JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TH. DIEU

Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 137-144.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__137_0>

SUR LE MOUVEMENT

D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE;

Par M. Th. DIEU,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Quand les forces qui agissent sur le corps ont une résultante passant par le point fixe, on a les équations

$$(1)\quad A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=0,\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0.$$

Nous supposerons que A est le plus petit et C le plus grand des trois moments d'inertie principaux.

Des deux intégrales

$$(2)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=h,\quad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=k^2,$$

on déduit

$$k^2-Ah=B(B-A)q^2+C(C-A)r^2,$$
$$k^2-Ch=-A(C-A)p^2-B(C-B)q^2;$$

k^2 doit donc être $>Ah$ et $<Ch$, la rotation autour d'un axe permanent étant exclue.

Tirant des intégrales (2) les valeurs de p, q en fonction de r et les portant dans la dernière des équations (1), on obtient

$$dt=\pm\frac{C\sqrt{AB}.dr}{\sqrt{k^2-Bh-C(C-B)r^2}\sqrt{Ah-k^2+C(C-A)r^2}}.$$

Premier cas : $k^2<Bh$. — Posant

$$\frac{k^2-Ah}{C(C-A)}=a^2,\quad \frac{Bh-k^2}{C(C-B)}=b^2,$$

il vient

$$dt = \pm \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} \frac{dr}{\sqrt{(b^2+r^2)(a^2-r^2)}}.$$

D'après cette expression de dt, on doit toujours avoir $-a < r < a$, ce qui conduit à poser

$$r = a \cos\lambda,$$

λ étant une variable auxiliaire. De cette hypothèse il résulte

$$\frac{dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = \pm d\lambda, \quad b^2 + r^2 = (a^2+b^2)\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right);$$

par suite on a

$$(I) \qquad dt = \pm \frac{n\,d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}},$$

en posant

$$\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{ABC}{(B-A)(Ch-k^2)}} = n$$

et

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{C-B}{B-A}\,\frac{k^2-Ah}{Ch-k^2} = \gamma^2.$$

Supposons p_0 et q_0 de même signe: r décroît d'abord et va de r_0 à $-a$, puis devient croissant et va de $-a$ à $+a$, etc. λ_0 désignant la valeur de λ entre o et π tirée de $\cos\lambda = \frac{r_0}{a}$, on aura $r = -a$ pour $\lambda = \pi$, puis $r = a$ pour $\lambda = 2\pi$, etc.; il faudra donc toujours prendre le signe supérieur dans la formule (I), en sorte que

$$t = n\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}}.$$

Soit $r_0 > 0$; on aura $\lambda_0 < \frac{\pi}{2}$. La durée du passage de $r = r_0$ à $r = -a$ sera

$$n\int_{\lambda_0}^{\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}} = n[2F(\gamma) - F(\gamma, \lambda_0)],$$

et celle des passages de $r = -a$ à $r = a$, de $r = a$ à $r = -a$, etc.,

$$n \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2\lambda}} = 2n\mathrm{F}(\gamma).$$

On a

$$\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{A})p^2 = \mathrm{C}(\mathrm{C} - \mathrm{B})(b^2 + r^2),$$
$$\mathrm{B}(\mathrm{B} - \mathrm{A})q^2 = \mathrm{C}(\mathrm{C} - \mathrm{A})(a^2 - r^2);$$

donc p ne peut passer par zéro et doit toujours garder le signe de p_0, tandis que q devient au contraire nul pour $r = -a$, puis pour $r = a$, et doit à chaque fois changer de signe afin que le signe de dr change [dernière des équations (1)].

Les composantes p, q, r de la vitesse de rotation reprennent périodiquement les mêmes valeurs respectives pour des valeurs de λ en progression de raison égale à 2π; ces valeurs de λ répondent à des valeurs de t formant une progression dont la raison est $4n\mathrm{F}(\gamma)$.

Angles d'Euler. — D'après la formule $\cos\theta = \frac{\mathrm{C}r}{k}$, en partant de $t = n[2\mathrm{F}(\gamma) - \mathrm{F}(\gamma, \lambda_0)]$, θ variera depuis la valeur entre o et π donnée par $\cos\theta = -\frac{\mathrm{C}a}{k}$, jusqu'à celle qui est donnée par $\cos\theta = \frac{\mathrm{C}a}{k}$, et *vice versâ*. D'après

$$\sin\varphi \sin\theta = \frac{\mathrm{A}p}{k}, \quad \cos\varphi \sin\theta = \frac{\mathrm{B}q}{k},$$

φ ne peut croître ni décroître indéfiniment, puisque p n'est jamais nul; cet angle est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ (selon que p_0, q_0 sont positifs ou négatifs) quand on a $r = \mp a$, et varie toujours entre les valeurs équidifférentes de $\frac{\pi}{2}$ répondant à $r = 0$.

Les angles φ et θ reprennent périodiquement les mêmes valeurs en même temps que p, q, r.

De l'équation

$$d\psi = dt \cdot \frac{k(h - \mathrm{C}r^2)}{k^2 - \mathrm{C}^2 r^2}$$

on déduit

$$\frac{C}{nk}\,d\psi = \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}} + \frac{C-A}{A}\,\frac{d\lambda}{(1+m^2\sin^2\lambda)\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}},$$

en posant

$$\frac{C(k^2-Ah)}{A(Ch-k^2)} = m^2.$$

La valeur initiale de ψ étant ψ_0, on a donc

$$\psi = \psi_0 + \frac{k}{C}t + \frac{nk}{C}\cdot\frac{C-A}{A}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{(1+m^2\sin^2\lambda)\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}}.$$

Jusqu'à l'instant où

$$t = n[F(\gamma) - F(\gamma, \lambda_0)],$$

l'intégrale est exprimée par

$$\Pi(\gamma, m^2, \lambda) - \Pi(\gamma, m^2, \lambda_0);$$

jusqu'à celui où

$$t = n[2F(\gamma) - F(\gamma, \lambda_0)],$$

elle est ensuite exprimée par

$$2\Pi(\gamma, m^2) - \Pi(\gamma, m^2, \lambda_0) - \Pi(\gamma, m^2, \overline{\pi-\lambda}), \text{ etc.}$$

On voit que ψ augmente de

$$\frac{2nk}{C}\left[F(\gamma) + \frac{C-A}{A}\Pi(\gamma, m^2)\right]$$

pendant des intervalles de temps successifs égaux à $2nF(\gamma)$, à partir de l'instant où r atteint pour la première fois la valeur $-a$.

L'angle ψ varie toujours dans le même sens. Ses valeurs forment une progression par différence pour des valeurs de t croissant par degrés égaux à $4nF(\gamma)$ à partir d'un instant quelconque, et pour lesquelles θ et φ, ainsi que p, q, r, reprennent périodiquement les mêmes valeurs.

La discussion serait absolument la même si l'on supposait r_0 négatif avec p_0, q_0 de même signe, ou p_0, q_0 de signes contraires avec r_0 positif ou négatif.

Second cas : $k^2 > Bh$. — Posant

$$\frac{k^2 - Ah}{C(C - A)} = a^2, \quad \frac{k^2 - Bh}{C(C - B)} = c^2,$$

il vient

$$dt = \pm \sqrt{\frac{AB}{(C - A)(C - B)}} \frac{dr}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - c^2)}}.$$

Des inégalités $Ch - k^2 > 0$, $B > A$, on déduit $a^2 > c^2$. On doit donc toujours avoir $c^2 < r^2 < a^2$, c'est-à-dire

$$-a < r < -c, \quad \text{si } r_0 \text{ est négatif,}$$
$$c < r < a, \quad \text{si } r_0 \text{ est positif.}$$

Cela conduit à poser

$$r^2 - c^2 = (a^2 - c^2)\cos^2\mu,$$

μ désignant une variable auxiliaire. D'après cela,

$$\frac{dr}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - c^2)}} = -\frac{d\mu}{r}, \quad r = \pm\sqrt{a^2 - (a^2 - c^2)\sin^2\mu};$$

on a donc

$$\text{(II)} \qquad dt = \pm \frac{n'\,d\mu}{\sqrt{1 - \gamma'^2 \sin^2\mu}},$$

en posant

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{AB}{(C - A)(C - B)}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{ABC}{(C - B)(k^2 - Ah)}} = n'$$

et

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{B - A}{C - B} \cdot \frac{Ch - k^2}{k^2 - Ah} = \gamma'^2.$$

Supposons p_0, q_0 de signes contraires et r_0 positif; r croît d'abord de r_0 à a, puis décroît de a à c, etc. Soit $-\mu_0$ la valeur de μ entre $-\frac{\pi}{2}$ et o qui est donnée par $\cos\mu = \frac{r_0^2 - c^2}{a^2 - c^2}$, on aura $r = a$ pour $\mu = 0$. $r = c$ pour $\mu = \frac{\pi}{2}$, etc.; il faudra donc toujours prendre le signe supérieur dans la formule (II), en sorte que

$$t = n' \int_{-\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \gamma'^2 \sin^2\mu}}.$$

D'apres cela : 1° la durée du passage de $r = r_0$ à $r = a$ est $n'\mathrm{F}(\gamma', \mu_0)$; 2° celles des passages de $r = a$ à $r = c$ et des passages inverses sont toutes égales à $n'\mathrm{F}(\gamma')$; 3° la durée de la période est le double $2n'\mathrm{F}(\gamma')$, au moins pour r.

On a

$$\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{A})p^2 = \mathrm{C}(\mathrm{C} - \mathrm{B})(r^2 - c^2),$$
$$\mathrm{B}(\mathrm{B} - \mathrm{A})q^2 = \mathrm{C}(\mathrm{C} - \mathrm{A})(a^2 - r^2);$$

donc q est nul pour $r = a$ et p pour $r = c$. D'ailleurs le signe de p, de même que celui de q, doit changer à chaque passage par zéro, afin que dr change de signe [dernière des équations (1)]

Les composantes p, q, r reprennent périodiquement les mêmes valeurs pour des valeurs de t *croissant par degrés égaux à $4n'\mathrm{F}(\gamma')$ à partir d'un instant quelconque.*

Angles d'Euler. — On conclut de $\cos\theta = \frac{\mathrm{C}r}{k}$, que θ doit toujours rester entre o et $\frac{\pi}{2}$ quand r_0 est positif, et par suite r entre a et c. A partir de $t = n'\mathrm{F}(\gamma', \mu_0)$, θ variera depuis la valeur donnée par $\cos\theta = \frac{\mathrm{C}a}{k}$, jusqu'à la valeur plus grande donnée par $\cos\theta = \frac{\mathrm{C}c}{k}$, et *vice versâ*. D'après

$$\sin\varphi \sin\theta = \frac{\mathrm{A}p}{k}, \quad \cos\varphi \sin\theta = \frac{\mathrm{B}q}{k},$$

l'angle φ est égal à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ pour $r = a$, et à un multiple de π pour $r = c$, puisque q est nul pour $r = a$ et p pour $r = c$; cet angle n'est donc pas limité, au contraire de ce qui a lieu dans le premier cas. Par une discussion minutieuse, on voit qu'il décroît indéfiniment lorsque p_0, q_0 sont de signes contraires, comme on l'a supposé. Enfin ses valeurs pour des valeurs de t en progression de raison égale à $2n' F(\gamma')$ en forment une de raison égale à π.

L'angle θ reprend périodiquement les mêmes valeurs en même temps que p, q, r, tandis que φ varie de 2π dans un certain sens, toujours le même.

L'équation

$$d\psi = dt\,\frac{k(h - Cr^2)}{k^2 - C^2r^2}$$

devient

$$\frac{C}{n'k}\,d\psi = \frac{d\mu}{\sqrt{1-\gamma'^2\sin^2\mu}} + \frac{C-A}{A}\,\frac{d\mu}{(1+m'^2\sin^2\mu)\sqrt{1-\gamma'^2\sin^2\mu}},$$

en posant

$$\frac{C(B-A)}{A(C-B)} = m'^2.$$

Si l'on désigne encore par ψ_0 la valeur initiale de ψ, on a

$$\psi = \psi_0 + \frac{k}{C}t + \frac{n'k}{C}\cdot\frac{C-A}{A}\int_{-\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{(1+m'^2\sin^2\mu)\sqrt{1-\gamma'^2\sin^2\mu}}.$$

Jusqu'à l'instant où

$$t = n' F(\gamma', \mu_0),$$

l'intégrale est exprimée par

$$\Pi(\gamma', m'^2, \mu_0) - \Pi(\gamma', m'^2, -\mu);$$

jusqu'à celui où

$$t = n'[F(\gamma', \mu_0) + F(\gamma')],$$

elle est ensuite exprimée par

$$\Pi(\gamma', m'^2, \mu_0) + \Pi(\gamma', m'^2, \mu), \text{ etc.}$$

Ainsi l'angle ψ croît constamment de $\frac{n'k}{C}\left[F(\gamma') + \frac{C-A}{C}\Pi(\gamma', m'^2)\right]$ pendant des intervalles de temps successifs égaux à $n' F(\gamma')$.

L'angle ψ varie toujours dans le même sens, et ses valeurs forment une progression de raison égale à $\frac{4n'k}{C}\left[F(\gamma') + \frac{C-A}{C}\Pi(\gamma', m'^2)\right]$ pour des valeurs de t en progression de raison égale à $4n' F(\gamma')$, tandis que p, q, r, θ reprennent périodiquement les mêmes valeurs et que φ prend des valeurs en progression de raison égale à 2π.

La discussion se fait tout à fait de la même manière quand on suppose p_0, q_0 de signes contraires et r_0 négatif, ou p_0, q_0 de même signe et r_0 positif ou négatif.

La différence la plus remarquable entre le premier cas et le second consiste en ce que l'angle φ n'est pas limité dans celui-ci, tandis qu'il oscille, pour ainsi dire, entre deux valeurs fixes dans l'autre.