JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 77-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__77_0>

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

Pour répondre à cette question en parcourant graduellement les divers cas qui peuvent se présenter, nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, puis nous introduirons la fonction

$$\rho_2(m)$$

définie comme exprimant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

qui porte sur les diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. Le seul cas d'un entier impair $\equiv 1 \pmod{4}$ pourra exiger l'adjonction d'autres fonctions numériques.

2. Le cas d'un entier pairement pair, ou de $\alpha > 1$, est fort simple. En effet, dans l'hypothèse de

$$\alpha > 1,$$

l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne peut avoir lieu que pour des valeurs paires de x, y, z. Il faut donc faire

$$x = 2x_1, \quad y = 2y_1, \quad z = 2z_1,$$

moyennant quoi, en divisant par 4, nous retombons sur l'équation

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t^2 + u^2 + v^2$$

traitée par Jacobi. Il suit de là que, dans l'hypothèse indiquée de

$$\alpha > 1,$$

l'on a

$$\mathrm{N}(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\left[4^{\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Le cas d'un entier impairement pair n'est pas plus difficile. On le résout par la formule

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 12\rho_2(m).$$

Quant au cas d'un entier impair m, il se subdivise en deux autres, suivant que l'on a

$$m = 4g + 3$$

ou

$$m = 4g + 1.$$

Lorsque

$$m = 4g + 3,$$

on trouve tout de suite

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m).$$

Mais quand

$$m = 4g + 1,$$

la valeur de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est un peu plus compliquée.

3. Soit donc désormais

$$m = 4g + 1.$$

Pour obtenir

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

il faudra poser autant de fois qu'on le pourra l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

dans laquelle l'entier impair i est positif, tandis que l'entier s est indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. On comptera le nombre

$$\rho(m)$$

des décompositions de m ainsi obtenues et on calculera la somme

$$\sum i^2$$

relative à leur ensemble. Cela fait, on aura

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 3\rho_2(m) + 6\sum i^2 - 3m\rho(m),$$

équation qu'on établit en prouvant que la valeur demandée de

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est triple de celle de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2).$$

La formule que je viens de donner se simplifie quand m, quoique $\equiv 1 \pmod{4}$, n'est pas décomposable en une somme de deux carrés. Lorsqu'il en est ainsi, elle se réduit à

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 3\rho_2(m).$$

Par exemple, ayant

$$\rho_2(21) = 384,$$

on peut en conclure que l'on aura

$$N(21 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 1152.$$

Mais quoiqu'on ait $\rho_2(1) = 1$, on n'a pas

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 3.$$

La vraie valeur est évidemment double; et c'est ce que dit notre formule générale, eu égard à l'équation $1 = 1^2 + 4.0^2$. De même, pour trouver

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

il ne suffit pas de savoir que $\rho_2(5) = 26$; on a besoin de savoir en outre que, pour $m = 5$,

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2.$$

Notre formule donne en conséquence

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 60,$$

résultat qu'on peut vérifier au moyen des deux identités

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

en y effectuant les permutations qu'elles comportent. La première fournit effectivement vingt-quatre représentations de l'entier 5; la seconde trente-six. Or

$$24 + 36 = 60.$$

On ajoutera, si on le veut, d'autres exemples.