invariable, et V_1 n'étant invariable que pour les permutations du premier groupe, cet échange de lettres transformerait β_1 en une autre permutation du même groupe, en δ_1 par exemple. On ferait voir de la même manière que ce même échange de lettres changerait δ_1 en une autre permutation du même groupe, et ainsi de suite. Donc, par cet échange, les permutations de ce premier groupe ne font que se transformer les unes dans les autres, que se déplacer. Il en serait de même pour tout autre groupe.

Les deux résultats précédents démontrent évidemment la réciproque.

THÉORÈME III. — *Si une fonction de m lettres prend s valeurs distinctes quand on y permute ces lettres de toutes les manières possibles, le nombre total μ des permutations de ces lettres peut être partagé en s groupes composés chacun de q permutations ($\mu = sq$) associées de telle manière que, malgré tous les échanges de ces* *lettres, les permutations d'un même groupe ne peuvent jamais se séparer.*

Soit V une fonction de m lettres; si s est inférieur à μ, il faut nécessairement que parmi ces μ permutations il y en ait plusieurs α_1, $\beta_1, \ldots, \omega_1$, en nombre q par exemple, qui fassent acquérir une même valeur V_1 à cette fonction. Soient α_2 une des μ permutations qui ne soit pas comprise dans ce premier groupe, et V_2 la valeur que prend V pour cette nouvelle permutation.

Quel que soit l'échange de lettres nécessaire pour transformer α_1 en α_2, ce même échange de lettres transformera les $q-1$ permutations $\beta_1, \gamma_1, \ldots, \omega_1$ respectivement en $\beta_2, \gamma_2, \ldots, \omega_2$; et je dis que ces dernières sont différentes des premières et font acquérir à V la même valeur V_2. Car l'échange de lettres que l'on considère transforme par hypothèse α_1 en α_2, et la valeur V_1 relative à α_1 en la valeur V_2 relative à α_2. Mais V_1 relative à β_1 n'est autre chose que V_1 relative à α_1, où l'on a changé seulement la notation; donc cet échange de lettres doit nécessairement transformer encore V_1 en V_2; et comme il transforme aussi β_1 en β_2 par hypothèse, la fonction V prend pour β_2 cette valeur V_2. Donc encore, cette permutation β_2 diffère de celles du premier groupe; car si elle coïncidait avec l'une d'elles, elle ferait acquérir à V la valeur V_1.

Ce raisonnement pouvant s'appliquer à toute autre permutation du premier groupe, les q permutations du second groupe $\alpha_2, \gamma_2, \ldots, \omega_2$ sont différentes de celles du premier, et elles font acquérir une même valeur V_2 à la fonction V.

Il y a plus : les q permutations de ce second groupe sont les seules pour lesquelles V prend la valeur V_2. Car si, pour une permutation quelconque δ, différente de celles de ce second groupe, V prenait encore la valeur V_2, il y aurait $q+1$ permutations qui feraient acquérir à V une même valeur V_2; et dès lors il y aurait, en appliquant à V_2 le même raisonnement qui a été fait sur V_1, $q+1$ permutations pour lesquelles V prendrait une même valeur V_1, ce qui est contre l'hypothèse.

Il résulte de là que si $s=2$, on a $\mu = 2q$. Mais si s est supérieur à 2, il y a nécessairement, parmi les μ permutations, une autre permutation, α_3 par exemple, différente de celles des deux premiers groupes, pour laquelle V prendra une valeur différente V_3 des deux premières V_1 et V_2. Et on démontrerait, de la même manière, que parmi ces μ permutations il y en a nécessairement $q-1$ autres, différentes de celles des deux premiers groupes, pour lesquelles V prend cette même valeur V_3. En sorte que si $s=3$, on a $\mu=3q$. On raisonnerait de la même manière, si s était supérieur à 3.

Donc, quel que soit le nombre s de valeurs distinctes de la fonction V, les μ permutations des m lettres qui entrent dans cette fonction se partagent en s groupes composés chacun d'un même nombre q de permutations, q étant défini par l'équation $\mu=sq$ (ce qui est le théorème de Lagrange); et de plus, d'après le théorème précédent, les permutations de ces s groupes sont *inséparables* pour tous les échanges des m lettres qui les forment.

Théorème IV. — *Réciproquement, si les μ permutations de m lettres sont partagées en s groupes de permutations, inséparables pour tous les échanges de ces lettres, on peut former des fonctions de m lettres qui aient s valeurs distinctes.*

Considérons en effet la fonction linéaire de m lettres $a, b, c, \ldots, l$,

$$v = Aa + Bb + \ldots + Ll,$$

dont les coefficients A, B,..., L sont indépendants les uns des autres. Cette fonction prendra μ valeurs distinctes relatives aux μ permutations de ces lettres $a, b, \ldots, l$. Désignons par $v_1, v_2, \ldots, v_q$ les valeurs qu'elle prend pour les q permutations d'un des groupes du tableau (A), du premier par exemple, et prenons pour la fonction V l'expression symétrique de ces q quantités

$$V = v_1 v_2 \ldots v_q.$$

Je dis que cette fonction V prendra s valeurs distinctes par suite des μ permutations des m lettres $a, b, \ldots, l$ qu'elle renferme. Car, quel que soit l'échange de lettres qui transforme les permutations α_1 et α_2 du tableau (A) l'une dans l'autre, ce même échange de lettres transformera les permutations du premier groupe en celles du second, puisque les s groupes de ce tableau sont composés de q permutations *inséparables;* et, par suite, ce même échange de lettres transformera v_1, $v_2, \ldots, v_q$ respectivement en $v'_1, v'_2, \ldots, v'_q$, et aussi V en V′ définie par l'équation

$$V' = v'_1 v'_2 \ldots v'_q.$$

Et si l'on avait, comme le fait remarquer Cauchy,

$$V = V',$$

tout système de valeurs de $a, b, \ldots, l$, propres à rendre nul l'un des facteurs de V′, v'_1 par exemple, rendrait V également nul; et, par conséquent, ce système de valeurs devrait annuler l'un de ses facteurs, v par exemple. Donc, si l'on suppose

$$v'_1 = A'a + B'b + \ldots + L'l, \quad v_1 = Aa + Bb + \ldots + Ll,$$

auquel cas les coefficients $A', B', \ldots, L'$ ne sont autre chose que les coefficients $A, B, \ldots, L$ rangés dans un autre ordre, on a l'égalité

$$A' + B' + \ldots + L' = A + B + \ldots + L;$$

et les deux équations

$$v'_1 = 0, \quad v_1 = 0,$$

devant être satisfaites par les mêmes valeurs de $a, b, \ldots, l$, produisent la suite d'égalités

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \ldots = \frac{L'}{L}.$$

Mais de ces dernières et de l'égalité précédente on déduit

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \ldots = \frac{A' + B' + \ldots + L'}{A + B + \ldots + L} = 1;$$

on devrait donc avoir

$$A' = A, \quad B' = B, \ldots, \quad L' = L.$$

ce qui est impossible, puisque c'est par suite d'un échange de lettres que v_1 s'est transformé en v'_1.

Ainsi V' ne peut pas être égal à V. Il en serait de même pour les autres valeurs de V relatives aux autres groupes du tableau (A); donc cette fonction V a s valeurs distinctes.

Remarque. — On peut trouver une infinité de fonctions V dont le nombre de valeurs distinctes est égal à s. Par exemple, si l'on suppose

$$v = a^{\mathrm{A}}.b^{\mathrm{B}}\ldots l^{\mathrm{L}},$$

et si l'on prend

$$\mathrm{V} = v_1 + v_2 + \ldots + v_q,$$

cette fonction offrira s valeurs distinctes.

Plus généralement, si l'on prend pour V une fonction symétrique de $v_1, v_2, \ldots, v_q$, qui sont les valeurs que prend une fonction quelconque v des m lettres $a, b, \ldots, l$ pour les q permutations du premier groupe du tableau (A),

$$\mathrm{V} = \mathrm{F}(v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

telle que cette fonction F prenne des valeurs différentes pour une quelconque des permutations de chacun des autres groupes de ce même tableau; cette fonction V aura (théorème I) s valeurs distinctes.

Théorème V. — *Pour avoir tous les nombres de valeurs distinctes que prennent les fonctions quand on y permute les m lettres qu'elles renferment, il faut et il suffit que l'on considère toutes les manières possibles de partager les μ permutations qu'offrent ces lettres en s groupes composés chacun de q permutations, $\mu = sq$, associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer.*

Car si une fonction quelconque de m lettres a s valeurs distinctes, par suite de tous les échanges possibles de ces lettres, les μ permutations de ces lettres se partagent en s groupes de permutations *inséparables* (théorème III). Réciproquement, si ce partage est effectué, on peut former de plusieurs manières des fonctions de m lettres dont le nombre de leurs valeurs distinctes soit égal à s (théorème IV).

Donc le théorème est démontré.

Corollaire. — Il résulte de ce théorème que si, par un moyen quelconque, on peut trouver toutes les manières possibles de décomposer les μ permutations de m lettres en s groupes de permutations *inséparables*, on aura trouvé par cela même tous les nombres s de valeurs distinctes que prennent les fonctions de m lettres par suite de tous les échanges de ces lettres.